الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

جامعة غرداية

كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير

قسم العلوم المالية والمحاسبة

مطبوعة بيداغوجية

محاضرات في الإحصاء 02

لطلبة السنة أولى جذع مشترك الفصيلة D

الدكتور: عبدالرؤوف عباده

أستاذ محاضر صنف أ، جامعة غرداية

abada.abderraouf@univ-ghardaia.dz

السنة الجامعية 2024/2023

نظرية المجموعات

1- المجموعات (sets)

إن دراسة المجموعات ذات أهمية كبيرة وضرورية لدراسة الاحتمال.

المجموعة: هي تجمع أي عدد من العناصر أو الأشياء و سنمثل المجموعة بحروف لاتينية كبيرة مثل ...... ,A,B,C و عناصر المجموعة بحروف صغيرة مثل .... a , b , c

يستعمل الرمز ∈ ليعني (ينتمي إلى) و الرمز ∉ليعني (لا ينتمي إلى) و هكذا فإن

$a \in A$ تعني أن العنصر a ينتمي إلى المجموعة A

أما $b \notin A$ تعني أن العنصر b لا ينتمي إلى المجموعة A

وعند دراسة أي مجموعة يجب التأكد من أنهما معرفة تماما و ذلك يعني أنه إذا أعطينا أي عنصر فإنه سيكون بإمكاننا معرفة فيما إذا كان هذا العنصر منتميا للمجموعة أو غير منتم إليها.

2- طرق وصف المجموعة:

هناك طريقتان لوصف المجموعات[1]:

2-1- طريقة العد (Roster Melhod)

و ذلك بوضع جميع عناصر المجموعة بين حاصرتين (حاضنتين) crochets

مثل $A = (a , b , c , d)$

أو $B = (H, T)$

$C = (1, 2 , 3 , \cdots ,10)$

2-2 طريقة القانون (Rule Melhod)

و ذلك بوصف المجموعة بقانون يوضع بين حاصرتين فمثلا

$$A = \left(x/7 \text{ عدد صحيح موجب أقل من } x\right)$$

$$B = \left(x/\text{هي قسم بيداغوجي في جامعة غرداية } x\right)$$

[1]- محمد صبحي أبو صالح، عدنان محمد عوض، **مقدمة في الإحصاء**، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 1984، ص 57.

3- تعاريف حول المجموعات:

3-1- المجموعة الخالية (Empty set): هي المجموعة التي فيها عناصر مطلقا و نعبر عنها بالرمز Ø أو {}

3-2-المجموعة الجزئية (subset): القول أن A مجموعة جزئية من B و نرمز لها $A \subset B$ إذا كان عناصر A منتميا للمجموعة B (A محتواة في B)

$$A = \{1 , 2 , 3\}$$
$$B = \{1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6\}$$

3-3-التساوي (Equality):

نقول أن المجموعة A تساوي المجموعة B أي A=B إذا كانت A ، B تحتويان على نفس العناصر، يكون ذلك إذا تحقق الشرطان $A \subset B$, $B \subset A$

مثال: $A = (a , b , c)$ $B = (a , b , c)$

3-4-المجموعة الكلية (Univercel set):

المجموعة الكلية هي المجموعة التي تدرس جميع المجموعات تحت البحث باعتبارها مجموعات جزئية منها.

4-العمليات الجبرية على المجموعات (set Operations)

4-1-الاتحاد (Union): اتحاد المجموعتين A، B أي $A \cup B$ هو مجموعة العناصر الموجودة في Aأو في B أو في كليهما، و بعبارة أخرى:

$$A \cup B = \left\{x/x \in B \text{ أو } xA\right\}$$

مثال : إذا كان : $B = \{3, 4, 5\}$ $A = \{1, 2,3 \}$

$$A \cup B = \{1, 2,3, 4, 5\}$$

4-2-التقاطع: (Inter section):

تقاطع المجموعتين A, B أي $A \cap B$ هو مجموعة العناصر المشتركة بين A و B أي هو مجموعة العناصر المنتمية إلى A و B في نفس الوقت. وبعبارة أخرى:

$$A \cap B = \left\{x/x \in B \text{ و } x \in A\right\}$$

مثال: إذا كان: $B = \{8, 12, 16\}$ $\quad A = \{3, 8,10\}$

$A \cup B = \{8\}$

4-3-المتممة (Complement):

متممة A (بالنسبة إلى المجموعة الكلية Ω) هو مجموعة العناصر المنتمية إلى المجموعة الكلية Ω و لا تنتمي إلى A و نمثلها بالرمز A^c ، وبعبارة أخرى:

$$A^c = \{x/x \in \Omega;\ x \notin A\}$$

إذا كان:

$$\Omega = \{1, 2,3, 4, 5\}$$
$$\Omega = \{ 2,3\}$$
$$A^c = \bar{A} = \{1, 4, 5\}$$

ملاحظة: إذا لم يوجد عناصر مشتركة بين مجموعتين نقول أن المجموعتين منفصلتان في بعضهما البعض، أي أنه إذا كان $A \cap B = \emptyset$ فإن A و B منفصلتان (disjoint).

5-خواص العمليات الجبرية على المجموعات:

5-1-خاصية التبديل (Commutatve Laws):

- خاصية التبديل للاتحاد $A \cup B = B \cup A$
- خاصية التبديل للتقاطع $A \cap B = B \cap A$

5-2-خاصية التجميع (Associative Laws):

- خاصية التجميع للاتحاد $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
- خاصية التجميع للتقاطع $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

5-3- خاصية التوزيع (Distributive Laws):

- خاصية التوزيع للتقاطع على الاتحاد $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- خاصية التوزيع للاتحاد على التقاطع $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

5-4- قوانين ديمور غان (De Morgan’s Laws):

- $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

- $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

6-فضاء العينة (sample space)

يستعمل علم الإحصاء في استقراء النتائج من المشاهدات والقياسات التي يسجلها العلماء الباحثون نتيجة إجراء التجارب.

6-1-التجربة الإحصائية (Statistical Experiment): هي كل تجربة لا تكون نتيجتها معروفة مسبقا بشكل حتمي.

مثال:

- عند رمي قطعة نقود فإن النتيجة تكون إما صورة وإما كتابة.
- عند رمي زهرة نرد فإن الوجه الذي يظهر إلى أعلى يحمل أحد الأعداد الآتية 1،2،3،4،5،6

أي أن النتيجة لا تكون معروفة بشكل حتمي قبل إجراء التجربة.

6-2- فضاء العينة Ω لتجربة إحصائية: هو مجموعة جميع النتائج الممكنة لتلك التجربة و أي عنصر في فضاء العينة يسمى نقطة فضاء العينة (A Sample Point).

6-3- الحادث (Event): هو أي مجموعة جزئية لفضاء العينةS بشرط أن مجموعة Ω منتهية، يتكون فقط من أحد النتائج الممكنة للتجربة و يرمز له بالحروف اللاتينية ...... ,A,B,C

مثال: عند رمي زهرة النرد تكون النتائج الممكنة أو فضاء العينة كالتالي:

$$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$$

$$A = \{3\} \qquad B = \{2,6\} \quad C = B = \{1,4,5\}$$

و ينقسم الحادث إلى عدة أنواع:

6-3-1- الحادث البسيط: هو الحادث الغير قابل للتجزئة و يحتوي على عنصر واحد من فضاء العينة

مثال: عند رمي زهرة النرد فإن الحادث $A = \{3\}$ هو حادث بسيط لأن الرقم 3 لا يمكن تقسيمه إلى حوادث أخرى.

6-3-2-الحادث المركب: هو الحادث الذي يمكن تجزئته إلى حوادث بسيطة يحتوي على أكثر من عنصر من فضاء العينة Ω،

مثال: نقول أن حادث ظهور رقم فردي عند رمي حجرة نرد هو حدث مركب لأنه يتكون من حوادث بسيطة مثل A={1 , 2 , 3}

6-3-2-الحادث الأكيد: نقول عن الحادث أنه أكيد إذا كان يتكون من جميع الحوادث البسيطة المرتبطة بالتجزئة.

مثال: نقول أن حادث الحصول على رقم أصغر من 7 عند رمي زهرة نرد هو حادث أكيد لأننا مهما رمينا حجرة النرد فسوف نحصل على رقم من 1 إلى 6، و نرمز بـ A=Ω

6-3-3-الحادث المستحيل: هو الحدث المستحيل وقوعه مهما أعدنا التجربة الإحصائية.

مثال: نقول حدث ظهور الرقم 8، ونرمز له بـ $A = \emptyset$

6-3-4-الحوادث المتنافية: هي الحوادث التي يستحيل حدوثها في آن واحد، حيث وقوع أحدها نفي وقوع الأخر أو إذا كان غير متقاطعين $A \cap B = \emptyset$ (إذا كان تقاطعهما يساوي المجموعة الخالية)

6-3-5-الحوادث غير المتنافية: هي الحوادث التي يمكن حدوثها في آن واحد حيث أن حدوث أحدها لا ينفي وقوع الآخر أو إذا كان تقاطعهما لا يساوي المجموعة الخالية $A \cap B \neq \emptyset$

مثال: عند رمي زهرة نرد على الأرض فإن عدد الحالات الممكنة أو فضاء العينة هي:

$$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$$

نفترض أن عند ظهور رقم زوجي هو الحادث A و أنه عند ظهور رقم فردي هو الحـادث B و عند ظهور رقم أولي هو الحادث C (الرقم الأول هو الذي يقبل القسمة على 1 و على نفسه فقط)

A={2 , 4 , 6}　　　B ={1 , 3 , 5}　　　C ={2 , 3 , 5}

و منه يمكن القول:

- الحادثين هما A و B هما حادثين متنافين لأنه لا يمكن أن العدد فردي و زوجي في نفس الوقت و بالتالي يكون $A \cap \mathrm{B} = \{\} = \emptyset$
- الحادثين هما A و B هما حادثين غير متنافين لأن:$A \cap C = \{2\} \neq \{\} \neq \emptyset$

6-3-6-الحوادث المستقلة: هي الحوادث التي عندما يقع أحدها لا يؤثر ولا يتأثر بوقوع الحوادث الأخرى.

مثال: نتائج عدة رميات لقطعة نقود هي حوادث مستقلة، لأن نتائج الرمية الأولى مثلا لا تؤثر ولا تتأثر بنتائج الرمية الثانية أو الثالثة .... إلخ

6-3-7-الحوادث غير المستقلة: هي الحوادث التي عند وقوع أحدها يؤثر على احتمال وقوع الحوادث الأخرى أو قرع أحدها يكون مشروط أو مرتبط بوقوع الحوادث الأخرى.

مثال: عند سحب كرة من صندوق بدون إعادة به n كرة هي حوادث غير مستقلة لأن السحبة الأولى والثانية تؤثر على احتمال السحبات الموالية.

ملاحظة: بما أن الحوادث مجموعات جزئية من فضاء العينة Ω، فإن العمليات الجبرية على المجموعات يمكن تطبيقها على الحوادث فمتممة الحادثة A هي الحادث "غير"، و اتحاد A و B هو الحادث(A أو B") و تقاطع A و B هو الحادث (A و B معا).

تمارين

__تمرين رقم 01__ : لتكن المجموعتان A و B الجزئيتان من المجموعة الكلية (Ω) :

$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; a; b; c\}$ ، $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$ ، $B = \{1; 3; a; b\}$

- حدد المجموعة $A \cup B$ ؟حدد المجموعة $A \cap B$ ؟
- حدد المجموعة $\bar{B}$ و $\bar{A}$ ؟
- حدد المجموعات: $(\overline{A \cup B})$ ، $(\overline{A \cap B})$ ، $\bar{A} \cap \bar{B}$ ، $\bar{A} \cup \bar{B}$ ماذا تستنتج ؟

__تمرين رقم 02__ : نقوم برمي حجر نرد متجانس ونركز على النتيجة التي تظهر على السطح:

- أكتب فضاء العينة .
- عين الأحداث التالية: A: نتيجة الرمية عدد زوجي. B : نتيجة الرمية عدد فردي C: نتيجة الرمية عدد أقل من 3. D: نتيجة الرمية عدد اقل تماما من 7.
E: نتيجة الرمية عدد أكبر من 6.
- ماذا تستنتج من الأحداث التالية: الحادثين A و B ، الحادثين B و C ، الحادث D ، الحادث E .

التحليل التوافقي

1- التباديل:

التباديل هي ترتيب جميع عناصر أو جزء من عناصر أي مجموعة.

سوف نميز هنا بين نوعين من التباديل:

- التباديل دون تكرار
- التباديل مع التكرار

1-1- التباديل دون تكرار:

يمكن أن نسمي ترتيب n من العناصر المختلفة بأنه تبديلة هذه العناصر مأخوذة k في كل مرة، بشرط أن تأخذ جميع العناصر أو n = k، أي هي عدد المجموعات التي يمكن تشكيلها من هذه العناصر التي تختلف باختلاف ترتيب أحد هذه العناصر على الأقل و يعبر عنها بالعلاقة التالية:

$$p_{\text{n}} = \text{n}!$$

!n = يقرأ n عاملي أو مضروب m حيث أن

$$0!=1$$

$$1!=1$$

$$2!=2$$

$$3!=6$$

$$4!=24$$

$$5!=120$$

$$6!=720$$

$$7!=5040$$

$$8!=40320$$

$$9!=362880$$

$$10!=3628800$$

مثال: ما هي عدد الطرق الممكنة لترتيب مجموعة الحروف $\text{n} = \{a , b , c\}$؟

الحل:

$$P_3 = 3! = 3 \times 21 = 6$$

حيث لدينا ثلاث أماكن لنملأها

هناك 3 حروف يمكن اختيار واحد منها لملأ المكان الأول و حرفان لملأ المكان الثاني، و يبقى حرف واحد لملأ المكان الثالث و بتطبيق تعميم قاعدة الضرب يكون عدد الطرق.

$$3 \times 2 \times 1 = 6$$

يمكن تمثيل التبادل (06) السنة السابقة بتشكل شجرة كما هو موضح في الشكل التالي:

الوجه عام، ما عدد تباديل n من العناصر المأخوذة سويا؟

إذا كانت لدينا n من العناصر المميزة فبكم طريقة يمكن ترتيبها كلها في الخط؟

لنتصور على الخط n من الأماكن كما في الشكل التالي:

المكان n	....	المكان الثالث	المكان الثاني	المكان الأول

n → n n−1 n− 2 1

بتطبيق تعميم قاعدة الضرب يكون عدد الطرق: n(n−1) (n− 2) ...... 3.2.1= n! = P_n

و عادة نستعمل الرمز n! الذي يقرأ "مضروب n" لبدل على حاصل الضرب السابق فيكون

n!(n−1) (n− 2) 3.2.1

مثال: كم كلمة يمكن تشغيلها من الحروف التالية (s , k , l , m, h) قد لا يكون للكلمة معنى ؟

في هذه الحالة يمكن اختيار الحروف الأول بـ 5 طرق مختلفة و تبقى لنا 4 طرق مختلفة لاختيار الحرف الثاني لأن الحرف الذي اخترناه في الأول لا يكون من الحروف المتبقية و 3 لاختيار الحرف الثالث 2 لاختيار الحرف الرابع و 1 لاختيار الحرف الخامس، و يمكن التعبير عن ذلك:

$$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

$$P_n = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

أما إذا لم تؤخذ جميع العناصر (n) المميزة بل أخذنا k منها $n > k$ فإننا في كل مرة نحصل على عدد التباديل بالطريقة الآتية: $n > k$

- −ما عدد تباديل (n) المميزة أخذت k في كل مرة ؟

أي إذا كان لدينا n عناصر المميزة و k من الأماكن فبكم طريقة نملأ هذه الأماكن إذا كانت هذه الأماكن في الصف.

- بكم طريقة يمكن ترتيب k عنصر أخذت من العناصر المميزة n ؟

باستعمال قاعدة الضرب فإن عدد الطرق التي تملأ فيها (الأماكن k_i) هي

$$n(n-1)\cdots(n-k+1)$$

باستعمال الرمز nP_m ليدل على عدد تباين m عناصر مميزة تؤخذ k في كل مرة فإن:

$$P_{\mathrm{n}}^{\mathrm{k}} = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)$$

بالضرب و القسمة على $(n-k)!$ فإن:

$$P_{\mathrm{n}}^{\mathrm{k}} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)(n-k)!}{(n-k)!}$$

$$P_{\mathrm{n}}^{\mathrm{k}} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

مثال: بكم طريقة يمكن ترتيب حرفين أخذ من الحروف $a\,,b\,,c\,,d\,,e$

الحل: لدينا 5 حروف مختلفة، نريد ترتيبها بأخذ حرفين في كل مرة فيكون عدد التباديل

$$P_5^2 = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$P_5^2 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = 20$$

مثال: إذا كانت لدينا الأرقام التالية (7 ، 1، 3 ، 9، 6، 4).

بكم طريقة يكن ترتيب 3 أرقام من هذه الأرقام؟

الحل: في هذه الحالة نحن نريد اختيار مجموعة جزئية من الأرقام k من المجموعة الكلية m حيث $n >$ k يمكن اختيار رقم المئات بـ 6 طرق.

رقم العشرات بـ 5 طرق .

رقم الآحاد بــ 4 طرق.

$$6 \times 5 \times 4 = 120$$

و بتطبيق القانون الأخير نحصل على نفس النتيجة

$$P_{\mathrm{n}}^{\mathrm{k}} = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6\times5\times4\times3!}{3!} = 120$$

1-2- التباديل مع تكرار:

في بعض الحالات لا يمكن أن نفرق بين عناصر المجموعة n أو عندما تكون العناصر متماثلة أي إذا كان ضمن المجموعة n، n_1 من العناصر المتشابهة، n_2 من العناصر المتشابهة المختلفة عن النوع الأول ،n_3من العناصر المتشابهة المختلفة عن النوعين الأولين ،.....،n_{k}من العناصر المتشابهة المختلفة عن جميع العناصر من الأنواع السابقة ،بحيث أن :

$$n_1 + \mathrm{n}_2 + \mathrm{n}_3 + \cdots + \mathrm{n}_{\mathrm{k}} = n$$

فإن عدد تباديل العناصر التي عددها nهو:

$$P_n^{n_1 n_2 n_3 \cdots n_k} = \frac{n!}{n_1!\, n_2!\, n_3! \cdots n_k!}$$

مثال: ما عدد تبادل حروف كلمة statistics

الحل: لدينا 10 حروف منها:

$n_1 = 3 \leftarrow 3$i

$n_2 = 3 \leftarrow 3$T

$n_3 = 2 \leftarrow 2$i

$n_4 = 1 \leftarrow 1$A

$n_5 = 1 \leftarrow 1$C

فيكون عدد التباديل $P_n^{n_1!n_2!n_3!n_4!n_5!} = \frac{n!}{n_1!n_2!n_3!n_4!n_5!}$

$$P_{10}^{3.3.2.1.1} = \frac{10!}{3!\,3!\,2!\,1!\,1!} = 50400$$

مثال: ما هو عدد التباديل المختلفة التي يمكن تكوينها من كلمة proposition

الحل: لدينا 11 حرف ← n=11 منها

$n_1 = 2 \leftarrow 2$p

$n_2 = 3 \leftarrow 30$

$n_3 = 2 \leftarrow 2$I

$n_4 = 1 \leftarrow 15$

$n_5 = 1 \leftarrow 15$

$n_6 = 1 \leftarrow 15$

$n_7 = 1 \leftarrow 1$n

$$P_n^{n_1!n_2!n_3!n_4!n_5!n_6!n_7!} = \frac{n!}{n_1!\, n_2!\, n_3!\, n_4!\, n_5!\, n_6!\, n_7!}$$

$$P_{11}^{3.3.2.1.11.1} = \frac{11!}{3!\,3!\,2!\,1!\,1!\,1!\,1!} = 1663200$$

يمكن تفسير القاعدة السابقة على أنها تعطينا عدد الطرق التي يمكننا بها تقسيم مجموعة فيها m من العناصر إلى k من المجموعات الجزئية التي عدد عناصرها على التوالي:

$$n_1, n_2, \cdots, n_k$$

مثال: بكم طريقة يمكن توزيع 8 أشخاص على 3 غرف في فندق حيث أن غرفتين من ذات الثلاث أسرة وغرفة ذات سريرين

الحل: إن مجموع التقسيمات تكون طريقته:

$$P_n^{n_1 n_2 n_3} = \frac{n\,!}{n_1\,!\,n_2\,!\,n_3!}$$

$$P_n^{3.3.2} = \frac{8!}{3!\,3!\,2!} = 560$$

2–التراتيب:

في الكثير من الحالات في نظرية الاحتمالات خاصة في التحاليل التوافقي نصادف تجارب تتمثل في اختيار مجموعة جزئية متكونة من عنصر من مجموعة كلية متكونة من n، حيث $k \leq \mathrm{n}$. مثل اختيار 3 كرات من وعاء فيه n من الكرات. نسمي عملية الاختيار هذه بالترتيبة، ويوجد نوعين من التراتيب:

- التراتيب مع إعادة.
- التراتيب دون إعادة

2–1– التراتيب مع إعادة:

إذا كانت التجربة متمثلة في سحب كرات من إناء فيه n من الكرات مثلا، في هذه الحالة عند اجراء التجربة تعاد الكرة المسحوبة إلى الإناء بعد كل سحبة، و بما أنه n طريقة مختلفة لاختيار كل كرة فبتطبيق المبدأ الأساسي للعد نحصل على: $n \times n \times n \times \cdots \times n = n^k$

و يمكن التعبير عنها بالصيغة التالية: $AR_n^k = n^k$

مثال: ما هي عدد الأعداد المشكلة من 3 أرقام التي يمكن تكوينها من الأرقام الزوجية القاعدة العشرية؟

الحل: في هذه الحالة الأرقام الزوجية في القاعدة العشرية تمثل المجموعة n هي $n = (1,4,6,8)$

و المجموعة الجزئية $k = 3$, و بتطبيق قانون الترتيبة مع إعادة نحصل على:

$$AR_n^k = 4^3 = 64 \text{ عدد}$$

مثال: ما هي عدد المجموعات الجزئية المشكلة من $k = 2$ التي يمكن تكوينها من الحروف التالية $\mathrm{n} = (\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c})$ يسمح بإعادة الحرف أكثر من مرة؟

الحل: من خلال العدد المباشر نحصل على 9 ثنائيات المتصلة في:

$(a,a), (a\,,b), (a\,,c), (b,a), (b\,,b), (b,c), (c,a), (c,b)\,, (c,c)$

وبتطبيق قانون الترتيبة مع الإعادة نحصل على:

$$AR_3^2 = 3^2 = 9 \text{ ثنائيات}$$

2-2-الترتيب دون إعادة:

في هذه الحالة يجب عدم إعادة العنصر المسحوب إلى المجموعة n و بذلك لا تكون هناك إعادة للعناصر، حيث أن السحبة الأولى تكون من المجموعة n، و السحبة الثانية تكون من المجموعة $n-1$، و هكذا حتى السحبة الأخيرة التي تكون من المجموعة $n-k+1$ و يمكن التعبير عنها بالعلاقة التالية:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

وهو نفس القانون الذي تطرقنا إليه في التبديلة بدون تكرار

مثال: ما هي عدد المجموعات المشكلة من $k=2$ التي يمكن تكوينها من الحروف التالية $n=(a,b,c)$ بدون إعادة الحرف؟

$$A_m^k = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{3.2.1!}{1!} = 6$$

<u>3- التوافيق</u>

التوافيق هي الطرق التي تختار بها عددا معينا k من عناصر المجموعة معينة m دون النظر إلى الترتيب، و بعبارة أخرى:

الطرق التي تقسم بها مجموعة من العناصر المميزة إلى مجموعتين تحتوي إحداهما عددا معينا من العناصر و تحتوي الأخرى بقية العناصر دون النظر إلى ترتيب تلك العناصر أي من المجموعتين

حيث أن تشكيل التوفيقة يختلف عن تشكيل التبديلة، من حيث أنه في التوفيقة لا تأخذ بعين الاعتبار ترتيب العناصر

مثال: ما هي عدد التباديل المكونة من $k=2$ التي يمكن تشكيلها من الحروف

$$n = a\,, b\,, c\,, d$$

الحل: من خلال العد المباشر نحصل على 12 تبديلة:

$$P_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4\times 3.2!}{2!} = 12$$

$ab, ac, ad, ba, bc, bd, ca, cb, cd, da, db, dc$

أما عندما نريد حساب عدد التوافيق المكونة من $k=2$ فنحصل على 6 توفيقات فقط هي:

$$ab, ac, ad, \ bc, bd, cb$$

يمكن توضيح العلاقة بين التبديلة والتوفيقة في الجدول التالي:

التوافيق	التبادل
ab	ab, ba
ac	ac, ca
ad	ad, da
bc	bc, cb
bd	bd, db
cd	cd, dc

نلاحظ أن كل توفيقة مكونة من حرفين تحدد $2!=2$ تبديلتين للحروف الموجودة في التوفيقة

و هذا يعين أن عدد التوافيق مضروب في $2!$ يساوي عدد التباديل لـ

$$C_n^k \times 2! = P_n^k$$

و بما أن كل توفيقة لمجموعة n من العناصر مأخوذة k في كل مرة تحدد $k!$ من التبادل نستنتج أن:

$$P_n^k = k!\, C_n^k$$

$$C_n^k = \frac{P_n^k}{k!} = \frac{\frac{n!}{(n-k)!}}{k!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

وبالتالي نحصل على قانون التوفيقة:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

مثال: ما هي عدد اللجان المختلفة المشكلة من 4 أفراد التي يمكن تكوينها من مجموعة متكونة من 10 أشخاص؟

الحل: لدينا $k=4$ و $n=10$, و بتطبيق قانون التوفيقة نحصل على:

$$C_{10}^4 = \frac{10!}{4!(10-4)!} = 210$$ لجنة مختلفة

مثال: إذا كان لدينا 6 رجال و5 نساء ما هي عدد اللجان المشكلة من 5 أشخاص ثلاث رجال وامرأتين التي يمكن تكوينها؟

الحل: بتطبيق قانون التوفيقة نجد:

$$C_6^3 \times C_5^2 = 20 \times 10 = 100$$ لجنة مختلفة

مثال: لدى مخزن مؤسسة "س" 12 حاسوب منها حاسوبان معطلان، تسلم أحدى أقسام المؤسسة 4 حواسيب عشوائيا من هذا المخزن، فأوجد:

- عدم وجود أي حاسوب معطل ضمن ما استلمه هذا القسم.
- وجود حاسوب معطل ضمن ما استلمه هذا القسم.

الحل:

1- عدم وجود أي حاسوب معطل:

$$C_2^0 \times C_{10}^4 = \frac{2!}{0!\,(2-0)!} \times \frac{10!}{4!\,(10-4)!} =$$
$$C_2^0 \times C_{10}^4 = 1 \times \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6!}{4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 6!} =$$
$$C_2^0 \times C_{10}^4 = 210$$

2- وجود حاسوب معطل:

$$C_2^1 \times C_{10}^3 = \frac{2!}{1!\,(2-1)!} \times \frac{10!}{3!\,(10-3)!}$$
$$C_2^1 \times C_{10}^3 = 2 \times \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{3 \times 2 \times 1 \times 7!} = 2 \times 120$$
$$C_2^1 \times C_{10}^3 = 240$$

3-1- خصائص التوفيقات[2]:

- $C_n^k \times C_n^{n-k}$
- $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$
- $C_n^k = \frac{n!}{0!n!} = 1$
- $C_n^k = C_n^{k-1} + C_n^k$
- $C_n^0 = 1$

3-2- صيغة ثنائي الحد لنيوتن:

ليكن a وb عددين حقيقين (أو مركبين) وn عدد طبيعي غير معدوم، فصيغة ثنائي الحد لنيوتن تعطي وفق الصيغة التالية:

[2]- محمد بداوي، **الاحتمالات**، الطبعة الأولى، دار هومه، الجزائر، 2017، ص 24.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_{\mathrm{n}}^{k} a^k b^{n-k}$$

3-3- صيغة ستيرلينغ:

تقريب ستيرلينغ (أو صيغة ستيرلينغ) هي صيغة رياضية تستخدم لتقريب قيم العاملي الكبيرة، وهي صيغة مكافئة للعاملي عندما n يؤول إلى الملانهاية:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}(n/e)^n} = 1$$

وغالبا ما تعطي هذه الكتابة:

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}(n/e)^n$$

الاحتمالات

الاحتمال

1-احتمال حدث مفرد

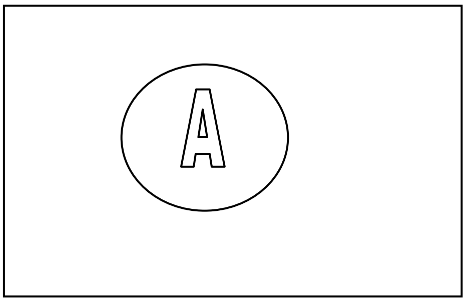
إذا كان الحدث A يمكن أن يحدث بطرق عددها n_{A} من بين نواتج متساوية الفرضية في الوقوع عددها N (n_{A} عدد الحالات الملائمة من النتائج الكلمة للتجربة) فإن احتمال وقوع الحدث A يعرف كما يلي[3]:

$$P(A) = \frac{n_A}{N} = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الممكنة}}$$

حيث $P(A)$: احتمال وقوع الحدث A

n_A: عدد الطرق التي يمكن أن يقع بها A

N: العدد الكلي للنواتج المتساوية الفرصة في الوقوع.



يمكن تصوير الاحتمال باستخدام شكل فن

تمثيل دائرة الحدثA

بينما تمثل المساحة الكلية للمستطيل كل النواتج الممكنة

- تتراوح $P(A)$ بين 0 و 1 $\quad 0 \le P(A) \le 1$
- إذا كان $P(A) = 0$، فإن الحدث A لا يمكن أن يقع
- إذا كانت $P(A) = 1$، فإن الحدث A مؤكد الوقوع
- إذا استخدمنا $P(A^c)$ $P(\overline{A})$ لتمثيل احتمال عدم وقوع الحدث A فإن:

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1$$

مثال: عند إلقاء زهرة نرد على الأرض تكون عدد النتائج الممكنة أو فضاء العينة:

$$\Omega = \{1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6\}$$

المطلوب:

- ما هو احتمال ظهور الأعداد 1، 2، 3، 4، 5، 6؟
- ما هو احتمال ظهور الرقم 8 عند رمي زهرة نرد؟

---

[3]- دومينيك سالفاتور، ترجمة سعدية حافظ منتصر، **الإحصاء والاقتصاد القياسي**، سلسلة ملخصات شوم، الطبعة السادسة، الدار الدولية للإستثمارات الثقافية، 2012، ص 42.

- ما هو احتمال ظهور عدد أصغر من 7 عند رمي زهرة نرد؟
- ما هو احتمال عدم ظهور العدد 1؟

الحل:

- **احتمال ظهور الأعداد 1، 2، 3، 4، 5، 6:**

$P(3) = \frac{n_3}{N} = \frac{1}{6}$، $P(2) = \frac{n_2}{N} = \frac{1}{6}$ ، $P(1) = \frac{n_1}{N} = \frac{1}{6}$

$P(6) = \frac{n_6}{N} = \frac{1}{6}$، $P(5) = \frac{n_5}{N} = \frac{1}{6}$ ، $P(4) = \frac{n_4}{N} = \frac{1}{6}$

أي النواتج متساوية الفرصة في الحدوث (في الوقوع)

- **احتمال ظهور الرقم 8 عند رمي زهرة نرد:**

$$P(8) = \frac{n_8}{N} = \frac{0}{6} = 0$$

لي هو 8 حدث المستحيل: هو الحدث المستحيل وقوعه مهما أعدنا التجربة

- **احتمال ظهور عدد أصغر من 7 عند رمي زهرة نرد:**

$$P(n < 7) = \frac{n_6}{N} = \frac{6}{6} = 1$$

$P(n < 7)$ هو الحدث الأكبر و نقول أنه أكيد إذا كان يتكون من جميع الحوادث البسيطة المرتبطة بالتجزئة

- **احتمال عدم ظهور العدد 1:**

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

حيث:

$P(\bar{A})$: هو احتمال عدم الوقوع.

$P(A)$: هو احتمال وقوع الحدث.

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

$$P(\bar{1}) = 1 - P(1) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

2-احتمال الأحداث المتعددة:

كقاعدة عامة في نظرية الاحتمالات: الرمز∪ يقرأ اتحاد ويكون محل "أو" ل (+)، والرمز∩ يقرأ تقاطع ويكون محل "و" أي (x)

2-1-قاعدة جمع الأحداث المتنافية:

يعتبر الحدثان A وB متنافيان بالتبادل إذا كان وقوع A يحجب (يمنع) وقوع B و العكس بالعكس (العكس صحيح) وبالتالي يكون:

$$P\left(A \text{ أو } B\right) = P(A) + P(B)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

مثال: ما هو احتمال الحصول على الرقم 4 أو 6 عند رمي زهرة نرد؟

لدينا احتمال الحصول على أي حادث من النتائج الممكنة هو:

$$P(1) = P(2) = P(3)P(4) = P(5) = P(6) = \frac{1}{6}$$

$$P(4 \cup 6) = P(4) + P(6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6}$$

2-2- قاعدة جمع الأحداث غير المتنافية:

يعتبر الحدثان A وB غير متنافيان إذا كان وقوع A لا يمنع وقوع الحادث B و العكس صحيح وبالتالي يكون:

$$P\left(A \text{ أو } B\right) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

و نطرح قيمة $P(A \cap B)$ حتى نتجنب حسابهما مرتين.

مثال: ما هو احتمال الحصول على عدد فردي أو أولي عند رمي زهرة نرد؟

الحل: عدد الحالات الممكنة فضاء هذه التجربة

$$\Omega = \{1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6\}$$

نفترض أنه عند ظهور عدد فردي هو الحادث A

$$\mathrm{A} = \{1 , 3 , 5\}$$

وعند ظهور عدد أولي هو الحادث B

$$\mathrm{B} = \{1, 2 , 3 , 5\}$$

ومنه يمكن القول أن الحدثين A و B هما حدثين غير متنافيين لأنه يمكن أن يكون العدد فردي و أولي في نفس الوقت و بالتالي يكون:

$$A \cap B = (1, 3 , 5)$$

$$P(A) = \frac{3}{6}$$

$$P(B) = \frac{4}{6}$$

$$P(A \cap B) = \frac{3}{6}$$
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$= \frac{3}{6} + \frac{4}{6} - \frac{3}{6} = \frac{4}{6}$$

3-الأحداث المستقلة والاحتمالات الشرطية

3-1-قاعدة الضرب للأحداث المستقلة:

يعتبر الحدثان A و B مستقلين، إذا كان وقوع A غير مرتبط بأي طريقة بوقوع B (أي وقوع الحادث A لا يؤثر في وقوع الحادث B)، و بالتالي يكون الاحتمال المشترك للحدثين A و B هو:

$$P\left(A \text{ و } B\right) = P(A \cap B) = P(A).P(B)$$

مثال: نتائج رمي قطعتي نقود متتاليتين هي حوادث مستقلة، لأن نتائج رمي قطعة نقود الأولى لا يؤثر عن نتائج رمي قطعة نقود الثانية

إذا رمزنا للصور ب H وإلى الكتابة بـ T :

$$\Omega_1 = \{H_1, T_1\}$$
$$\Omega_2 = \{H_2, T_2\}$$

فإن احتمال ظهور الصور هو:

$$P(H_1 \cap H_2) = P(H_1).P(H_2)$$
$$= \frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

3-2-قاعدة الضرب للأحداث غير المستقلة: أي الاحتمال الشرطي

إن دراسة الاحتمال الشرطي تعني إيجاد احتمالات حوادث معينة إذا علم تحقق حوادث أخـرى، وهذا يعني حساب احتمال حادث ما إذا علم حدوث حادث آخر.

إذن الاحتمال الشرطي للحادث B إذا علم A هو:

$$P(^{A}/_{B}) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

(و يقرأ حدوث الحادث B علما أن الحادث A قد تحقق)

هذا يعني أن احتمال الشرطي الحادث B ، إذا علم الحادث A هي النسبة بين احتمال حدوث

A و B و احتمال حدوث A لأن A أصبحت فضاء العينة الجديدة و احتمال حدوث B بعد تحديدها بمعلومة حدوث A هو حدوث الحادث المشترك بين A و B

مثال: إذا كانت لدينا تجربة تتمثل في رمي زهرة نرد، إذا كان العدد الظاهر زوجي

– أحسب احتمال أن يكون أولي؟

الحل: لدينا عدد الحالات الممكنة هو:

$$\Omega = \{1\ ,2\ ,3\ ,4\ ,5\ ,6\}$$

نفترض أنه عند ظهور عدد زوجي هو الحدث A وعند ظهور عدد أولي هو الحادث B

$$B = \{1, 2\ ,3\ ,5\} \qquad\qquad A = \{2\ ,4\ ,6\}$$

وبالتالي يكون:

$$A\ \cap B = \{2\}$$

$$P\left({}^{\mathrm{B}}/_{A}\right) = \frac{P(A\ \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{1}{3}$$

طريقة ثانية: لنفترض أن A من فضاء العينة الجديد

$$\mathrm{A} = \{2\ ,4\ ,6\}$$

احتمال ظهور عدد أولي (B) من المجموعة A

$$P\left({}^{\mathrm{B}}/_{A}\right) = \frac{1}{3}$$

4– نظرية الاحتمال الكلي، نظرية بايز

4–1– الاحتمال الكلي:

لتكن Ω مجموعة أساسية و لتكن $\mathrm{A_1, A_2, A_3, \cdots, A_k, \cdots}, A_\mathrm{n}$ تجزئة المجموعة Ω و ليكن B حدث عشوائي كيفي من المجموعة الأساسية Ω

نسحب بصفة عشوائية عنصرا من المجموعة الأساسية Ω، فما احتمال أن يكون هذا العنصر ينتمي إلى المجموعة B؟

نقوم بحساب احتمال تحقق الحدث B بدلالة الأحداث $\mathrm{A_1, A_2, A_3, \cdots, A_k, \cdots}, A_\mathrm{n}$

نلاحظ أن الأحداث $\mathrm{A_1, A_2, A_3, \cdots}, A_\mathrm{n}$ أحداث متنافية مثنى مثنى أي أن:

$$\mathrm{A_i} \cap \mathrm{A_j} = \emptyset\ , \forall i \neq j$$

وأن:

$$A_1 \cup \mathrm{A_2} \cup \cdots \cup \mathrm{A_k} \cup \mathrm{A_n} = \Omega$$

و بتطبيق قاعدة الجمع للأحداث المتنافية

$$\mathrm{P}_{(A_1 \cup \mathrm{A_2} \cup \cdots \cup \mathrm{A_k} \cup \mathrm{A_n})} = \mathrm{P(A_1)} + \mathrm{P(A_2)} + \cdots + \mathrm{P(A_k)} + \cdots + (A_\mathrm{n})$$

كما أن هذا يستلزم:

$$(\mathrm{A_i} \cap \mathrm{B}) \cap (\mathrm{A_i} \cap \mathrm{B}) = \emptyset\,, \forall i \neq j$$

$$\mathrm{B} = [(\mathrm{A_1} \cap \mathrm{B}) \cup (\mathrm{A_2} \cap \mathrm{B}) \cup (\mathrm{A_3} \cap \mathrm{B}) \cup \cdots \cup (\mathrm{A_k} \cap \mathrm{B}) \cup \cdots \cup (\mathrm{A}_n \cap \mathrm{B})]$$

$$\Longrightarrow P(B) = \mathrm{P}[(\mathrm{A_1} \cap \mathrm{B}) \cup (\mathrm{A_2} \cap \mathrm{B}) \cup (\mathrm{A_3} \cap \mathrm{B}) \cup \cdots \cup (\mathrm{A_k} \cap \mathrm{B}) \cup \cdots \cup (\mathrm{A}_n \cap \mathrm{B})]$$

بتطبيق قاعدة الجمع للأحداث المتنافية:

$$\mathrm{B} = (\mathrm{A_1} \cap \mathrm{B}) \cup (\mathrm{A_2} \cap \mathrm{B}) \cup (\mathrm{A_3} \cap \mathrm{B}) \cup \cdots \cup (\mathrm{A_k} \cap \mathrm{B}) \cup \cdots \cup (\mathrm{A_m} \cap \mathrm{B})$$

$$\Rightarrow P(B) = \sum_{\mathrm{i}=1}^{n} P(\mathrm{A_i} \cap \mathrm{B})$$

لدينا:

$$P(\mathrm{A_i} \cap \mathrm{B}) = P(\mathrm{A_i})\mathrm{P}\left({}^{\mathrm{B}}/_{\mathrm{A_i}}\right)$$

$\mathrm{A_i} \cap \mathrm{B}$ / :أحداث غير مستقلة (قاعدة الضرب للأحداث غير المستقلة)

بالتعويض في المعادلة أعلاه نجد:

$$P(B) = \textstyle\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} (\mathrm{A_i})\mathrm{P}\left({}^{\mathrm{B}}/_{\mathrm{A_i}}\right)$$

$$\Longrightarrow P(B) = \mathrm{P(A_1)}.\mathrm{P}\left({}^{\mathrm{B}}/_{\mathrm{A_1}}\right) + (\mathrm{A_2}).\mathrm{P}\left({}^{\mathrm{B}}/_{\mathrm{A_2}}\right) + (\mathrm{A_3}).\mathrm{P}\left({}^{\mathrm{B}}/_{\mathrm{A_3}}\right) + \cdots + (\mathrm{A_k}).\mathrm{P}\left({}^{\mathrm{B}}/_{\mathrm{A_k}}\right) + \cdots + (\mathrm{A}_n).\mathrm{P}\left({}^{\mathrm{B}}/_{\mathrm{A_n}}\right)$$

$$\Rightarrow P(B) = \textstyle\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} (\mathrm{A_i})\mathrm{P}\left({}^{\mathrm{B}}/_{\mathrm{A_i}}\right)$$

العلاقة الأخيرة تسمى بالاحتمال الكلي

يعرف **الاحتمال الكلي** بأنه لا يتحقق الحادث B إلا بتحقيق أحد الحوادث المتنافية

$\mathrm{A_1}, \mathrm{A_2}, \cdots\,,\ A_\mathrm{n}$ التي تشكل تجزئة المجموعة الكلية Ω

مثال: لدينا صندوقان /، // ، الصندوق / به خمس (05) كريات بيضاء و ثلاث (03) كريات سوداء، في حين يضم الصندوق // ثلاث (03) كريات بيضاء، و سبع (07) كريات سوداء.أختير أحد الصندوقين عشوائيا و سحب منه كرية.

المطلوب: ما احتمال أن تكون الكرية المسحوبة بيضاء؟

الحل:

نرمز لـ A_1: حدث الصندوق المختار هو الصندوق /

A_2: حدث الصندوق المختار هو الصندوق //

B : حدث أن تكون الكرية المسحوبة بيضاء

$$\Rightarrow P(B) = P(A_1).P\left({}^{B}/_{A_1}\right) + (A_2).P\left({}^{B}/_{A_2}\right)$$

$$P(A_1 \ \cap B) + P(A_2 \ \cap B)$$

احتمال أن تكون اختيار الصندوق / $= P(A_1)$

$$\Omega \ = \{A_1 \ , A_2\}$$

$$P(A_1) = \frac{1}{2}$$

احتمال أن تكون الكرة البيضاء من الصندوق / $P\left({}^{B}/_{A_1}\right)$

$$A_1 = \left\{3 \text{ سوداء}, 5 \text{ بيضاء}\right\}$$

$$P\left({}^{B}/_{A_1}\right) = \frac{5}{8}$$

إذن احتمال أن تكون الكرة من الصندوق / و تكون بيضاء

$$P(A_1).P\left({}^{B}/_{A_1}\right) = \frac{1}{2}.\frac{5}{8}$$

احتمال أن تكون الكرة البيضاء من الصندوق / $P\left({}^{B}/_{A_1}\right)$

$$A_1 = \left\{3 \text{ سوداء}, 5 \text{ بيضاء}\right\}$$

$$P\left({}^{B}/_{A_1}\right) = \frac{5}{8}$$

إذن احتمال أن تكون الكرة من الصندوق / و تكون بيضاء

$$P(A_1).P\left({}^{B}/_{A_1}\right) = \frac{1}{2}.\frac{5}{8}$$

احتمال أن تكون الكرة البيضاء من الصندوق // $P(A_2)$

$$P(A_2) = \frac{1}{2}$$

احتمال أن تكون الكرة من الصندوق // $P\left({}^{B}/_{A_2}\right)$

$$A_2 = \left\{7 \text{ سوداء}, 3 \text{ بيضاء}\right\}$$

$$\mathrm{P}\left({}^{\mathrm{B}}/_{\mathrm{A}_2}\right) = \frac{3}{10}$$

إذن احتمال أن تكون الكرة المسحوبة بيضاء

$$P(B) = \mathrm{P}(\mathrm{A}_1).\mathrm{P}\left({}^{\mathrm{B}}/_{\mathrm{A}_1}\right) + (\mathrm{A}_2).\mathrm{P}\left({}^{\mathrm{B}}/_{\mathrm{A}_2}\right)$$
$$= \left(\frac{1}{2}\right).\left(\frac{5}{8}\right) + \left(\frac{1}{2}\right).\left(\frac{3}{10}\right) = \frac{37}{80} = 0.4625$$

بيضاء من الصندوق الأول أو الثاني أو الاتحاد ∪ (+)

$$P(B) = \frac{1}{2}.\frac{5}{8} + \frac{1}{2}.\frac{3}{10} = \frac{37}{80} = 0.4625$$

مثال: في مصنع الإنتاج قطع الغيار، الإنتاج موزع على ثلاث آلات، حيث الآلة الأولى تغطي نسبة 45% من الإنتاج، مقابل 30% للآلة الثانية، 25% للآلة الثالثة

كما أن نسبة الإنتاج غير مطابقة لمعايير الجودة هو 5% من إنتاج الآلة الأولى، مقابل 7% للآلة الثانية و 10% للآلة الثالثة، نسحب عشوائيا قطعة غيار من إنتاج هذا المصنع.

المطلوب: ما احتمال أن تكون القطعة المسحوبة غير مطابقة لمعايير الإنتاج؟

الحل: نفرض أن:

A_1: حدث أن تكون القطعة المسحوبة من إنتاج الآلة (1)

A_2: حدث أن تكون القطعة المسحوبة من إنتاج الآلة (2)

A_3: حدث أن تكون القطعة المسحوبة من إنتاج الآلة (3)

B : حدث أن تكون القطعة المسحوبة غير مطابقة للمواصفات

$$P(B) = \mathrm{P}(\mathrm{A}_1).\mathrm{P}\left({}^{\mathrm{B}}/_{\mathrm{A}_1}\right) + (\mathrm{A}_2).\mathrm{P}\left({}^{\mathrm{B}}/_{\mathrm{A}_2}\right) + (\mathrm{A}_3).\mathrm{P}\left({}^{\mathrm{B}}/_{\mathrm{A}_3}\right)$$
$$= (0.45).(0.05) + (0.30).(0.07) + (0.25).(0.10) = 0.0685$$

4-2- نظرية بايز Bayes

هذه النظرية تعتبر من أهم مبرهنات نظرية الاحتمالات حيث تهتم بكيفية حساب الاحتمال الشرطي للحوادث المتنافية التي تشكل مجموعة كلية و موافقة للحدث المراد حسابه انطلاقا من نفس شروط التجربة في الاحتمال الكلي بعد السحب العشوائي لعنصر من المجموعة Ω وجدنا أنه ينتمي إلى المجموعة B (أي يحقق الحدث B).

الآن نبحث عن احتمال أنه ينتمي إلى المجموعة A_1 (يحقق الحدث A_1) في هذه الحالة تكون بصدد التحدث عن الاحتمال الشرطي.

حيث يمكن أن نعبر عنه كالتالي: ما احتمال تحقق A_j (المجموعة j) بشرط أن الحدث B قد تحقق و الذي يرمز له كما رأينا سابقا $P\left({}^{A_1}/_{B}\right)$ و التي يحسب بالعلاقة التالية:

$$P\left({}^{A_j}/_{B}\right) = \frac{P(A_j \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_j)\,.\,P\left({}^{B}/_{A_j}\right)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i).\,P\left({}^{B}/_{A_i}\right)}$$

مثال: لدينا 3 آلات T . M . F حيث تنتج كل آلة 60%، 30% ، 10% على التوالي و أن الإنتاج الفاسد هو 3% ، 5% ، 7% على الترتيب

فرضنا أننا اخترنا قطعة بطريقة عشوائية، فوجدناها فاسدة:

المطلوب:

- ما هو احتمال أن تكون القطعة المسحوبة فاسدة؟
- ما هو احتمال أن تكون القطعة المسحوبة الفاسدة من إنتاج الآلة F؟
- ما هو احتمال أن تكون القطعة المسحوبة الفاسدة من إنتاج الآلة T؟

الحل: نفرض أن:

A_1: حدث أن تكون القطعة المسحوبة من إنتاج الآلة F

A_2: حدث أن تكون القطعة المسحوبة من إنتاج الآلة M

A_3: حدث أن تكون القطعة المسحوبة من إنتاج الآلة T

B : حدث أن تكون القطعة المسحوبة فاسدة

- **حساب احتمال أن تكون القطعة المسحوبة الفاسدة من إنتاج الآلة F**

$$P\left({}^{A_1}/_{B}\right) = \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)}$$

$$= \frac{P(A_1).\,P\left({}^{B}/_{A_1}\right)}{P(A_1).\,P\left({}^{B}/_{A_1}\right) + P(A_2).\,P\left({}^{B}/_{A_2}\right) + P(A_3).\,P\left({}^{B}/_{A_3}\right)}$$

- **حساب الاحتمال الكلي (احتمال أن تكون القطعة المسحوبة فاسدة)**

$$P(B) = P(A_1).\,P\left({}^{B}/_{A_1}\right) + (A_2).\,P\left({}^{B}/_{A_2}\right) + (A_3).\,P\left({}^{B}/_{A_3}\right)$$

$$P(B) = (0.60).(0.03) + (0.30).(0.05) + (0.10).(0.07) =$$

$$P\left({}^{A_1}/_{B}\right) = \frac{P(A_1).P\left({}^{B}/_{A_1}\right)}{P(A_1).P\left({}^{B}/_{A_1}\right) + P(A_2).P\left({}^{B}/_{A_2}\right) + P(A_3).P\left({}^{B}/_{A_3}\right)}$$

$$= \frac{(0.60).(0.03)}{(0.60).(0.03) + (0.30).(0.05) + (0.10).(0.07)}$$

$$P\left({}^{A_1}/_{B}\right) = 0.45$$

- **احتمال أن تكون القطعة المسحوبة الفاسدة من إنتاج الآلة T**

$$P\left({}^{A_3}/_{B}\right) = \frac{P(A_3 \cap B)}{P(B)}$$

$$= \frac{P(A_3).P\left({}^{B}/_{A_3}\right)}{P(A_1).P\left({}^{B}/_{A_1}\right) + P(A_2).P\left({}^{B}/_{A_2}\right) + P(A_3).P\left({}^{B}/_{A_3}\right)}$$

$$= \frac{(0.10).(0.07)}{(0.60).(0.03) + (0.30).(0.05) + (0.10).(0.07)}$$

$$P\left({}^{A_3}/_{B}\right) = 0.775$$

5-شجرة الاحتمال

إن شجرة الاحتمال هي إحدى الطرق المناسبة لحساب احتمال حادث معين E إذا كان هذا الحادث يتأثر من قبل حوادث متعددة تمثل تقسيمها لفضاء العينة، حيث:

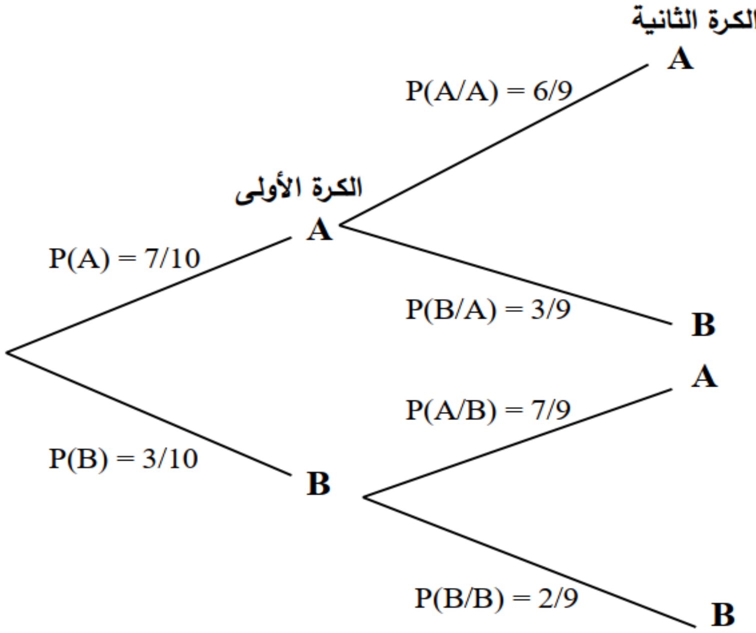
- تمثل فضاء العينة بأصل الشجرة
- تمثل تقسيم فضاء العينة بفروع الشجرة
- تمثل تقسيم كل فرع بفروع جديدة وهكذا

ويستفاد من شجرة الاحتمال أيضا في تمثيل التجربة الإحصائية المتعددة المراحل وتعيين احتمال كل فرع من فروع الشجرة التي مثلت تلك التجربة

مثال: كيس يحتوي على 3 كرات سوداء و7 كرات بيضاء، لنفرض اننا سحبنا منه كرتين كل على حده وبدون إعادة، فإذا رمزنا إلى سحب كرة بيضاء بالرمز A وإلى سحب كرة سوداء بالرمز B فإن الحالات المركبة التي نحصل عليها تتمثل بما يلي:

- الكرتان بيضاوان AA
- الأولى بيضاء والثانية سوداء AB
- الأولى سوداء والثانية بيضاء BA
- الكرتان سوداوان BB

احتمالات النتائج لسحب الكرة الأولى ثم الثانية بالترتيب يمكن إيضاحها بالرسم التالي:



وهكذا فإن الاحتمال المركب يمكن حسابه كما يلي:

احتمال ان تكون الكرة الأولى بيضاء والثانية بيضاء = احتمال ان تكون الأولى بيضاء مضروبا في احتمال أن تكون الثانية بيضاء بشرط أن تكون الأولى بيضاء.

$$P(A \cap A) = P(A\,,A) = P(A)\,P(A/A)$$

$$P(A \cap A) = \frac{7}{10} \times \frac{6}{9} = \frac{42}{90}$$

وبنفس الطريقة:

$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B/A) = \frac{7}{10} \times \frac{3}{9} = \frac{21}{90}$$

$$P(B \cap A) = P(B)\,P(A/B) = \frac{3}{10} \times \frac{7}{9} = \frac{21}{90}$$

$$P(B \cap B) = P(B)\,P(B/B) = \frac{3}{10} \times \frac{2}{9} = \frac{6}{90}$$

مثال: إذا كان 0.40 من المدخنين في مدينة ما يفضلون نوع من السجاير A والباقين يفضلون النوع B وإذا كن النساء يمثلن 0.30 من بين الذين يفضلون A و0.40 من بين الذين يفضلون B، فإذا إخترنا بطريقة عشوائية أحد المدخنين وكانت امرأة،

المطلوب: فما هو احتمال أن تكون ممن يفضلون النوع A ؟

الحل:

$$P(A \cap A) = P(A\,, A) = P(A)\,P(A/A)$$

لنفرض ان الاحتمالات هي:

$P(A)$ احتمال ان المدخن يفضل النوع A

$P(B)$ احتمال ان المدخن يفضل النوع B

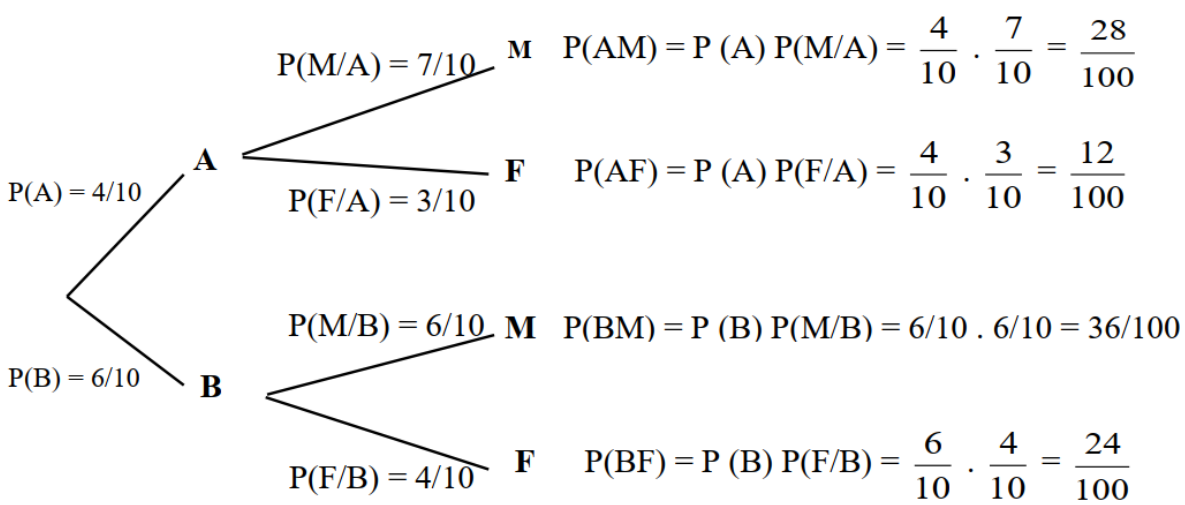
$P(M/A)$ إحتمال ان المدخن رجلا بشرط أن النوع A هو المفضل

$P(M/B)$ احتمال ان المدخن رجلا بشرط أن النوع B هو المفضل

$P(F/A)$ احتمال ان المدخن امرأة بشرط أن النوع A هو المفضل

$P(F/B)$ احتمال ان المدخن امرأة بشرط أن النوع B هو المفضل

احتمالات الحالات الممكنة يوضحها الشكل التالي:



وبإستخدام قاعدة بايز:

$$P(A/F) = \frac{P(AF)}{P(AF) + P(BF)} = \frac{(12/100)}{(12/100) + (24/100)}$$

$$P(A/F) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

المتغيرات العشوائية

1-تعريف المتغير العشوائي Random Variable:

يعتبر X متغيرا عشوائيا إذا كان كل حدث من الأحداث العشوائية البسيطة المختلفة لتجربة عشوائية معينة يرتبط بقيمة واحدة فقط من قيم X الممكنة[4]. وتنقسم المتغيرات العشوائية إلى قسمين: المتغيرات العشوائية المتقطعة (المنفصلة) والمتغيرات العشوائية المستمرة (المتصلة).

2-المتغيرات العشوائية المتقطعة (المنفصلة) Discrete Random Variables

2-1-تعريف المتغيرات العشوائية المتقطعة (المنفصلة)

المتغير العشوائي المتقطع هو المتغير الذي يأخذ عددا من القيم يمكن عدها، لا تقبل التجزئة وتكون منتمية إلى الأعداد الصحيحة مثلا 0، 1، 2، 3،... ومن امثلة المتغيرات العشوائية المتقطعة عدد الأطفال في أسرة ما، عدد المرضى في عيادة أحد الأطباء، عدد المصابيح الكهربائية التالفة من إنتاج أحد المصانع، عدد حوادث السيارات التي تحدث في طريق ما.

2-2-قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المنفصل

إذا كان X متغير عشوائي منفصل، يمكن أن يأخذ القيم التالية:

$$\Omega = \{x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n\}$$

كما أن احتمال ظهور أي قيمة من x_i هو p_i ، وبالتالي فإن قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X يكتب فب الجدول التالي:

x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
p_i	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

حتى يكون قانون احتمالات لابد من تحقق الشرطين التالين:

$$\begin{cases} 0 \leq p_i \leq 1 \\ \sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \end{cases}$$

[4]- محمد شامل بهاء الدين فهمي، **الإحصاء بلا معاناة المفاهيم مع التطبيقات بإستخدام برنامج SPSS**، الجزء الأول، الطبعة الأولى، مكتبة الملك فهد الوطنية ، السعودية، 2005، ص 259.

مثال: تتمثل تجربة في رمي 3 قطع نقدية على الأرض، إذا كان X متغير عشوائي يمثل عدد الصور الظاهرة H.

المطلوب: أوجد القانون الاحتمالي للمتغير العشوائي X؟

الحل:

X متغير عشوائي يمثل عدد الصور الظاهرة H، فإنه يأخذ القيم التالية 0، 1، 2، 3 حيث أن كل قيمة ترتبط باحتمال معين.

لدينا عدد الحالات الممكنة (فضاء العينة):

$$\Omega = \{(HHH),(HHT),(HTT),(HTH),(THH),(THT),(TTH),(TTT)\}$$

$$P(X=0) = \{(TTT)\} = \frac{1}{8}$$

$$P(X=1) = \{(HTT),(THT),(TTH)\} = \frac{3}{8}$$

$$P(X=2) = \{(HHT),(HTH),(THH)\} = \frac{3}{8}$$

$$P(X=3) = \{(HHH)\} = \frac{1}{8}$$

وبالتالي يمكن وضع قانون توزيع الاحتمالي للمتغير X في الجدول التالي:

x_i	0	1	2	3	المجموع
p_i	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

3-المتغيرات العشوائية المستمرة (المتصلة) Continous Random Variable

3-1-تعريف المتغيرات العشوائية المستمرة (المتصلة):

المتغير العشوائي المتصل هو المتغير الذي يأخذ عددا إلى ما لا نهاية (عددا غير محدود) من القيم الممكنة داخل مجاله، وتكون قيمه مستمرة بدون انقطاع وتقبل التجزئة، والأمثلة على ذلك تشمل وزن مجموعة من الطلبة، الأعمار، الأطوال، دخل الأسرة... الخ.

3-2- دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي المستمر

إذا كان X يمثل لنا متغير عشوائي مستمر، فإن قانون الاحتمالي يكون في شكل دالة رياضية تدعى بدالة الكثافة الاحتمالية ونرمز لها بالرمز $f(x)$ ، وحتي يكون X قانون توزيع احتمال، لا بد أن تحقق دالة الكثافة الاحتمالية $f(x)$ الشرطين التالين:

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ dx = 1 \end{cases}$$

ملاحظات:

- إحتمال أن يكون المتغير العشوائي X محصور بين قيمتين هما a و b بحيث $a < b$ يكون من خلال حساب تكامل دالة الكثافة الإحتمالية في المجال $[a، b]$، أي أن:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\ dx$$

- إحتمال أن يكون المتغير العشوائي X مساويا إلى القيمة a يساوي الصفر لأن:

$$P(X = a) = \int_a^a f(x)\ dx = 0$$

- إحتمال أن يكون $a < X < b$ هو نفسه $a \leq X \leq b$ وذلك في المتغير المستمر فقط:

$$P(a \leq X \leq b) = P(a < X < b) = \int_a^b f(x)\ dx$$

مثال: إذا كانت المدة الزمنية التي يستغرقها الطالب في إتمام الإمتحان (مدته القانونية ساعة واحدة)، عبارة عن متغير عشوائي مستمر X، دالة كثافته الاحتمالية معرفة كما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x^2 + x & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{خلافا لذلك} \end{cases}$$

المطلوب: تحقق من $f(x)$ دالة كثافة إحتمالية ؟

الحل:

الشرط الأول محقق، وهو أن تكون دالة الكثافة موجبة، لأن مجال تعريف الدالة موجب وهو $\left[0، 1\right]$ أي أن:

$$f(x) \geq 0 \qquad\qquad 0 \leq x \leq 1$$

الشرط الثاني:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\ dx + \int_{0}^{1} f(x)\ dx + \int_{1}^{+\infty} f(x)\ dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ dx = 0 + \int_{0}^{1} \left(\frac{3}{2}x^2 + x\right)\ dx + 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ dx = \frac{3}{2}\int_{0}^{1} x^2\ dx + \int_{0}^{1} x\ dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ dx = \frac{3}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ dx = \frac{3}{2}\left[\frac{(1)^3}{3} - \frac{(0)^3}{3}\right] + \left[\frac{(1)^2}{2} - \frac{(0)^2}{2}\right] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ dx = 1$$

إذن فإن الدالة $f(x)$ دالة كثافة إحتمال.

4- المميزات العددية للمتغير العشوائي

4-1-القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي:

إذا كانت قيم المتغير العشوائي X هي $x_1, x_2, \cdots$ وكات إحتمالات كل قيمة على التوالي[5]:

$$P(X = x_1), P(X = x_2), \cdots\cdots, P(X = x_n)$$

فإن القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي والتي سنرمز لها بالرمز E(X) يكن إيجادها على النحو التالي:

$$E(X) = x_1 P(X = x_1) + x_2 P(X = x_2), \cdots\cdots + x_n P(X = x_n)$$

وبصيغة المجموع تصبح القيمة المتوقعة على النحو التالي:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i)$$

وتسمى القيمة المتوقعة E(X) بالمتوسط المركزي وبإختصار يرمز لها بالرمز μ

خصائص التوقع الرياضي:

- القيمة المتوقعة للعدد الثابت C هي نفسها C أي: $E(C) = C$
- ليكن X متغيرا عشوائيا وليكن b وa ثابتان فإن:

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

- لتكن $\mu = E(X)$ هي الوسط الحسابي للمتغير العشوائي X فإن:

$$E(X - \mu) = 0$$

4-2-تباين المتغير العشوائي:

إن التباين والانحراف المعياري وهما مقياسان أساسيان لقياس مقدار التغير بين قيم المشاهدات ووسطها الحسابي وسنرمز للتباين يالرمز $V(X)$ أو σ_x^2 وعليه سنعرف التباين بالعلاقة التالية:

$$V(X) = E[(X - \mu)^2]$$

[5]- عزام عبد الرحمن صبري، **الإحصاء التطبيقي بنظام SPSS**، **الطبعة الأولى**، الدار المنهجية للنشر، الأردن، 2014، ص 153.

أما الانحراف المعياري والذي سنرمز له بالرمز σ_x سيكون هو الجذر التربيعي الموجب للتباين وعليه فإن:

$$\sigma_x = \sqrt{V(X)}$$

إن تباين المتغير العشوائي X والذي قيمته $\mu = E(X)$ هو:

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$V(X) = E(X^2) - \mu^2$$

حيث:

$$E(X^2) = \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 P(X = x_i)$$

خصائص التباين:

- إذا كان X متغيرا عشوائيا تباينه $V(X)$ وكان C عدد ثابت فإن:

- $V(X + C) = V(X)$
- $V(CX) = C^2 V(X)$

- إذا كان الوسط الحسابي لمتغير عشوائي μ وتباينه σ فإن المتوسط الحسابي للمتغير العشوائي $X^* = \frac{X-\mu}{\sigma}$ هو:

- $E(X^*) = 0$
- $V(X^*) = 1$

5-دالة التوزيع:

إذا كان المتغير العشوائي X وكان x عدد حقيقي وكان الحدث:

$$(X \leq x) = \{\Omega : X(\Omega) \leq x\}$$

فإن احتمال الحدث $P(X \leq x)$ مرتبط بقيمة X وبصيغة أخرى هو دالة المتغير X وتسمى هذه الدالة باسم دالة التوزيع للمتغير العشوائي X (دالة التوزيع التجميعي).ويرمز له بالرمز $F_x(X)$ أو $F(X)$ وعليه فإن:

$$F(X) = P(X \leq x)$$

ولكل قيمة X فإن $0 \leq F(X) \leq 1$

اما إذا كان المتغير العشوائي X منفصلا فإن دالة التوزيع تصبح على النحو

$$F(X) = \sum_{n \leq X} P(n)$$

أما إذا كان المتغير العشوائي X متصلا فإن دالة التوزيع لهذا المتغير العشوائي تكتب بالصيغة التالية:

$$F(X) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

خواص دالة التوزيع:

تتمتع دالة التوزيع بالخواص التالية[6]:

- $\lim_{x \to -\infty} F(X) = 0 \quad , \quad \lim_{x \to +\infty} F(X) = 1$

وهنا اخذ $R_X = \{-\infty < X < +\infty\}$

- الدالة $F(X)$ دالة متزايدة بالنسبة للمتغير X يعني:

لكل $x_1 < x_2$ فإن $F(x_1) < F(x_2)$

- إذا كان $x_1 < x_2$ فإن:

$$P(x_1 < X < x_2\ ) = F(x_1) - F(x_1)$$

- إن دالة التوزيع للمتغير العشوائي المنفصل X هي أيضا منفصلة.
- إن دالة التوزيع للمتغير العشوائي المتصل X هي أيضا متصلة ويمكن كتابة ذلك:

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

- إذا كانت $F(x)$ هي دالة التوزيع للمتغير العشوائي المتصل أو المنفصل فإن:

$$P(X > x) = 1 - P(X \leq x) = 1 - F(X)$$

مثال: إن الدالة الاحتمالية للمتغير العشوائي المنفصل X معطاة بالعلاقة التالية:

$$P(X) = \begin{cases} \frac{1}{55}x & , \quad x = 1, 2, \cdots, 10 \\ 0 & \text{لقيم } X \text{ الأخرى} \end{cases}$$

[6]- عزام عبد الرحمن صبري، **مرجع سبق ذكره**، ص 167.

المطلوب:

1− اوجد دالة التوزيع للمتغير العشوائي X.

2− بإستخدام دالة التوزيع أوجد:

$P(X > 2)$ ، $P(X \leq 3)$ ، $P(2 \leq X \leq 4)$

الحل:

من تعريف دالة التوزيع فإن:

$$F(X) = \sum_{n=1}^{x} P(n) = \sum_{n=1}^{x} \frac{1}{55}.n = \frac{1}{55}\sum_{n=1}^{x} n$$
$$= \frac{1}{55}\frac{x(x+1)}{2} = \frac{x(x+1)}{110}$$

وعليه يمكن كتابة دالة التوزيع على النحو التالي:

$$\mathrm{F(X)} = \begin{cases} 0 & , \ \mathrm{x} < 1 \\ \dfrac{\mathrm{x(x+1)}}{110} & , \ \mathrm{x} = 1, 2, \cdots, 10 \\ 1 & , \mathrm{x} \geq 10 \end{cases}$$

التوزيـع الاحتمالي Probability distribution

1- تعريف: التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي هو عبارة عن كل الاحتمالات المختلفة المرتبطة بكل القيم الممكنة للمتغير العشوائي، وينقسم التوزيع الاحتمالي إلى توزيع احتمالي متقطع يرتبط بالمتغيرات المتقطعة، وتوزيع احتمالي متصل يرتبط بالمتغيرات المتصلة.

2- التوزيع الإحتمالي للمتغيرات العشوائية المنفصلة

2-1-توزيع برنولي:

عندما نجري التجربة مرة واحدة أي في الحالة $n = 1$ فقيمة x إما أن تكون 0 (أي النتيجة $\mathscr{F}$) أو مساوية 1 (أي النتيجة s) ونعلم بالفرض[7]:

$$p(s) = p \quad و \quad p(f) = q$$

أي أن:

$$P(x=0) = q \quad و \quad P(x=1) = p$$

ويكون جدول التوزيع الاحتمالي المطلوب:

x	1	0
$P(X = x_i)$	p	q

يدعى التوزيع الاحتمالي في هذه الحالة التوزيع الثنائي النقطي (أو توزيع برنولي).

تعريف: نقول أن المتغير العشوائي x التوزيع الثنائي النقطي (أو توزيع برنولي) وسيطه p إذا كانت له دالة الاحتمال:

$$P(X = x_i) = p^x q^{1-x} \quad ; \quad x = 0, 1 \quad ; \quad q = 1 - p$$

توقع وتباين التوزيع الثنائي النقطي (أو توزيع برنولي):

مبرهنة: إذا كان x متغيرا عشوائيا له توزيع برنولي وسيطه p فإن:

- $\mu = E(X) = p$
- $\sigma^2 = V(X) = pq$

البرهان:

- من تعريف متوسط المتغير عشوائي فإن:

[7]- عزات عمر قاسم، **مبادئ الاحتمالات والإحصاء**، منشورات جامعة دمشق كلية العلوم، سوريا، 1994، ص 96.

$$\mu = E(X)$$

$$\mu = \sum_{x} x\,f(x) = (0)(q) + (1)(p)$$

$$\mu = p$$

2) **التباين:**

$$\sigma^2 = V(X)$$

$$\sigma^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$\sigma^2 = (0^2)(q) + (1^2)(p) - p^2$$

$$\sigma^2 = p - p^2$$

$$\sigma^2 = p(1-p)$$

$$\sigma^2 = pq$$

2-2-التوزيع الثنائي (توزيع ذي الحدين):

لنبحث الآن عن دالة الاحتمال للمتغير العشوائي x في الحالة العامة حيث يكون عدد التكرارات المستقلة n اختياريا ولنعين الاحتمالات الموافقة للقيم $x = 0,1, \dots \dots n$ وبملاحظة أن الحدث $[X = x]$ يوافق وقوع x نجاحا و $n - x$ فشلا ونلاحظ أن كل حدث ابتدائي يوافق x نجاحا و $n - x$ فشلا يقع باحتمال:

$$p^x q^{n-x}$$

أما عدد هذه الأحداث الابتدائية التي كل منها يحتوي علي x نجاحا وعلى $n - x$ فشلا فهو يساوي عدد التبديلات الممكنة لمجموعة تحوي n عنصرا منها x عنصرا متماثلا من النوع s و $n - x$ عنصرا متماثلا من النوع $\mathscr{F}$ وهو يساوي:

$$C_n^x = \frac{n!}{x!\,(n-x)!}$$

وباستخدام قانون جمع الاحتمالات نجد:

$$p(X = x) = C_n^x p^x q^{n-x} \qquad x = 0,1, \dots \dots n$$

تعريف: نقول عن متغير عشوائيx أنه يتوزع وفق التوزيع الثنائي (ذي الحدي) بوسطين n ، p ونكتب باختصار $X \sim b(x\ ;\ n\ ,\ p)$ إذا كانت له دالة الاحتمال (دالة الكثافة الاحتمالية) التالية:

$$x = 0,1, \dots \dots n$$

$$p(X = x) = b(x\ ;\ n\ ,\ \quad p) = C_n^x p^x q^{n-x}$$

$$0 < p < 1\ ; q = 1$$

ويمكن ملاحظة أن:

- $b(x\ ;\ n\ ,\ p) = \frac{\mathrm{n!}}{\mathrm{x!(n-x)!}} \mathrm{p^x q^{n-x}} \geq 0$
- $\sum_{x=0}^{1} b(x\ ;\ n\ ,\ p) = \sum_{x=0}^{1} C_n^x p^x q^{n-x}$

منشور ثنائي حد نيوتن $= (p+q)^2 = 1^2 = 1$

مثال: إذا كان احتمال أن يصيب رام الهدف 0.7 فإذا صوب الرامي نحو الهدف 6 طلقات.

المطلوب:

- ما هو احتمال أن يصيب الهدف ثلاث طلقات؟
- ما هو احتمال أن يصيب الهدف بطلقة واحدة على الأقل؟

الحل: نلاحظ أن تجربة التصويب نحو الهدف هي تجربة برنولية (إصابة أو عدم إصابة) والاطلاق 6 مرات يعني تكرارا للتجربة بشكل مستقل 6 مرات ويكون احتمال النجاح في كل مرة p=0.7 فإذا دل x على عدد الطلقات التي تصيب الهدف فإن لـ x التوزيع الثنائي بوسطين n=6 ، p=0.7 ويكون له دالة الاحتمال:

$$b(x\ ,6\ ,0\ ,7) = C_6^x (0.7)^2 (0.3)^2 \qquad ,x = 0,1, \dots \dots 6$$

- **احتمال أن يصيب الهدف ثلاث طلقات:**

$$p(X = 3) = b(x\ ,6\ ,0\ ,7) = \frac{\mathrm{n!}}{\mathrm{x!\ (n-x)!}} (0.7)^2 (0.3)^2 = 0.185$$

- **احتمال أن يصيب الهدف بطلقة واحدة على الأقل:**

$$p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0)$$

لكن: $p(X = 0) = b(0\ ,6\ ,0\ ,7) = C_6^0 (0.7)^0 (0.3)^6$

$$= (0.3)^6 = 0.0007$$

$$p(X \geq 1) = 1 - 0.0007 = 0.9993$$

توقع المتغير العشوائي الثنائي وتباينه:

إذا كان x متغير عشوائيا له توزيع الثنائي بوسيطين n ، p فإن:

- $\mu = E(X) = np$
- $\sigma^2 = V(X) = npq$

2-3-توزيع بواسون:

يستخدم توزيع بواسون في التجارب التي تكون نتيجتها وقوع الحدث موضع الاهتمام عددا صحيحا من المرات خلال وحدة زمنية محددة (مثل الدقيقة أو الساعة أو اليوم...الخ) أو على وحده أو منطقة محددة من الحيز (مثل الطول أو المساحة)، بينما يستخدم توزيع ثنائي الحدين لمعرفة عدد مرات وقوع الحدث موضع الاهتمام في عدد محدد من الاختبارات، ومن أمثلة تطبيقات توزيع بواسون[8]:

1- المسائل التي تحتاج إلى الانتظار أو المرتبطة بالزمن مثل:

- عدد حوادث السير في أسبوع بمدينة ما.
- عدد القطارات التي تغادر المحطة في الساعة.
- عدد المراجعين في أحد مراكز الخدمة في اليوم.
- عدد المكالمات الهاتفية التي يتلقاها الراديوتاكسي في الدقيقة.

2- المسائل التي ترتبط بمناطق الفراغ أو الحيز مثل المسائل المرتبطة بمراقبة الجودة ومنها:

- عدد العيوب الموجودة في قطعة قماش محددة المساحة.
- عدد العيوب الموجودة في سلك للهاتف طوله كيلومتران.
- عدد الأخطاء المطبعية في الصفحة التي ترتكبها إحدى السكرتيرات.

وهكذا فإن المتغير البواسوني هو متغير يأخذ قيمة من القيم صفر أو 1 أو 2 أو ... في فترة زمنية متصلة أو حيز أو منطقة متصلة، ويجب أن يحقق الشروط الثلاثة التالية:

- عدد مرات النجاح مستقلة في فترتين متتاليتين من الزمن أو منطقتين متصلتين من الحيز.

[8] -خالد زهدي مصطفى خواجه، **مبادئ وأساسيات الاحتمالات**، الطبعة الأولى، دائرة المكتبة الوطنية، الأردن، 2022، ص 156.

- إحتمال النجاح خلال فترة قصيرة من الزمن أو منطقة صغيرة من الحيز يتناسب مع طول هذه الفترة أو منطقة هذا الحيز.
- إحتمال نجاحين أو اكثر خلال فترة زمنية قصيرة أو منطقة من الحيز صغيرة يكون صغيرا جدا بحيث يمكن إهماله.

والتوزيع الاحتمالي لمتغير بواسون العشوائي يدعي بتوزيع بواسون ويعطي حسب التعريف التالي:

إذا كان X هو متغير بواسون العشوائي وإن القيم الممكنة ل X هي 0،1،2،... فإن التوزيع الإحتمالي ل X يدعى بتوزيع بواسون. ويعطى بالصيغة التالية:

$$p(x\,,\lambda) = p[X = x] = \frac{e^{\lambda}\lambda^{x}}{x!}$$

حيث:

$x = 0,1,2, \dots$

e : ثابت قيمته 2.71828

λ : متوسط عدد مرات النجاح في الفترة الزمنية أو منطقة الحيز.

مثال: ليكن متوسط عدد المكالمات الهاتفية التي يتلقاها قسم ما بين الساعة العاشرة والساعة الحادية عشر هو 1.8 مكالمة في الدقيقة.

المطلوب: حساب احتمال أن يكون لدينا بين الساعة 10.53 و 10.54:

1- عدم وجود أي مكالمة هاتفية.

2- مكالمة هاتفية واحدة.

3- مكالمتان هانفيتان.

4- ثلاث مكالمات هاتفية على الأقل.

الحل: إن عدد المكالمات الهاتفية x هو متحول عشوائي بواسوني وسيطه $\lambda - 1.8$ وتكون له دالة الاحتمال التالية:

$$p(x\,,1.8) = p[X = x] = e^{-1.8}\frac{(1.8)^{x}}{x!} \qquad ,x = 0,1,2, \dots \dots$$

- **احتمال عدم تلقي أي مكالمة:**

$$p(0\,,1.8) = e^{-1.8}\frac{(1.8)^{0}}{x!} = 0.16529$$

- احتمال تلقي مكالمة واحدة:

$$p(1\,,1.8) = e^{-1.8}\,\frac{(1.8)^1}{x!} = 0.29752$$

- احتمال تلقي مكالمتين:

$$p(2\,,1.8) = e^{-1.8}\,\frac{(1.8)^2}{x!} = 0.26776$$

– احتمال تلقي ثلاث مكالمات على الأقل:

$$p[x\ \geq 3] = 1 - p[x \leq 2]$$

$$= 1 - p(x=0) + p(x=1) + p(x=2)$$

$$= 1 - 0.16529 + 0.29752 + 0.26776 = 0.27123$$

2-4- تقريب التوزيع الثنائي بتوزيع بواسون:

مبرهنة: ليكن x_n متغيرا عشوائيا يتوزع وفق التوزيع الثنائي الذي دالته الاحتمالية:

$$b(x_n, n, p) = \frac{\mathrm{n!}}{\mathrm{x!\,(n-x)!}}\,\mathrm{p^x q^{n-x}}\ \ ; \mathrm{x} = 0,1,2 \ldots \ldots .., \mathrm{n}$$

فإذا كان n و p يتحولان بحيث يبقى $\lambda = np$، حيث λ ثابت موجب.

فإن:

$$\lim_{n\to\infty} b(x_n, n, p) = \mathrm{p(x\,;\ \lambda)}$$

البرهان:

1) وفقا لتعريف المتوسط فإن:

$$b(x_n, n, p) = \frac{\mathrm{n!}}{\mathrm{x!(n-x)!}}\,\mathrm{p^x\ (1-p)^{n-x}}$$

$$= \frac{\mathrm{n!}}{\mathrm{x!(n-x)!}} * \left(\frac{\lambda}{\mathrm{n}}\right)^{\mathrm{x}} \left(1 - \frac{\lambda}{\mathrm{n}}\right)^{\mathrm{n-x}}$$

$$= \left(1 - \frac{\lambda}{\mathrm{n}}\right)^{\mathrm{n}} \frac{\lambda}{\mathrm{n!}}\,\frac{\mathrm{n(n-1)\ldots\ldots(n-x+1)}}{\mathrm{n^x}}\,\frac{1}{\left(1-\frac{\lambda}{\mathrm{n}}\right)^{\mathrm{n}}}$$

وبملاحظة أن:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\mathrm{n}}\right)^{\mathrm{n}} = e^{-\lambda}$$ (من التحليل الرياضي)

وأن:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-x+1)}{n^{x}}=1$$

لأن كل من البسط والمقام حدودية في n من الدرجة x.

وأن:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n}=1 \qquad \text{(لأن x محدودة).}$$

وهكذا فإذا أخذنا النهاية لطرفين نجد:

$$\lim_{n\to\infty} b(x_n,n,p)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^{x}}{n!}=p(x\,;\,\lambda)$$

تفيدنا المبرهنة السابقة بأن الاحتمالات التي تعطيها دالة الاحتمال البواسونية مساوية تقريبا الاحتمالات التي نعطيها دالة الاحتمال للتوزيع الثنائي (توزيع ذي الحدين) شريطة أن تكون n كبيرة جدا ويكون الجداء np صغيرا نسبيا ويكون التقريب مقبولا من أجل $np<5$ أو $nq<5$.

مثال: إذا كان احتمال أن يعاني شخص من ردة فعل سيء عند حقنه بمصل معين هو 0.001 أوجد احتمال أن يكون من بين 2000 شخص سيحقنون بالمصل:

1- ثلاثة أشخاص سيعانون من رد فعل سيء.

2- أكثر من شخص سيعانون من رد فعل سيء.

الحل: إذا فرضنا أن x يدل على عدد الأشخاص الذين سيعانون من رد فعل سيء من بين 2000 شخص فإنه يكون لـ x التوزيع الثنائي بوسيطين $n=2000$ ،$p=0.001$ ويكون:

- **احتمال أن يكون من بين 2000 شخص سيحقنون بالمصل ثلاثة أشخاص سيعانون من رد فعل سيء:**

$$b(3;2000;0.001)=\frac{2000!}{3!\,1997!}(0.001)^{3}(0.999)^{1997}$$
$$=\frac{2000\times1999\times1998}{6}=(0.001)^{3}(0.999)^{1997}$$

- احتمال أن يكون من بين 2000 شخص سيحقنون بالمصل أكثر من شخص سيعانون من رد فعل سيء:

$$p(X \geq 2) = 1 - p(X \leq 1) = 1 - [p(x=0) + p(X=1)]$$

$$= 1 - [0.13519 + 0.27067] = 0.59414$$

فإذا لاحظنا أن $\lambda = np = (2000)(0.001) = 2 < 5$ وهذا يسمح لنا بتطبيق التوزيع البواسوني كتقريب للتوزيع الثنائي ويكون تقريبا لـ x دالة الاحتمال $p\left(X، 2\right)$ وهكذا نجد:

$$p\left(3، 2\right) = e^{-2}\frac{(2)^3}{3!} = 0.18804 \qquad -1$$

$$p(X \geq 2) = 1 - p(X \leq 1) = 1 - [p(0\,;2) + p(1\,;2)] \ -2$$

$$= 1 - \left[e^{-2}\frac{(2)^0}{0!} + e^{-2}\frac{(2)^1}{1!}\right] = 1 - (0.135 + 0.271) = 0.594$$

وبالمقارنة بين النتائج في الحالتين نكتشف مدى جودة التقريب في هذا المثال.

2-5- القانون الهندسي:

تعد تجارب القانون الهندسي مشابهة لقانون برنولي الذي يفترض بأن نتيجة كل تجربة هي إما نجاح العملية (P) أو فشلها (q)، كما أن عدد المحاولات في القانون الهندسي لا تكون محددة في البداية كما هو الحال في القانون الثنائي.

إذا كان X هو عدد المحاولات جراء التجربة دون توقف حتى يتم الحصول على أول نجاح، وبذلك فإن[9]:

$$P(X = x) = pq^{x-1} \qquad\qquad x \geq 1$$

إن قيمة X محاولة تنتج أول نجاح، يعني هذا أن $(x-1)$ محاولة سابقة تعطي فشل.

التوقع والتباين للقانون الهندسي:

إذا كان X متغير عشوائيا له القانون الهندسي وسيطه p ، فإن:

التوقع الرياضي:

$$E(X) = \frac{1}{p}$$

التباين:

$$V(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

9- محمد بداوي، **مرجع سبق ذكره**، ص99.

مثال: في تجربة حجر نرد، نرمي الحجر حتى يتم الحصول على أحد الأوجه المطلوبة.

المطلوب: -كتابة دالة القانون الاحتمالي للمتغير X .

- ما هو احتمال أن نحتاج إلى 3 محاولات على الأقل حتى نحصل على الرقم 6 على وجه الحجر؟
- ما هو معدل المحاولات التي نحتاجها؟
- أحسب التباين ؟

الحل: احتمال ظهور أي وجه من أوجه الحجر هو:

$$q = \frac{5}{6} \text{،} p = \frac{1}{6}$$

- **دالة القانون الاحتمالي للمتغير X تكون كما يلي:**

$$P(X = x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^{x-1} & x, 1,2 \\ 0 & \text{خلافا لذلك} \end{cases}$$

- **احتمال نحتاج إلى 3 محاولات على الأقل حتى نحصل على الرقم 6 على وجه الحجر**

$$P(X = x) = 1 - P(X < 3)$$
$$P(X = x) = 1 - [P(X = 1) + P(X = 2)]$$
$$P(X = x) = 1 - \left[\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^0 + \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^1\right]$$
$$P(X = x) = \frac{25}{36}$$

- **معدل المحاولات التي نحتاجها هي:**

$$E(X) = \frac{1}{p}$$
$$E(X) = \frac{1}{1/6} = 6$$

- **حساب التباين:**

$$V(X) = \frac{1 - p}{p^2}$$
$$V(X) = \frac{1 - \left(\frac{1}{6}\right)}{\left(\frac{1}{6}\right)^2} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{1}{36}} = 30$$

2-6-القانون فوق الهندسي

درسنا في القانون الثنائي أن التجارب تكون مستقلة عن بعضها البعض، واحتمال النجاح لكل محاولة يساوي مقدار ثابت P ونلاحظ في مثل هذه الحالات تحقق شرطي تجربة برنولي وهما الاستقلال والثبات P.

لكن في حالة السحب بدون إرجاع من مجتمع صغير حجمه N، هذا يعني ان التجارب تكون غير مستقلة، في هذه الحالة يكون القانون الأنسب للتطبيق هو القانون فوق الهندسي.

مثلا: في فرض أن المتغير العشوائي X يمثل عدد الكريات الحمراء داخل كيس به كريات حمراء وكريات من ألوان مختلفة عددها جميعا N كرية، فإذا سحبنا من هذا الكيس n كرية وكان في هذه العينة x كرية حمراء و n−x كرية من لون مختلف، وكانت نسبة الكريات الحمراء في الكيس p ونسبة الكريات المختلفة q=1−p ، فإن عدد الكريات الحمراء في الكيس تساوي $N \times p$ وعدد الكريات المختلفة تساوي $N \times q$ أي أن $N = N.p + N.q$ نرمز إصطلاحا $M = N.p$ و $N - M = N.q$ ، وبإستخدام قاعدة الضرب لطرق العد يمكننا حساب:

- عدد حالات النجاح للحصول علىx كرية حمراء و $n-x$ كرية من لون مختلف:

$$C_M^x C_{N-M}^{n-x}$$

- عدد الحالات الممكنة في الحصول على n عينة متساوية من مجتمع حجمه N به كريات حمراء وكريات من لون مختلف هو:

$$C_N^n$$

مما سبق تكون دالة الاحتمال للقانون فوق الهندسي (القانون الهندسي الزائدي):

الذي وسطاؤه $\mathrm{N, M, n}$ ويرمز له ب: $X \longrightarrow H(N; M; n)$

$$f(x) = P(X = x) = \frac{C_M^x C_{N-M}^{n-x}}{C_N^n} \quad , \quad x = 0,1,\cdots,n$$

حيث:

x : عدد النجاحات

M : عدد العناصر التي ينصب عليها الاهتمام في المجتمع $M=N.P$

N : حجم المجتمع

n : حجم العينة

$p = \frac{M}{N}$: احتمال النجاح

التوقع والتباين للقانون فوق الهندسي:

إذا كان X متغير عشوائيا له القانون فوق الهندسي وسطاؤه N, M, n ، فإن:

- **التوقع الرياضي:**

$$E(X) = \frac{n.M}{N} = n.p$$

- **التباين:**

$$V(X) = \frac{n.M}{N}\left(1 - \frac{n.M}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$$
$$V(X) = n.p(1-p)\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$$
$$V(X) = n.pq\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$$

مثال: في عملية مراقبة الجودة لمنتج معين، تم إنتاج 50 وحدة في ساعة واحدة تم إحصاء 5 وحدات معيبة، سحبت 3 وحدات لاختبار الجودة (بدون إعادة).

المطلوب: أكتب القانون الاحتمالي ل X (حيث X عدد الوحدات المعيبة).

الحل:

إن مجموعة القيم الممكنة للمتغير العشوائي X هي:

$$X = \{0, 1, 2, 3\}$$
$$N = 50 \quad , \quad M = 5 \quad , \quad n = 3$$

واحتمال الحادث $X = x$ يساوي:

$$P(X=x) = \begin{cases} \dfrac{C_5^x C_{45}^{3-x}}{C_N^n} & , \quad x = 0,1,2,3 \\ 0 & \text{خلافا لذلك} \end{cases}$$

بعد الحساب نجد:

$$P(X=0) = 0.726 \ , P(X=1) = 0.2505 \ , P(X=2) = 0.023 \ , P(X=3) = 0.0005$$

3-التوزيعات الاحتمالية المتغيرات العشوائية المتصلة

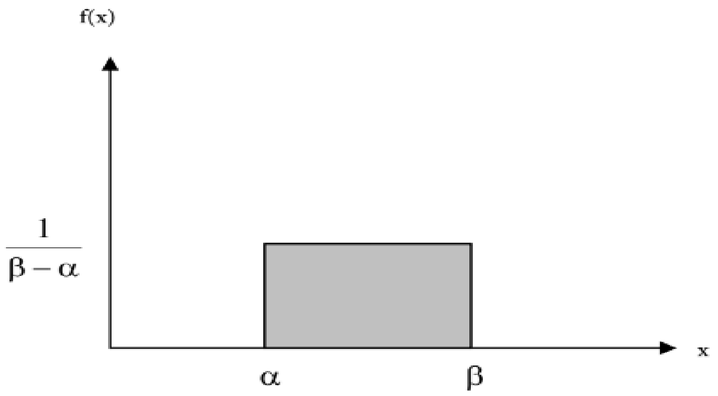
3-1-التوزيع المنتظم: Uniform Distribution

يعد التوزيع المنتظم من التوزيعات الاحتمالية المتصلة المهمة جدا لكثير من التطبيقات في الواقع العملي، إذ يستخدم لحساب الاحتمالات المناسبة لهذه التطبيقات، مثال ذلك: دراسة احتمال وصول البواخر إلى المواني لتفريغ حمولتها وأوقات مغادرتها، ووصول الشاحنات إلى محطة التفريغ.

وبافتراض لدينا متغير عشوائي متصل وليكن ($\times$)، يتوزع وفق التوزيع المنتظم بالمعلمتين (α) و (β)، فإن دالة توزيع الاحتمال [$\mathcal{F}(\times)$] للمتغير العشوائي ($\times$)، تأخذ الشكل الآتي[10]:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta - \alpha} & , a \leq x \leq \beta \\ 0 & , \ 0/_w \end{cases}$$

والشكل التالي يوضح دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع المنتظم:



وغالبا ما يعبر عن التوزيع المنتظم، اختصارا بالاصطلاح الآتي: $\times \sim \text{U}\left(\alpha \text{ ، } \beta\right)$

وهذا يعني أن المتغير العشوائي ($\times$) يتوزع وفق التوزيع المنتظم بالمعلمتين (α) و (β).

ويمكن إيجاد دالة التوزيع التجميعية ($C.D.F$) للتوزيع المنتظم كالآتي:

$$f(x) = p(\times \leq x) = \int_{\alpha}^{x} f(x)dx$$

$$f(x) = p(\times \leq x) = \int_{\alpha}^{x} \frac{1}{\beta - \alpha} dx$$

---

[10]- محمد عبد العالي النعيمي، حسن ياسين طعمة، **الإحصاء التطبيقي**، دار وائل للنشر، الطبعة الأولى، الأردن، 2008، ص 148.

$$f(x) = p(\times \leq x) = \frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{x} dx$$

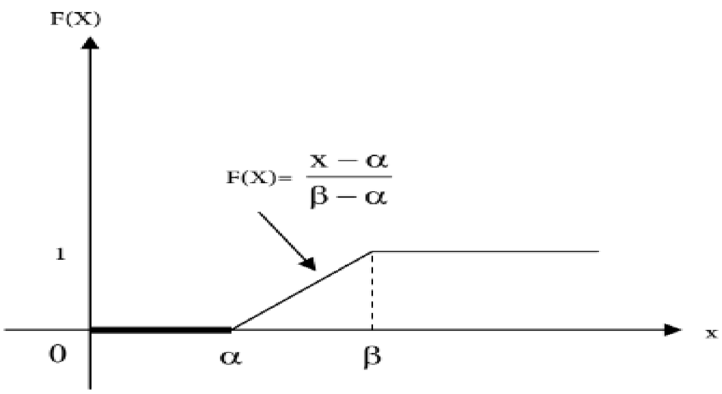
$$f(x) = p(\times \leq x) = \frac{1}{\beta - \alpha} [x]_{\alpha}^{x}$$

$$\therefore f(x) = \frac{x - \alpha}{\beta - \alpha}$$

عليه تكتب دالة التوزيع الاحتمالي التجمعية، بشكلها النهائي، على النحو الآتي:

$$f(x) = p(\times \leq x) = \begin{cases} 0 & , x \leq \alpha \\ \dfrac{x - \alpha}{\beta - 1} & , \ \alpha < x < \beta \\ 1 & , \quad x \geq \beta \end{cases}$$

والشكل التالي، يوضح دالة التوزيع التجميعية $[\mathcal{F}(\times)]$ للتوزيع المنتظم:



خصائص التوزيع الموحد (المنتظم)

إن الوسط الحسابي $(\cup_x)$ والتباين (σ_x^2) والانحراف المعياري (σ_x)، للتوزيع المنتظم، تكتب على النحو الآتي:

- $\mu_x = E(X) = \frac{\alpha+\beta}{2}$
- $\sigma_x^2 = V(X) = \frac{(\beta-\alpha)^2}{12}$
- $\sigma_x = \sqrt{V(X)} = \frac{\beta-\alpha}{\sqrt{12}}$

مثال: لديك المتغير العشوائي المتصل$(\times)$، يتوزع وفق التوزيع المنتظم، بالمعلمتين $\alpha = -2$ و $\beta = 6$

أي أن: $\times \sim \cup \, (-2 \, , 6)$

المطلوب:

1- أكتب دالة الكثافة الاحتمالية (p, d, f) للمتغير العشوائي $(\times)$.

2- أكتب دالة التوزيع التجميعية (C,F,D) للمتغير العشوائي $(\times)$.

3- أحسب قيمة الاحتمالات الآتية:

$$p(x \leq 3) \qquad , \qquad p(X > 2)$$
$$p(-3 < X \leq -1) \qquad , \qquad p(-3 < X \leq 7)$$

الحل:

1-

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta - \alpha} & ,\alpha \leq x \leq \beta \\ 0 & ,\ {}^{0}/_{w} \end{cases}$$

$$\therefore \alpha = -2 \quad ,\beta = 6$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{8} & ,-2 \leq x \leq 6 \\ 0 & ,\ {}^{0}/_{w} \end{cases}$$

2-

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ,x \leq \alpha \\ \dfrac{x - \alpha}{\beta - 1} & ,\ \alpha < x < \beta \\ 1 & ,\quad x \geq \beta \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \leq -2 \\ \dfrac{x + 2}{8} & , \quad -2 < x < 6 \\ 1 & , \quad x \geq 6 \end{cases}$$

3-

- $p(x \leq 3) = f(3) = \frac{3+2}{8}$

$$p(x \leq 3) = 0.62$$

- $p(x > 2) = 1 - p(x \leq 2) = 1 - f(2)$

$$p(x > 2) = 1 - 0.5 \ = 0.5$$

- $p(-3 < x \leq -1) = p(x \leq -1) - p(x \leq -3)$

$$p(-3 < x \leq -1) = F(-1) - F(-3)$$

$$p(-3 < x \leq -1) = \frac{-1+2}{8} - zero = \frac{1}{8}$$

$$p(-3 < x \leq -1) = 0.125$$

$$p(-3 < x \leq 7) = p(x \leq 7) - p(x \leq -3) = F(7) - F(-3)$$

$$p(-3 < x \leq 7) = 1 - zero$$

$$p(-3 < x \leq 7) = 1$$

3-2-توزيع قاما: Gamma Distribution

يعد توزيع كاما من التوزيعات الشائعة الاستخدام في بعض التطبيقات الاحصائية، نذكر منها على سبيل المثال لا الحصر، تقدير دالة المعمولية (Reliablity Function)، دالة البقاء (survival Function)، كما ويعد هذا التوزيع الأساس النظري لتوليد بعض التوزيعات الاحتمالية الخاصة، كالتوزيع الأسي مثلا، من جانب آخر يعالج توزيع قاما عادة المتغيرات العشوائية التي تكون فيها موجبة دائما، والأمثلة على هذا النوع من المتغيرات كثيرة، نذكر منها مثلا: الفترة الزمنية لبقاء الإنسان على قيد الحياة مصاب بمرض عضال، الفترة الزمنية المستغرقة بفحص مريض في إحدى العيادات الطبية، الفترة الزمنية بين وصول باخرتين متتاليتين لأحد أرصفة العقبة ...الخ.

وبافتراض لدينا متغير عشوائي متصل وليكن (x)، يوزع وفق توزيع كاما، فإن دالة التوزيع الاحتمالي له، تأخذ الشكل الآتي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma a} . x^{a-1} e^{-\frac{x}{\beta}} & , \quad x \geq 0 \\ 0 & , \quad 0/w \end{cases}$$

حيث أن:

β، α: تمثل معلمات توزيع كاما، وأن $[\alpha، \beta > 0]$

$\Gamma\alpha$: تمثل دالة قامة (Gamma Distribution).

وتأخذ دالة قاما (Gamma Distribution)، الشكل الآتي:

$$\Gamma\alpha = \int_0^\infty X^{a-1} . e^{-x} dx$$

وبصورة عامة، لدينا العدد (n)،عددا صحيحا موجبا، فإن دالة قاما، تأخذ الشكل الآتي:

$$\Gamma n = (n-1)!$$

وفيما يلي، بعض الحالات الخاصة لدالة قاما:

- $\Gamma 1 = 1$
- $\Gamma_{\frac{1}{2}} = \pi \ , \ \ \pi = 3.14159$

وغالبا ما يعبر عن توزيع قاما، اختصارا بالاصطلاح الآتي: $x \sim G(\alpha, \beta)$

وهذا يعني أن المتغير العشوائي (X)، يتوزع وفق توزيع قاما بالمعلمتين (α) و (β).

ويمكن إيجاد دالة التوزيع التجميعية (C.D.F) لتوزيع قاما كالآتي: $F(X) = P(X \leq x)$

$$F(X) = \int_0^x f(x)dx$$

$$F(X) = \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma\alpha} \int_0^x X^{\alpha-1} . e^{\frac{x}{\beta}} dx$$

خصائص توزيع قاما:

إن الوسط الحسابي (μ_X) والتباين (σ_X^2) والانحراف المعياري σ_X، لتوزيع قاما تكتب على النحو الآتي:

- **التوقع الرياضي:**

$$\mu_x = E(X) = \alpha\beta$$

- **التباين:**

$$\sigma_x^2 = V(X) = \alpha\beta^2$$

- **الإنحراف المعياري:**

$$\sigma_x = \sqrt{V(X)} = \beta\sqrt{\alpha}$$

مثال: إذا كان لديك المتغير العشوائي المتصل (X)، يمثل الفترة الزمنية لعمل ماكنة إنتاجية (بالسنوات)، وله دالة التوزيع الاحتمالي الآتية:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{4}.e^{-\frac{x}{2}} & , \quad x \geq 0 \\ 0 & , \quad 0/_w \end{cases}$$

المطلوب:

–أثبت أن دالة التوزيع الاحتمالي أعلاه، هي دالة كثافة احتمالية.

–ما هو احتمال أن تستمر الماكنة بالعمل مدة (10) سنوات أخرى على الأكثر؟

–أحسب متوسط عمر الماكنة $(\mu_{\times})$ والتباين (σ_{χ}^{2}).

الحل:

– إثبات أن الدالة $[f(x)]$، هي دالة كثافة احتمالية (p, d, f) :

لإثبات أن الدالة $[f(x)]$، هي دالة كثافة احتمالية (p, d, f)، ينبغي أن تحقق الدالة الخاصيتين التاليتين:

$a) \quad f(x) \geq 0 \ , \ [\forall x \ , x \geq 0]$

$b) \quad \int_0^{\infty} f\,(x)dx \ = \int_0^{\infty} \frac{x}{4}.e^{\frac{x}{2}}dx$

$\int_0^{\infty} f\,(x)dx \ = \frac{1}{4}\int_0^{\infty} x\,.e^{\frac{x}{2}}dx$

لحل التكامل أعلاه، نقوم باستخدام قاعدة التكامل $\int udv$، وعلى النحو الآتي:

$\int udv = uv - \int udv$

$Let\ u = x \Rightarrow \ du = dx$

$Let\ dv = e^{\frac{x}{2}} \Rightarrow \quad \int dv = \int e^{\frac{x}{2}}\,dx \Rightarrow \quad v = -2e^{\frac{x}{2}}$

$\int_0^{\infty} f\,(x)dx \ = \frac{1}{4}\int_0^{\infty} x\,.e^{\frac{x}{2}}dx$

$= \frac{1}{4}\left[-2xe^{\frac{x}{2}}I_0^{\infty} - \int_0^{\infty}\left(-2e^{\frac{x}{2}}\right)\right]dx$

$= \frac{1}{4}\left[0 + 2\int e^{\frac{x}{2}}\,dx\right]$

$$= 0 + \frac{1}{2}\left[-2e^{-\frac{x}{2}}I_0^{\infty}\right]$$

$$= -[0 - 1]$$

$$\int_0^{\infty} f\,(x)dx = 1$$

إذن دالة التوزيع الاحتمالي $[f(x)]$، هي دالة كثافة احتمالية (p, d, f).

– احتمال أن تستمر الماكنة بالعمل مدة (10) سنوات أخرى على الأكثر:

$$p(x \leq 10) = \int_0^{10} f(x)dx$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{10} .\, e^{-\frac{x}{2}}dx$$

$$= \frac{1}{4}\left[-2e^{-\frac{x}{2}}I_0^{\infty} + 2\int_0^{10} e^{-\frac{x}{2}}dx\right]$$

$$p(x \leq 10) = \frac{1}{4}\left\{-20e^{-5} + 2[-2e^{-\frac{x}{2}}I_0^{10}\right\}$$

$$= \frac{1}{4}[-20(0.007) - 4(e^{-5} - 1)]$$

$$= \frac{1}{4}[(0.14) - 4(0.007 - 1)]$$

$$= \frac{1}{4}[(0.14) - 4(0.993)]$$

$$= \frac{1}{4}[-0.14 + 3.972]$$

$$= \frac{1}{4}(3.832)$$

$$= 0.958$$

–حساب متوسط عمر الماكنة ($\mu_{\times}$) والتباين (σ_{χ}^2) :

$$\mu_x = \alpha\beta$$

$$= 2(2)$$

$$= 4year$$

$$\sigma_x^2 = \alpha\beta^2$$

$$= 2(2)^2$$

$$= 8year^2$$

3-3-التوزيع الأسي: Exponential Distribution

يعد التوزيع الأسي حالة خاصة من توزيع قاما، عندما $(\alpha = 1)$، ويستخدم هذا التوزيع لمعالجة بعض التطبيقات الإحصائية الخاصة بالمتغيرات العشوائية، مثال ذلك (تقدير دالة معولية والمكائن والآلات، مدة البقاء لبعض الأجزاء الالكترونية، طول فترة الانتظار في صف انتظار عند الإشارة الضوئية، طبيعة البيانات المتعلقة بدرجات حرارة العظمى والصغرى المسجلة من قبل دائرة الإنواء الجوية)

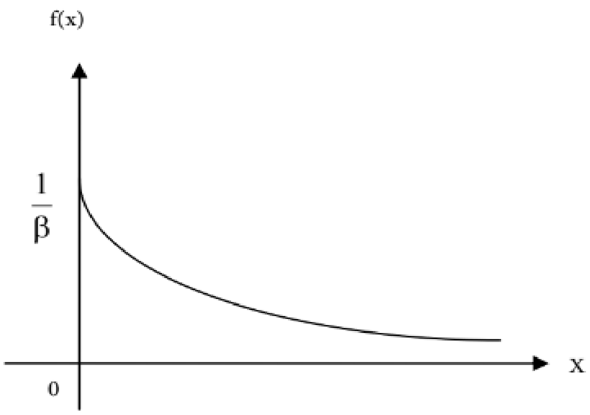
وبافتراض لدينا متغير عشوائي متصل وليكن (x)، يتوزع وفق التوزيع الأسي، فإن دالة التوزيع الاحتمالي له تأخذ الصيغة التالية:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta}.e^{-\frac{x}{\beta}} & , \quad x \geq 0 \\ 0 & , \quad 0/_w \end{cases}$$

وغالبا ما يعبر عن التوزيع الأسي، اختصارا بالاصطلاح الآتي: $X \sim Exp.(\beta)$

وهذا يعني أن المتغير العشوائي (x)، يتوزع وفق التوزيع الأسي بالعملة (β).

والشكل التالي: يوضح دالة الكثافة الاحتمالية $[f(x)]$ للتوزيع الأسي:



ويمكن إيجاد دالة التوزيع التجميعية (C.D.F) لتوزيع الأسي، كالآتي: $F(X) = P(X \leq x)$

$$F(X) = \int_0^x f(x)dx$$

$$= \frac{1}{\beta}\int_{0}^{x} e^{\frac{x}{\beta}}dx$$

$$F(X) = \frac{1}{\beta}\left[-\beta e^{-\frac{x}{\beta}} I_0^x\right.$$

$$F(X) = -\left[e^{-\frac{x}{\beta}} - 1\right]$$

$$F(X) = 1 - e^{-\frac{x}{\beta}}$$

خصائص التوزيع الأسي:

إن التوقع الرياضي $(\mu_\times)$ والتباين (σ_χ^2) والانحراف المعياري σ_χ، للتوزيع الأسي تكتب على النحو الآتي:

- **التوقع الرياضي:**

$$\mu_x = E(X) = \beta$$

- **التباين:**

$$\sigma_x^2 = V(X) = \beta^2$$

- **الانحراف المعياري:**

$$\sigma_x = \sqrt{V(X)} = \beta$$

مثال: إذا كان لديك المتغير العشوائي المتصل $(\times)$، يمثل مدة البقاء (ساعة) لجزء الكتروني يستخدم في أجهزة التلفاز، وله دالة كثافة احتمالية تأخذ الشكل الآتي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{500} . e^{-\frac{x}{500}} & , \quad x \geq 0 \\ 0 & , \quad 0/_w \end{cases}$$

المطلوب:

- ما هو احتمال أن يعمر هذا الجزء مدة (600) ساعة على الأكثر؟
- ما هو احتمال أن يعمر هذا الجزء مدة (400−600) ساعة؟

– أحسب متوسط عمر الجزء الالكتروني $(\mu_{\times})$ والتباين (σ_{χ}^{2}).

الحل:

- **احتمال أن يعمر هذا الجزء مدة (600) ساعة على الأكثر:**

$$p(X \leq x) = f(x)$$

$$p(x \leq 600) = f(600)$$

$$p(x \leq 600) = 1 - e^{-\frac{600}{500}}$$

$$p(x \leq 600) = 1 - e^{-1.2}$$

$$p(x \leq 600) = 1 - 0.301$$

$$p(x \leq 600) = 0.699$$

- **احتمال أن يعمر هذا الجزء مدة (400–600) ساعة:**

$$p(400 \leq x \leq 600) = p(x \leq 600) - p(x < 400)$$

$$= f(600) - f(400)$$

$$= \left[1 - e^{-\frac{600}{500}}\right] - \left[1 - e^{-\frac{400}{500}}\right]$$

$$= e^{-\frac{400}{500}} - e^{-\frac{600}{500}}$$

$$= e^{-0.8} - e^{-1.2}$$

$$= 0.449 - 0.301$$

$$= 0.148$$

- **حساب متوسط عمر الجزء الالكتروني $(\boldsymbol{\mu}_{\times})$ والتباين $(\boldsymbol{\sigma}_{\chi}^{2})$:**

$$\mu_x = \beta$$

$$= 500hr$$

$$\sigma_x^2 = \beta^2$$

$$= (500)^2$$

$$= 250000hr^2$$

3-4- توزيع بيتا: Beta Distribution

يعد توزيع بيتا من التوزيعات الإحصائية المهمة على مستوى كثير من التطبيقات في الحياة العملية، ويستخدم بشكل واسع في دراسة سلوك بعض المتغيرات العشوائية، مثال ذلك (دراسة طبيعية البيانات المسجلة من قبل دائرة الانواء الجوية والمتعلقة بنسب الرطوبة، أو دراسة معولية الأجهزة والمعدات)

وبافتراض لدينا متغير عشوائي متصل وليكن (x)، يتوزع وفق توزيع بيتا، فإن دالة التوزيع الاحتمالي له تأخذ الشكل الآتي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma\alpha + \beta}{\Gamma\alpha\Gamma\beta} x^{-a-1}(1-x)^{\beta-1} & ,0 \leq \ x \leq 1 \\ 0 & , \ 0/_w \end{cases}$$

وغالبا ما يعبر عن توزيع بيتا، اختصارا بالاصطلاح الآتي: $X \sim \beta(\alpha, \beta)$

وهذا يعني أن المتغير العشوائي (x)، يتوزع وفق توزيع بيتا بالمعلمتين (α) و (β).

ويمكن إيجاد دالة التوزيع التجميعية (C.D.F) لتوزيع بيتا، كالآتي: $F(X) = P(X \leq x)$

$$\mathrm{F(X)} = \int_0^{\mathrm{x}} \mathrm{f(x)dx}$$

$$\mathrm{F(X)} = \frac{\Gamma\alpha + \beta}{\Gamma\alpha\Gamma\beta} \int_0^{\mathrm{x}} x^{-a-1}(1-x)^{\beta-1}\mathrm{dx}$$

خصائص توزيع بيتا:

إن الوسط الحسابي (μ_x) والتباين (σ_χ^2) والانحراف المعياري σ_χ، لتوزيع بيتا تكتب على النحو الآتي:

- **التوقع الرياضي:**

$$\mu_x = E(X) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$$

- **التباين:**

$$\sigma_x^2 = V(X) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)}$$

- **الانحراف المعياري:**

$$\sigma_x = \sqrt{V(X)} = \frac{1}{\alpha+\beta} * \sqrt{\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta+1}}$$

مثال: إذا كان لديك المتغير العشوائي (×)، يمثل نسبة الرطوبة في مدينة السلط، وله دالة التوزيع الاحتمال الآتية:

$$f(x) = \begin{cases} 30x^2(1-x)^2 & , \quad 0 \le x \le 1 \\ 0 & , \quad 0/_w \end{cases}$$

المطلوب:

- أثبت أن دالة التوزيع الاحتمالي أعلاه، هي دالة كثافة احتمالية.
- ما هو احتمال أن تكون نسبة الرطوبة في المدينة (40%) على الأكثر؟
- ما هو احتمال أن تكون نسبة الرطوبة في المدينة (30%) على الأقل؟
- أحسب القيمة المتوقعة $(\mu_\times)$ والتباين (σ_χ^2) والانحراف المعياري σ_χ.

الحل:

- **إثبات أن دالة التوزيع الاحتمالي أعلاه، هي دالة كثافة احتمالية:**

لإثبات أن دالة التوزيع الاحتمالي، هي دالة كثافة احتمالية (p,d,f)، ينبغي بالدالة أن تحقق الخاصيتين الآتيتين:

$$a)\ f(x_1) \ge 0 \quad , \ [\forall x_1 \ , \quad 0 \le x_1 \le 1]$$

$$b)\ \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 30x^2(1-x)^2 dx$$

$$= 30\int_0^1 x^2\,(1-2x+x^2)dx$$

$$= 30\int_0^1 (x^2-2x^3+x^4)dx$$

$$= 30\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^5}{5} I_0^1\right.$$

$$= 30\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right)$$

$$= 30\left(\frac{1}{30}\right)$$

$$= 1$$

إذن دالة التوزيع الاحتمالي $[f(x)]$، هي دالة كثافة احتمالية (p,d,f).

- احتمال أن تكون نسبة الرطوبة في المدينة (40%)على الأكثر:

$p(x \leq 0.4) = \int_0^{0.4} f(x)dx$

$= \int_0^{0.4} 30x^2(1-x)^2dx$

$p(x \leq 0.4) = 30x^2 \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} I_0^{0.4}\right.$

$= 30x^2 \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} I_0^{0.4}\right.$

$= 30 \left[\frac{(0.4)^3}{3} - \frac{(0.4)^4}{2} + \frac{(0.4)^5}{5}\right]$

$= 30[0.021 - 0.013 + 0.002]$

$= 30(0.01$

$= 0.3$

- احتمال أن تكون نسبة الرطوبة في المدينة (30%) على الأقل:

$p(x \geq 0.3) = 1 - p(x < 0.3)$

$= 1 - \int_0^{0.3} f(x)dx$

$= 1 - 30 \int_0^{0.3} (x^2 - 2x^3 + x^4)dx$

$= 1 - 30 \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^5}{5} I_0^{0.3}\right.$

$= 1 - 30 \left[\frac{(0.3)^3}{3} - \frac{(0.3)^4}{2} + \frac{(0.3)^5}{5}\right]$

$= 1 - 30(0.0054)$

$= 1 - 0.162$

$p(x \geq 0.3) = 0.838$

حساب القيمة المتوقعة $(\mu_\times)$ والتباين (σ_χ^2) والانحراف المعياري σ_χ

$\alpha = 3\,, \qquad \beta = 3$

$$\mu_x = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$$

$$= \frac{3}{3 + 3}$$

$$= 0.5$$

$$\sigma_x^2 = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)}$$

$$\sigma_x^2 = \frac{3(3)}{(3 + 3)^2(3 + 3 + 1)}$$

$$= \frac{1}{28}$$

$$\sigma_x^2 = 0.036$$

$$\mathrm{\sigma_x} = \sqrt{\mathrm{\sigma_x^2}}$$

$$\mathrm{\sigma_x} = \sqrt{0.036}$$

$$\mathrm{\sigma_x} \approx 0.1897$$

أو يمكن إيجاد الانحراف المعياري (σ_x) ، باستخدام العلاقة الآتية:

$$\mathrm{\sigma_x} = \frac{1}{\alpha+\beta} * \sqrt{\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta+1}}$$

$$= \frac{1}{3+3} * \sqrt{\frac{3(3)}{3+3+1}}$$

$$= \frac{1}{6} * \sqrt{\frac{9}{7}}$$

$$= \frac{1}{6} * (1.134)$$

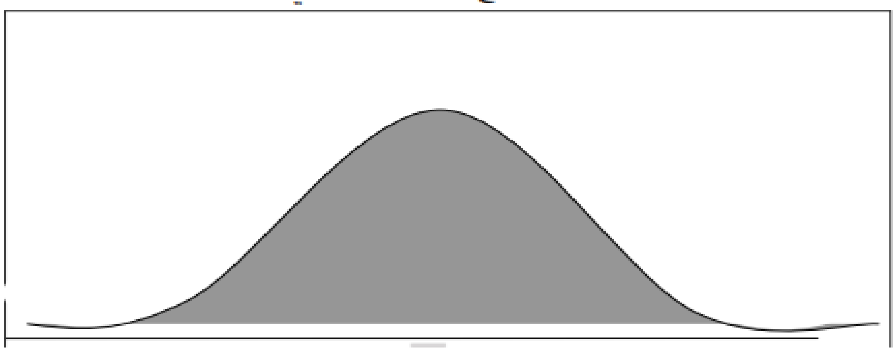
$$= 0.189$$

5-3-التوزيع الطبيعي (جاوس) (The Normal Distribution)

يعتبر التوزيع الطبيعي حجر الأساس للنظرية الإحصائية الحديثة وهو أكثر التوزيعات الإحصائية أهمية واستخداما ويطلق عليه أحيانا "توزيع جاوس" نسبة إلى مكتفة "كارل. جاوس" الذي نشره عام 1733م. ويسمى أحيانا بالتوزيع الجرسي لأنه يشبه الجرس المعكوس كما أن كثيرا من التوزيعات المهمة تشتق منه أو تؤول إليه في حالات معينة. كما يعتبر التوزيع الطبيعي متغيرا عشوائيا متصلا لأن فئته الشاملة تتكون من عدد لا نهائي من القيم الحقيقية التي تختلف عن بعضها البعض بمقادير متناهية في الصغر بحيث يمكن ترتيبها على مقياس متصل[11].

ويمتاز التوزيع الطبيعي بأنه متماثل حول الوسط الحسابي الذي يمثله. ويأخذ المنحنى شكل الناقوس أنر الشكل.

يوضح المنحنى الطبيعي



وفي الحياة العملية توجد العديد من المتغيرات العشوائية المتصلة مثل الأطوال والأوزان والحجوم، ودرجات اختبار الذكاء وأعمار المصابيح الكهربائية وغيرها من الأمثلة التي يأخذ توزيعها في مجتمع كبير شكل التوزيع الطبيعي (المعتدل أو السوي).

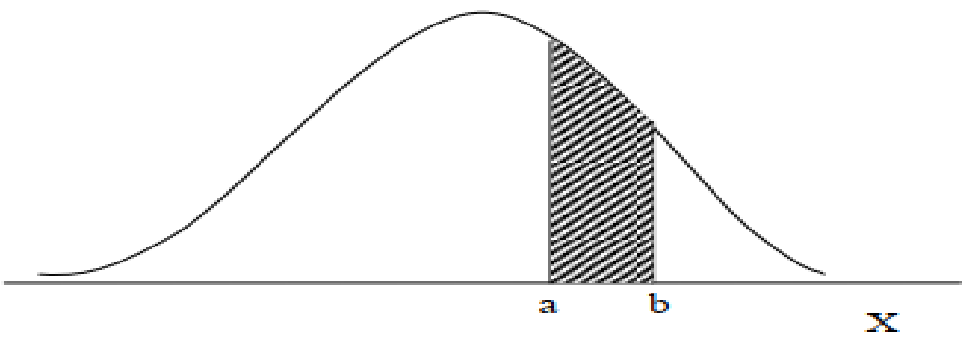
ولقد تبين أن منحنى التوزيع الاحتمالي لأي من المتغيرات العشوائية التي سبق ذكرها وغيرها يقترب شكله من منحنى متصل يشبه الجرس ويسمى بالمنحنى الاعتدالي ''Normal Curve''. وحيث أن المنحنى الاعتدالي هو منحنى توزيع احتمالي متصل، فإن أية نقطة من النقاط الموجودة على هذا المنحنى لا تمثل احتمالا وإنما تمثل قيمة ما تسمى بدالة كثافة الاحتمال ''Probability density function'' عند هذه النقطة وتناظر دالة الاحتمال في المتغيرات العشوائية المنفصلة.

[11]- محمد محمد المزاح، **مبادئ الإحصاء والإحتمالات للعلوم الإدارية والتطبيقية**، جامعة العلوم والتكنولوجيا، الطبعة الثالثة، صنعاء، 2013، ص 260

والاحتمال في التوزيعات المتصلة هو المسافة الموجودة تحت منحنى دالة كثافة الاحتمال المناظرة لفترة ما. وليس لنقطة ما.

نلاحظ في الشكل الموالي أن مساحة المنطقة المظللة المحصورة بين a ,b تساوي احتمال أن يأخذ المتغير العشوائي المتصل X أية قيمة في الفترة من A إلى b أي أنها تساوي P(a<x<b) و الجدير بالملاحظة أن المساحة الكلية

يوضح رسم دالة الكثافة الاحتمالية P(a < x < b)



تحت منحنى دالة كثافة الاحتمال لأي متغير عشوائي متصل تساوي الواحد الصحيح.

وتأخذ دالة كثافة الاحتمالي للتوزيع الطبيعي الشكل التالي:

$$-\infty < x < +\infty$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2} \qquad -\infty < \mu < +\infty$$

$$-\infty < \sigma < +\infty$$

حيث:

π: مقدار ثابت يساوي تقريبا 3.1416

e: قيمة ثابتة (ثابت تنبيري) تساوي 2.7183 تقريبا وهي الأساس للوغاريتم الطبيعي.

μ: الوسط الحسابي لقيم المتغير العشوائي X

σ: الانحراف المعياري

$\mathscr{F}(x)$: ارتفاع المحور العمودي (التكرار) للمنحنى

وتعتمد هذه المعادلة على معلمتي الوسط الحسابي μ والانحراف المعياري σ

خصائص منحنى التوزيع الطبيعي:

- شكله متماثل ويشبه الجرس مرتفع من الوسط ومنخفض بشكل تدريجي عند الطرفين ولكونه متماثل فإن 50% من مساحته تقع إلى يمين المتوسط الحسابي و 50% على يسار المتوسط الحسابي μ.
- يمتد طرفا المنحنى من $-\infty$ إلى $+\infty$ ويكون عدد التكرارات صغيرة عند طرفي المنحنى ولا يلتقيان بالمحور السيني أبدا وتزيد كلما اقتربت من مركز المنحنى.
- المتوسطات تكون متساوية أي أن الوسط الحسابي = الوسيط = المنوال.
- المجموع الكلي للمساحة تحت منحنى التوزيع الطبيعي تساوي الواحد الصحيح.
- تتوزع المساحة تحت المنحنى على المحور الأفقي (العدد الكلي لمفردات العينة المعيارية) كالآتي:

%68.27 تقريبا من مساحة الشكل الموزع طبيعيا تقع بين $\mu \pm \sigma$

%95.45 تقريبا من مساحة الشكل الموزع طبيعيا تقع بين $\mu \pm 2\sigma$

%99.73 تقريبا من مساحة الشكل الموزع طبيعيا تقع بين $\mu \pm 3\sigma$

- يعتمد شكل المنحنى اعتمادا كاملا على معلمتي الوسط الحسابي μ والانحراف المعياري σ.
- التوقع = μ ، التباين = σ^2 ، الانحراف المعياري = σ.

التوزيع الطبيعي المعياري (Standard Normal Distribution):

أن التوزيع الطبيعي يعتمد على معلمتي الوسط الحسابي والانحراف المعياري وأن المجموع الكلي للمساحة تحت منحنى التوزيع الطبيعي تساوي الواحد الصحيح. وقد نحتاج إلى حساب جزء من هذه المساحة والتي تنحصر عادة بأصغر من قيمة ما أو أكبر من قيمة ما، أو المساحة المحصورة بين قيمتين. ولحساب المساحة بين قيمتين ولتكن $\left(x_1 ، x_2\right)$ فإنه يمكن الاستعانة بجداول خاصة بحساب المساحات للتوزيع الطبيعي، إلا أن مثل هذه الجداول سيكون عددها لا نهائي طالما أن متوسط المجتمع وانحرافه المعياري يأخذان قيما كثيرة جدا وأن قيم المتغير العشوائي X لا نهائية أيضا. لذا تم الاستعانة بالجزء الخاص من دالة التوزيع الطبيعي والذي يمثل قوة العدد الأسي وهو $\frac{X-\mu_x}{\sigma_x}$ والذي يمثل القيمة المعيارية Z التي تمت

دراستها في الوحدة الثانية من هذا المقرر، والتي متوسطها (القيمة المعيارية) صفر وتباينها يساوي الواحد الصحيح.

لذا يمكن تحويل قيم المتغير العشوائي المعتدل إلى قيم معيارية أي تحويله إلى متغير عشوائي جديد يسمى بالتوزيع الطبيعي القياسي ويرمز له بالرمز Z (وهو التوزيع الطبيعي الذي وسطه صفر وتباينه واحد) أي أن:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

حيث x: متغير عشوائي طبيعي

μ: الوسط الحسابي للمتغير x

σ: الانحراف المعياري للمتغير x

z: تسمى بالقيمة المعيارية، أما القيمة الاحتمالية لـ z فيتم إيجادها باستخدام الجداول الإحصائية للتوزيع الطبيعي القياسي.

استخدام جدول المساحات تحت المنحنى الطبيعي المعياري:

نظرا لتماثل نصفي المنحنى الطبيعي فإن جدول مساحة المنحنى الطبيعي يظهر عادة نسبة المساحة في النصف الأيمن من المنحنى وهو الجزء الموجب أي الذي يقابل قيمة موجبة للمتغير بعد تحويله إلى قيمة معيارية، وفي الوقت نفسه تكون قيمة (Z) السالبة مطابقة للقيمة الموجبة إلا أنها تقع في النصف الأيسر من المنحنى، وبما أن المساحة تحت المنحنى تساوي واحد صحيح فإن المساحة على يمين الوسط الحسابي للمنحنى تساوي 0.5 وهي المساحة التي تظهر في الجداول الخاصة بالمساحة والتي تبدأ القياس من المنتصف متجهة نحو اليمين حيث تكون المساحة عند الوسط الحسابي تساوي صفرا وتزداد المساحة كلما اتجهنا نحو اليمين أي بزيادة قيمة (Z).

ولتقدير قيمة المتغير (Z) طبقا لهذا الجدول نستخدم قيمة (Z) المطلوبة من الجدول مباشرة وتكون هي قيمة التكرار النسبي أو احتمال أن تقع القيمة بين الوسط الحسابي وقيمة (Z). ولاشك أن هذا الجدول يسهل طريقة الحصول على الاحتمالات بدلالة القيمة المعيارية (Z). والأمثلة الآتية توضح ذلك

مثال: إذا كان لديك المتغير العشوائي X يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط 40 وانحراف معياري 5.

المطلوب: إيجاد القيم المعيارية المقابلة للقيم $x_1 = 45$ ، $x_2 = 35$

الحل:

$x \sim N(40\,,5)$ فإن المتغير العشوائي الذي توزيعه التوزيع الطبيعي المعياري هو:

$$\sigma = 5 \quad , \quad \bar{x} = 40$$

$$z = \frac{x_i - \bar{x}}{\sigma}$$

$$z_1 = \frac{45 - 40}{5} = \frac{5}{5} = 1$$

$$z_2 = \frac{35 - 40}{5} = \frac{-5}{5} = -1$$

وهذه تسمى بالقيم المعيارية كما مر معنا سابقا.

مثال: إذا كان X يمثل توزيعا احتماليا طبيعيا بمتوسط 40 وانحراف معياري 5 فأوجد الاحتمالات الآتية:

$$p(40 \le x \le 45)$$
$$p(50 \le x \le 55)$$
$$p(35 \le x \le 40)$$

الحل:

نحول قيم X للتوزيع الطبيعي إلى قيم Z المعيارية باستخدام الصيغة $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$

$$\boldsymbol{p(40 \le x \le 45)}$$

$$z_1 = \frac{40 - 40}{5} = 0$$

$$z_2 = \frac{44 - 40}{5} = 1$$

$$p(40 \le x \le 45) = p(0 \le z \le 1)$$

يوضح المساحة المطلقة تحت المنحنى

ومن الملحق الخاص بالتوزيع الطبيعي تكون المساحة بين الوسط الحسابي ونقطة تبعد انحراف معياري واحد هي: $p(0 \le z \le 1) = 0.3413$

$$\boldsymbol{p(50 \leq x \leq 55)}$$

$$z_1 = \frac{50-40}{5} = 2$$

$$z_2 = \frac{55-40}{5} = 3$$

$$p(50 \leq x \leq 55) = p(2 \leq z \leq 3)$$

ومعنى ذلك أننا نريد إيجاد المساحة المحصورة ما بين (0.3) وهي :

$$p(0 \leq z \leq 3) = 04987$$

وكذلك المساحة المحصورة بين (0.2) وهي:

$$p(0 \leq z \leq 2) = 04772$$

ويطرح المساحة الثانية من الأولى نحصل على المساحة المطلوبة وهي:

$$p(2 \leq z \leq 3) = 04987 - 0.4772 = 0.0215$$

$$\boldsymbol{p(35 \leq x \leq 40)}$$

$$z_1 = \frac{35-40}{5} = -1$$

$$z_2 = \frac{40-40}{5} = 0$$

$$\therefore p(35 \leq x \leq 40) = p(-1 \leq z \leq 0)$$

$$= p(0 \leq z \leq 1) = 0.3413$$

العزوم والدالة المتجددة للعزوم

1- العزوم Moments:

هناك بعض التوقعات الخاصة تسمى بالعزوم لها استخدامات كثيرة في النظرية الإحصائية، كما يمكن أن نستنتج منها خواص التوزيعات الاحتمالية، فيما يلي نقدم هذا المفهوم[12].

تعريف:

نسمي القيمة $E(x^r)$ بالعزم من درجة r حول نقطة الأصل ويرمز له بالرمز μ'_r أي أن إذا كان x متغيرا متصلا

$$\mu'_r = E(X^r) = \begin{cases} \sum x^r f(x) & , \text{إذا كان } X \text{ متغيرا متصلا} \\ \int x^r f(x)dx & , \text{إذا كان } X \text{ متغيرا متصلا} \end{cases}$$

لاحظ أن:

$$\mu'_0 = 1 \quad , \quad \mu'_1 = \mu \quad , \quad \mu'_2 = \mu^2 + \sigma^2$$

تعريف:

نسمي القيمة $E\{(x-\mu)^r\}$ بالعزم من درجة r حول المتوسط ويرمز له بالرمز μ'_r أي:

$$\mu_r = E\{(x-\mu)^r\} = \begin{cases} \sum (x-\mu)^r f(x) \\ \int (x-\mu)^r f(x)dx \end{cases}$$

لاحظ أن:

$$\mu_0 = 1 \quad , \quad \mu_1 = 0 \quad , \quad \mu_2 = \sigma^2$$

على القارئ أن يستنتج العلاقة بين μ_r ، μ'_r وعلى الأخص يتحقق من أن

$$\mu = \mu'_1$$

$$\mu_2 = \mu'_2 - \mu^2 = \sigma^2$$

$$\mu_3 = \mu'_3 - 3\mu\ \mu'_2 + 2\mu^3$$

---

12 - جلال مصطفى الصياد، **نظرية الاحتمالات**، دار حافظ للنشر والتوزيع، الطبعة السادسة، السعودية، 2008، ص140

$$\mu_4 = \mu_4' - 4\mu\ \mu_3' + 6\mu^2\mu_2' - 3\ \mu^4$$

مثال: إذا كانت x متغيرا عشوائيا دالة كثافته الاحتمالية هي:

$$f(x) = ae^{-ax} \quad , \quad \times \geq 0$$ و a مقدار ثابت

المطلوب: أحسب العزم من درجة r ثم أحسب العزوم الأربع الأولى حول المتوسط.

الحل:

$$\mu_r' = E(X^r) = \int x^r\, f(x)dx$$

$$= a\int_0^\infty x^r\, e^{-ax}dx$$

يوضع u=ax نجد أن

$$\mu_r' = \frac{1}{a^r} = \int_0^\infty \mu^r\, e^{-\mu}du = \frac{\Gamma(r+1)}{a^r} = \frac{r!}{a^r}$$

وعلى ذلك فإن:

$$\mu = \frac{1}{\alpha}\ , \qquad \mu_2' = \frac{2}{\alpha^2}\ , \qquad \mu_3' = \frac{6}{\alpha^3}, \quad \mu_4' = \frac{24}{\alpha^4}$$

$$\sigma^2 = \mu_2 = \frac{2}{\alpha^2} - (\frac{1}{a})^2 = \frac{1}{\alpha^2}$$

$$\therefore \sigma = \frac{1}{2}$$

$$\mu_3 = \frac{6}{a^3} - 3\left(\frac{1}{a}\right)\left(\frac{2}{\alpha^2}\right) + 2 + (\frac{1}{\alpha^2})^2 = \frac{2}{\alpha^3}$$

$$\mu_4 = \frac{24}{a^4} - 4\left(\frac{1}{a}\right)\left(\frac{6}{a^3}\right) + 6 + \left(\frac{1}{\alpha^2}\right) - 3(\frac{1}{\alpha^2})^4 = \frac{9}{\alpha^4}$$

2-دالة توليد العزوم Moment – Generating Function

في كثير من المسائل نجد أن حساب التوقعات يحتاج إلى عمليات جمع أو تكامل متكررة وأحيانا تكون شاقة ومن الصعب حسابها بالطرق العادية.

والآن ندرس طريقة أخرى لحساب العزوم عن طريق تعريف دالة تسمى دالة توليد العزوم وهي تحتاج فقط إلى إجراء عملية تكامل أو جمع واحدة وأحيانا يكون حسابها سهلا ومباشرا بعد ذلك يمكن توليد العزوم من هذه الدالة بتفاضلها أو إيجاد مفكوكها.

ودالة توليد العزوم لتوزيع الاحتمال f(x) هي دالة M(t) معرفة لكل الأعداد الحقيقية t بالعلاقة:

$$M(t) = E(e^{xt})$$

أي أن M(t) هي القيمة المتوقعة للدالة الأسية e^{xt} وعلى ذلك فإن:

$$\mathrm{M(t)} = \begin{cases} \sum \mathrm{e^{xt}}\, f(x) & , \quad \text{إذا كان } X \text{ متغيرا منفصل} \\ \int \mathrm{e^{xt}}\, f(x)dx & , \quad \text{إذا كان } X \text{ متغيرا منفصل} \end{cases}$$

بشرط أن يكون هذا المجموع أو هذا التكامل محدودا.

نقول أن التوزيع الاحتمالي له دالة توليد العزوم إذا وجد عدد حقيقي T بحيث أن M(t) تكون محدودة لكل $|t| \le t$ وفي هذه الحالة يمكن إثبات أن كل العزوم متواجدة ويمكن الحصول عليها بالاشتقاق المتتالي عند t=0 لدالة توليد العزوم، كما أن الدالة يكون لها مفكوك في قوى t.

نعلم أن:

$$\mathrm{M(t)} = E(e^{xt})$$

$$\mathrm{M'(t)} = \frac{d}{dt}M(t) = E\left(\frac{d}{dt}Xe^{xt}\right) = E(Xe^{xt})$$

$$\mathrm{M''(t)} = \frac{d2}{dt^2}M(t) = E\left(\frac{d}{dt}Xe^{xt}\right) = E(X^2e^{xt})$$

$$\mathrm{M}^3(t) = \frac{d3}{dt^3}M(t) = E\left(\frac{d}{dt}X^2e^{xt}\right) = E(X^3e^{xt})$$

$$\vdots$$

$$\mathrm{M^r}(t) = \frac{dr}{dt^r}M(t) = E\left(\frac{d}{dt}X^{r-1}e^{xt}\right) = E(X^re^{xt})$$

$$\mathrm{M}'^{(0)} = E(X) = {\mu'}_1 = \mu$$

$$\mathrm{M''}(0) = E(X^2) = {\mu'}_2$$

$$\mathrm{M}^3(0) = E(X^3) = {\mu'}_3$$

$$\vdots$$

$$\mathrm{M^r}(0) = E(X^r) = \mu'_r$$

أي أن μ'_r هو المشتقة r عند t=0 لدالة توليد العزوم.

كذلك نعلم أن:

$$\mathrm{M(t)} = E(e^{xt})$$

$$= E\left[1 + X\frac{t}{1!} + X^2\frac{t^2}{2!} + \cdots + \ X^r\frac{t^r}{r!} + \cdots\right]$$

$$= 1 + \mu'_1 + \frac{t}{1!} + \mu'_2\frac{t^2}{2!} + \cdots + \ \mu'_r\frac{t^r}{r!} + \cdots$$

أي أن μ'_r هو معامل $t^r/r!$ في مفكوك $\mathrm{M(t)}$

مثال: إذا كانت x متغيرا عشوائيا دالة كثافته الاحتمالية هي:

$f(x) = ae^{-ax}$, $x \geq 0$ و a مقدار ثابت

المطلوب: أوجد دالة توليد العزوم واستنتج منها العزوم بالطرق المختلفة.

الحل:

نعلم أن:

$$\mathrm{\mu'_r} = E(X^r) = \frac{r!}{\alpha^r}$$

$$\mathrm{M(t)} = E(e^{xt})$$

$$= \int_0^\infty a\, e^{xt}e^{-ax}dx$$

$$= a\int_0^\infty e^{-x(a-t)}\, dx$$

$$= a\left[-\frac{e^{-x(a-t)}}{a-t}\right]_0^\infty$$

$$= \frac{a}{a-t} = (1 - \frac{t}{\alpha})^{-1}$$

حيث أن:

$$M(t) = (1 - y_a)^{-1}$$

فإن:

$$M'(t) = \frac{1}{a}(1-\frac{t}{2})^{-2} \rightarrow \mu_1' = M'(0) = \frac{1}{a}$$

$$M''(t) = \frac{1.2}{a^2}(1-\frac{t}{2})^{-3} \rightarrow \mu_2' = M''(0) = \frac{2!}{a^2}$$

$$M^{(3)}(t) = \frac{1.2.3}{a^3}(1-\frac{t}{a})^{-4} \rightarrow \mu_2' = M^{(3)}(0) = 3!/a^3$$

$$M^{(r)}(t) = \frac{r!}{a^r}(1-\frac{t}{a})^{-(r+1)} \rightarrow \mu_r' = M^{(r)}(0) = \frac{r!}{a^r}$$

وكذلك فإن:

$$M(t) = (1 - t/a)^{-1}$$

$$= 1 + \frac{t}{a} + (\frac{t}{a})^2 + \cdots + (\frac{t}{a})^r \ldots$$

حيث أن μ_r' هي معامل $t^r/r!$ في مفكوك دالة توليد العزوم فإن

$$\mu_r' = \frac{r!}{a^r}$$

مثال: إذا كان x متغير عشوائي دالة كثافته الاحتمالية هي:

a مقدار ثابت و $f(x) = 1 \;,\; 0 \leq x \leq 1$

المطلوب: أوجد دالة توليد العزوم و منها أوجد العزم μ_r'

الحل:

نعلم أن:

$$M_x(t) = E(e^{xt})$$

$$= \int_0^1 e^{xt} dx = \left[\frac{e^{xt)}}{t}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{t}[e^t - 1]$$

يمكن كتابة دالة توليد العزوم على النحو الآتي:

$$M_x(t) = \frac{1}{t}\left[\frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \cdots + \frac{t^r}{r!} + \frac{t^{r+1}+1}{(r+1)!} + \cdots\right]$$

$$= 1 + \frac{t}{2!} + \frac{t^2}{3!} + \cdots + \frac{t^r}{r!} + \frac{t^r}{(r+1)!} + \cdots$$

وعلى ذلك فإن:

$$\mu_r' = 1/(r+1)$$

خاصية من خواص دالة توليد العزوم

إذا كان x متغير عشوائي دالة توليد عزومه $M_x(t)$ وكانت $y = aX + b$ فإن:

$$M_y(t) = e^{bt}.\mathrm{M}_x(at)$$

البرهان:

$$M_y(t) = E(e^{yt}) = E\left[\mathrm{e}^{\mathrm{aXt+bt}}\right]$$

$$= e^{bt} = E\left[\mathrm{e}^{\mathrm{Xat}}\right]$$

$$= e^{bt}.\mathrm{M}_x(at)$$

نظرية شيبيشف ونظرية الأعداد الكبيرة

1- نظرية شيبيشف

إن بمعلومية أي من الانحرافات المعيارية للكمية العشوائية (الانحراف التربيعي المعياري مثلا) يمكن الحكم بالتقريب عن مدى اختلاف بين القيم الحقيقية التي تأخذها هذه الكمية العشوائية وبين قيمتها المتوسطة المتوقعة. ولكن هذه الملاحظة بحد ذاتها، لا تحتوي على أي تقدير كمي ولا تعطينا أية إمكانية لحساب احتمالات الاحتمالات الكبيرة ولو بالتقريب. ويمكن الإجابة على هذه الأسئلة بالطريقة التالية التي استنتجها تشيبتشيف لأول مرة، نبدأ باستعمال علاقة تشتت الكمية العشوائية.

$$Q_x^a = \sum_{i=1}^{k} (x_i - \bar{x})^a \, pi$$

لنفرض أن a مقدار موجب ما، فإذا ما أهملنا من المجموع السابق جميع الحدود التي تحقق المتباينة:

$$|x_{\mathrm{i}} - \bar{\bar{\mathrm{x}}}| \leq a$$

وأخذنا الحدود التي تحقق المتباينة:

$$|x_{\mathrm{i}} - \bar{\bar{\mathrm{x}}}| > a$$

فنتيجة لذلك يمكن فقط أن يقل المجموع[13]:

$$Q_x^a \geq \sum_{|x_{\mathrm{i}} - \bar{\bar{\mathrm{x}}}| > a} (x_i - \bar{x})^a pi$$

ويقل هذا المجموع أكثر، إذا ما وضعنا بدلا من المقدار $(x_i - \bar{x})^a$ في كل حد، المقدار الأصغر منه α^2.

$$Q_x^a \geq \sum_{|x_{\mathrm{i}} - \bar{\bar{\mathrm{x}}}| > a} (x_i - \bar{x})^a pi$$

إن المجموع الموجود في الطرف الأيمن عبارة عن مجموع احتمالات أن تأخذ الكمية العشوائية x القيم x_{i} التي تختلف عن القيمة المتوسطة $\bar{x}$ سواء أكبر منها أو أصغر، بمقدار أكبر من α.

ومن قاعدة الجمع نرى أن هذا المجموع يساوي احتمال أن تأخذ الكمية العشوائية x أية قيمة من هذه القيم، أو بمعنى آخر، فإن هذا المجموع يساوي $p(|x_{\mathrm{i}} - \bar{\mathrm{x}}| > a)$ وهو احتمال أن يكون الاختلاف الحقيقي الذي نحصل عليه، أكبر من α.وعلى ذلك، نجد أن:

[13]- جنيد ينكو، خينتشين، **المبادئ الأولية لنظرية الاحتمالات**، دار مير للطباعة والنشر، الاتحاد السوفياتي موسكو، 1969، ص 143.

$$p(|x_{\mathrm{i}}-\bar{\mathrm{x}}|>a)\leq\frac{Q_x^a}{\alpha^2}$$

وتسمح هذه المتباينة، بتقدير احتمال الاختلافات الأكبر من مقدار معين α، إذا علم الانحراف التربيعي المعياري Q_x فقط. وفي الحقيقة غالبا ما تعطينا متباينة تشيبتيف تقديرا بعيدا جدا عن الدقة. ولكنها في بعض الأحيان، وذلك بالإضافة إلى أهميتها النظرية القصوى.

مثال:

القيمة المتوسطة لنتيجة القياس تساوي 200 متر. الانحراف التربيعي المعياري يساوي 5 أمتار، وتحت هذه الشروط، لا يمكن إهمال احتمال الحصول على اختلاف حقيقي أكبر من ثلاثة أمتار (يمكن أن نظن أن هذا الاحتمال أكبر من نصف. ويمكن بالطبع إيجاد القيمة الدقيقة لهذا الاحتمال إذا علمنا قانون توزيع نتائج القياس بالتفصيل). ولكن وجدنا أنه بالنسبة للمتوسط الحسابي لمئة نتيجة قياس، يكون الانحراف التربيعي المعياري مساويا 0.5 متر.

ولذلك فإنه باستعمال المتباينة:

$$p(|x_{\mathrm{i}}-\bar{\mathrm{x}}|>a)\leq\frac{Q_x^a}{\alpha^2}$$

نجد أن:

$$p(|\xi-200|>3)\leq\frac{(0.5)^2}{3^2}=\frac{1}{36}\approx 0.03$$

وعلى ذلك، فالنسبة للمتوسط الحسابي لمئة نتيجة قياس يكون احتمال الحصول على اختلاف أكبر من ثلاثة أمتار ضئيلا جدا (يكون هذا الاحتمال في الواقع أصغر بكثير من الحد الذي حصلنا عليه، ولذلك فإننا نستطيع عمليا، إهمال إمكانية الحصول على مثل هذا الاختلاف).

حصلنا بالنسبة لعدد قطع الإنتاج الرديئة، عند اختبار 60000 قطعة، على القيمة المتوسطة وكانت تساوي 2400 والانحراف التربيعي المعياري يساوي 48.إذا أردنا إيجاد احتمال أن يكون العدد الحقيقي لقطع الإنتاج الرديئة واقعا بين 2300 و 2500، أي احتمال أن يكون $|m-2400|\leq 100$ فإن متباينة تشيبتشيف تعطينا

$$p\{|m-2400|\leq 100\}=1-p\{|m-2400|>100\}\geq 1-\frac{48^2}{50^2}\approx 0.77$$

غير أن هذا الاحتمال يكون في الواقع أكبر بكثير من هذه القيمة التي حصلنا عليها.

2–قانون الأعداد الكبيرة

نفرض أن عندنا n من الكميات العشوائية المستقلة عن بعضها البعض $x_1, x_2, \dots, x_n$ بحيث أن قيمتها المتوسطة جميعا، متساوية، وهي α وكذلك الانحراف التربيعي المعياري q لها جميعا واحد.

وكما رأينا فإن القيمة المتوسطة للمتوسط الحسابي لهذه الكميات $\varepsilon = \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{\mathrm{n}}$ تساوي α والانحراف التربيعي المعياري يساوي $\frac{\mathrm{q}}{\sqrt{\mathrm{n}}}$.

لذلك فإن لأي مقدار موجب α تعطينا متباينة تشيبتشيف:

$$p(|\xi - a| > a) \leq \frac{q^2}{a^2 n}$$

لنفرض على سبيل المثال أننا تحدثنا عن المتوسط الحسابي لنتائج n عملية من عمليات قياس كمية معينة. ونفرض كما سبق، أن $a = 200m \;,\; q = 5m$ ولذلك فإننا نحصل على:

$$p(|\xi - 200| > a) \leq \frac{25}{a^2 n}$$

ويمكننا اختيار a بحيث تكون صغيرة مثلا $a = 0.5m$. وبذلك يكون:

$$p(|\xi - 200| > 0.5) \leq \frac{100}{n}$$

وإذا كان عدد مرات القياس n كبيرا جدا، فإن الطرف الأيمن لهذه المتباينة يصغر بدرجة كافية. وعندما تكون $n = 10000$ مثلا فإن الطرف الأيمن يساوي 0.1 وتكون بالنسبة للمتوسط الحسابي ς10000 نتيجة قياس:

$$p(|\xi - 200| > 0.5) \leq 0.01$$

وإذا ما اتفقنا على إهمال إمكانية وقوع الحوادث ذات الاحتمالات الضئيلة كهذه، فإنه يمكن القول بأنه إذا أجرينا 10000 عملية قياس، فسيختلف متوسطها الحسابي عن 200 متر سواء بالزيادة أو بالنقصان، بمقدار لا يزيد عن 50 سنتيمترا.

أما إذا أردنا الحصول على اختلاف أقل – 10 سنتيمترات مثلا – فإنه يجب وضع $\alpha = 0.1$ وبذلك نحصل على:

$$p(|\xi - 200| > 0.1) \leq \frac{25}{0.01n} = \frac{2500}{n}$$

وإذا أردنا أن يكون الطرف الأيمن لهذه المتباينة أصغر من 0.01 فإنه يجب ألا نأخذ عدد المرات القياس مساويا 10000 (إذ أن العدد لا يكفي الآن) بل نأخذ 250000. وعلى الأرجح، يمكن تصغير الطرف الأيمن في المتباينة كما نحب مهما كانت قيمة α صغيرة، ويكفي لذلك أخذ n كبيرة بدرجة كافية، وبناء على ذلك، يمكن اعتبار المتباينة العكسية $\alpha \leq \alpha - \xi$ مؤكدة إلى حد بعيد.

إذا كانت الكميات العشوائية $x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ مستقلة عن بعض، وكانت قيمتها المتوسطة متساوية وكذلك انحرافاتها التربيعية المعيارية متساوية يكون احتمال الكمية

$$\xi = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

عندما تكون n كبيرة كبرا كافيا، قريبا من الواحد الصحيح قربا كافيا، (أي عمليا، تكون الحادثة مؤكدة) ويختلف اختلافا بسيطا عن المقدار α.

وهذه هي أبسط الحالات الخاصة لأهم النظريات الأساسية في نظرية الاحتمالات، وتسمى **بقانون الأعداد الكبيرة** وظهرت هذه النظرية في منتصف القرن الماضي، وقد اكتشفها عالم الرياضيات الروسي الكبير تشيبتشيف. ويتلخص محتوى هذا القانون العام في التالي: مع أن بعض الكميات العشوائية المنفردة ((كما نعلم))، يمكن أن تأخذ في الغالب، قيما بعيدة عن قيمتها المتوسطة (لها تشتت كبير) إلا أن المتوسط الحسابي لعدد كبير من هذه الكميات العشوائية يتشتت تشتتا صغيرا جدا. وباحتمال كبير للغاية، يأخذ هذا المتوسط قيما قريبة جدا من قيمة المتوسطة. وهذا بالطبع، يحدث لأنه عندما نأخذ المتوسط الحسابي، تختصر الاختلافات العشوائية الموجبة مع السالبة مما يترتب عنه أن يكون مجموع الاختلافات في أغلب الأحيان صغيرا.

وتتلخص النتيجة الهامة لنظرية تشيبتشيف التي أثبتناها الآن، والتي كثيرا ما تقابلنا في الحياة العملية في التالي: يمكن الحكم على نوعية كمية كبيرة من مادة متجانسة، بواسطة عدد صغير نوعا ما من العينات *. فإذا أردنا الحكم على نوعية القطن في بالة من البالات مثلا نأخذ عشوائيا، عينات صغيرة من أماكن مختلفة من البالة. وكذلك الحال إذا أردنا الحكم على نوعية كومة كبيرة من القمح، نأخذ عشوائيا، عينات صغيرة من أماكن مختلفة من هذه الكومة *[14]

وتعتبر طريقة الاختبار التي تعتمد على هذا الاختيار العشوائي، على درجة كبيرة من الدقة. ذلك لأن كمية القمح مثلا، المأخوذة كعينة، ولو كانت ضئيلة بالنسبة لكومة القمح كلها، غير أنها في حد ذاتها

[14] العينة المأخوذة لاتزيد عن 100 أو 200 جرام. أما الكومة كلها فيصل وزنها إلى عشرات وأحيانا إلى مئات الأطنان من القمح.

كبيرة، وتسمح تبعا لقانون الأعداد الكبيرة بالحكم على وزن حبة القمح في المتوسط بدقة كافية. ومنه يمكن الحكم على نوعية كومة القمح كلها. وبنفس الطريقة، نحكم على القطن الموجود في بالة وزنها حوالي 320 كغ بواسطة عينة مكونة من عدة مئات من الألياف، لا يزيد وزنها عن جزء من عشرة من الجرام.

إثبات قانون الأعداد الكبيرة

لقد درسنا حتى الآن حالة خاصة فقط تكون فيها الكميات العشوائية ... ،x_1،x_2 التي لها نفس القيمة المتوسطة والانحراف التربيعي المعياري. ولكن قانون الأعداد الكبيرة يطبق أيضا في الحالات الأعم. وسنقوم الآن بدراسة الحالة التي تكون فيها القيم المتوسطة للكميات العشوائية ... ،x_1،x_2 أية أعداد نريدها (سنرمز إليها على التوالي ... ،α_1،α_2) وفي الحالة العامة، تكون هذه الأعداد مختلفة فيما بينها، وعندئذ، تكون القيمة المتوسطة للكمية:

$$\xi = \frac{1}{n}\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right)$$

هي الكمية:

$$A = \frac{1}{n}\left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right)$$

وباستعمال متتالية تشيبتشيف:

$$p(|x_{\mathrm{i}} - \bar{\mathrm{x}}| > a) \leq \frac{Q_x^a}{\alpha^2}$$

نجد أن:

$$p(|\xi - A| > a) \leq \frac{Q_\xi^2}{a^2}$$

حيث a أي مقدار موجب.

ونرى أن الإثبات يعتمد على تقدير قيمة المقدار Q_ξ^2 ويمكن تقدير هذا المقدار بنفس الطريقة البسيطة التي استعملناها في الحالة الخاصة التي درسناها .Q_ξ^2 ، هو تشتت الكمية ξ التي تساوي مجموع عدد n من الكميات العشوائية المستقلة عن بعض، مقسوما على عددها n(وقد احتفظنا هنا بشرط كون الكميات العشوائية مستقلة عن بعض).

ومن قاعدة جمع التشتت، نجد أن

$$Q_\xi^2 = \frac{1}{n^2}(q_1^2 + q_2^2 + \cdots + q_n^2)$$

حيث أن ... $q_1, q_2,$ تعني على التوالي، الانحراف التربيعي المعياري للكميات ... ،x_1،x_2.وسنعتبر الآن أن هذه الانحرافات التربيعية المعيارية عامة، مختلفة فيما بينها، ولكننا سنفترض أنه مهما كان عدد الكميات العشوائية كبيرا، (أي مهما كان العدد n كبيرا) فإن الانحراف التربيعي المعياري لجميع هذه الكميات يكون أقل من مقدار موجب معين، ودائما ما يتحقق هذا الشرط عمليا. حيث أننا نقوم بجمع كميات عشوائية من نوع واحد. ولا تختلف درجة تشتت الكميات المختلفة عن بعض إلا قليلا.

وهكذا نفرض أن $q_i < b$ حيث $(i = 1,2, \dots)$ وتعطينا العلاقة الأخيرة تبعا لذلك ما يلي:

$$Q_\xi^2 < \frac{1}{n^2} nb^2 = \frac{b^2}{n}$$

وتبعا لذلك، نحصل من المتباينة نهائيا على:

$$p(|\xi - A| > a) \leq \frac{b^2}{na^2}$$

ومهما كانت قيمة a صغيرة، فإن عدد الكميات العشوائية عندما يكون كبيرا، يمكن جعل الطرف الأيمن لهذه المتباينة صغيرا صغرا كافيا. وبذلك نكون قد أثبتنا قانون الأعداد الكبيرة في الحالة العامة التي بحثناها.

وبناء على ذلك، فإنه إذا كانت الكميات ... ،x_1،x_2 مستقلة عن بعض، وبقي الانحراف التربيعي المعياري لكل منها أقل من مقدار معين موجب، وكذلك إذا كانت n كبيرة كبرا كافيا فبالنسبة للمتوسط الحسابي.

$$\xi = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$$

يمكننا أن نتوقع باحتمال قريب جدا من الواحد الصحيح، أن يكون الاختلاف بقيمته المطلقة صغيرا صغرا كافيا. وهذا هو قانون الأعداد الكبيرة الذي اكتشفه تشيبتشيف.

والآن، من المهم أن تلفت الانتباه إلى عامل هام. لنفرض أننا نقوم بقياس كمية ما a. إذا ما كررنا عملية القياس تحت نفس الظروف، فإننا نحصل على نتائج عديدة مختلفة تماما عن بعض

$(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$ ويمكن أخذ المتوسط الحسابي لهذه القيم كقيمة للكمية

$$\alpha \backsim \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$$

وهنا نتساءل: هل يمكن الحصول على قيمة دقيقة دقة كافية للكمية α إذا ما أجرينا عددا كبيرا من عمليات القياس؟ هذا يحدث فعلا إذا انعدمت الأخطاء المتكررة في القياس، أي إذا كان $\bar{x}_k = a$ (عندما تكون $k = 1,2, \dots \mathrm{n}$) وإذا انعدم عدم التحديد في نفس هذه القيم. أو بطريقة أخرى إذا قرأنا على الجهاز قيم القياس التي تحدث في الواقع، وإذا كان الجهاز مصمما بحيث لا يستطيع أن يعطينا دقة في

الحساب أكبر من قيمة ما δ ، وبما أن عرض خطوط تقسيم المسطرة المدرجة التي تعطينا الحسابات، يساوي δ مثلا، فإنه من الواضح أننا لن نستطيع الحصول على دقة أعلى من $\pm\delta$. ومن الواضح أن المتوسط الحسابي في هذه الحالة سيحتوي على الخطأ δ كما هو الحال بالنسبة لكل من x_k .

وتكشف لنا هذه الملاحظة، أن الجهاز إذا أعطانا القياس وفيها بعض عدم التحديد δ، فإن محاولة الحصول على قيمة a بدقة كبيرة باستعمال قانون الأعداد الكبيرة، تعتبر تضييعا للوقت.

وفي نفس العمليات الحسابية التي نجريها في هذه الحالة، تعتبر ملهاة حسابية لا جدوى منها.

قائمة المراجع:

– محمد صبحي أبو صالح، عدنان محمد عوض، **مقدمة في الإحصاء**، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 1984.

- محمد بداوي، **الاحتمالات**، الطبعة الأولى، دار هومه، الجزائر، 2017.

- دومينيك سالفاتور، ترجمة سعدية حافظ منتصر، **الإحصاء والاقتصاد القياسي**، سلسلة ملخصات شوم، الطبعة السادسة، الدار الدولية للإستثمارات الثقافية، 2012.

- محمد شامل بهاء الدين فهمي، **الإحصاء بلا معاناة المفاهيم مع التطبيقات بإستخدام برنامج SPSS**، الجزء الأول، الطبعة الأولى، مكتبة الملك فهد الوطنية ، السعودية، 2005.

- عزام عبد الرحمن صبري، **الإحصاء التطبيقي بنظام SPSS**، **الطبعة الأولى**، الدار المنهجية للنشر، الأردن، 2014.

- عزات عمر قاسم، **مبادئ الاحتمالات والإحصاء**، منشورات جامعة دمشق كلية العلوم، سوريا، 1994.

- خالد زهدي مصطفى خواجه، **مبادئ وأساسيات الاحتمالات**، الطبعة الأولى، دائرة المكتبة الوطنية، الأردن، 2022.

- محمد عبد العالي النعيمي، حسن ياسين طعمة، **الإحصاء التطبيقي**، دار وائل للنشر، الطبعة الأولى، الأردن، 2008.

- محمد محمد المزاح، **مبادئ الإحصاء والإحتمالات للعلوم الإدارية والتطبيقية**، جامعة العلوم والتكنولوجيا، الطبعة الثالثة، صنعاء، 2013.

- جلال مصطفى الصياد، **نظرية الاحتمالات**، دار حافظ للنشر والتوزيع، الطبعة السادسة، السعودية، 2008.

- جنيد ينكو، خينتشين، **المبادئ الأولية لنظرية الاحتمالات**، دار مير للطباعة والنشر، الاتحاد السوفياتي (سابقا) موسكو، 1969.