الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

جامعة غرداية

Université de Ghardaïa

كلية العلوم والتكنولوجيا

Faculté des Sciences et de la Technologie

قسم الرياضيات والإعلام الآلي

Département des mathématiques et de l'informatique


*N° d'enregistrement*

/…../…../…../…../…..

**Mémoire de fin d'étude, en vue de l'obtention du diplôme**

# Master

**Domaine:** Mathématiques et informatique

**Filière:** Mathématiques

**Spécialité:** Analyse fonctionnelle et applications

## Thème

# Propriétés des fonctions quasi-analytiques associées aux suites logarithmiquement convexe


**Présenté par :**

**Mokhtar CHIKH SALAH**


**Devant le jury composé de:**

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Smail LATRECHE** | **M.A.A** | **Université de Ghardaia** | **Encadrant** |
| **Yacine ELHADJ MOUSSA** | **M.A.A** | **Université de Ghardaia** | **Examinateur 1** |
| **Abdellatif LALMI** | **M.A.A** | **Université de Ghardaia** | **Examinateur 2** |

**Année universitaire 2021/2022**

**Abstract:** we study in this work at the beginning the analytic functions and their properties, and we define the quasi-analytic functions as a generalization of analytic functions, then builds an algebra. there are two quasi-analytic classes: class of BERNSTEIN and class of DENJOY-CARLEMAN, We will be interested in DENJOY-CARLEMAN class and especially those associating with logarithmic convex sequences, then deducing certains properties

**Keywords:** analytic function , quasi-analytic function , logarithmic convex sequence, analytic extension

**الملخص:** سندرس في بداية عملنا الدوال التحليلية ونقدم خصائصها ، ونعرف الدوال شبه تحليلية كتعميم للدوال التحليلية والتي تُكون جبرا. هناك صنفان من الدوال شبه تحليلية: صنف BERNSTEIN و صنف DENJOY-CARLEMAN وسنركز على صنفDENJOY-CARLEMN ، وخصوصا على النوع المرتبط بالمتتاليات المحدبة لوغاريتميا من خلال استنتاج بعض خصائصها

**الكلمات المفتاحية:** دالة تحليلية، دالة شبه تحليلية، متتالية محدبة لوغاريتميا، التمديد التحليلي

**Résumé:** on étudie dans ce travail les fonctions analytiques et leurs propriétés. et définir les fonctions quasi-analytiques comme une généralisation des fonctions analytiques qui constituent une algèbre. il existe deux types de fonctions quasi-analytiques: celle de BERNSTEIN et celle de DENJOY-CARLEMAN, on s'intéressera à celle de DENJOY-CARLEMAN et surtout celle associer aux suites logarithmique convexes et déduire certaines propriétés

**Mots clés:** fonctions analytiques, fonctions quasi-analytiques, suite log-convexe, prolongement analytique

# Dédicace

*Je dédie ce modeste travail:*

*À l'être le plus cher de ma vie, ma mère*

*À celui qui m'a fait de moi un homme, mon père*

*À Mes chers frères et Sœurs*

*À ma femme et ma petite fille* ***ARWA***

*À toute ma famille pour leurs encouragements continus*

# Table des matières

# Introduction

Au début du $19^e$ siecle Hadamard Jacques un mathématicien français, l'un des grand prionnier d'analyse, Dans ces traveau sur les fonctions analytiques il a sur tiré de belles propriétés arithmétiques.

Dans ce travail, nous verrons certains de ces propriétés et nous allons étudier les classes quasi-analytiques des fonctions, tous on se posant le problème de savoir comment on peut prolonger une fonction analytique à travers sa frontière naturelle suivant un segment, et quand est-ce que ce prolongement est unique.
On pourrait s'intéresser à trouver des conditions pour que si deux segements sur lesquels la fonction a été prolongée se rencontrent, la valeur des prolongements de la fonction à l'intersection des segements coïncident.

On va tout d'abord commencer par exposer quelques notions de bases importantes dont nous aurons besoin , puis exposer les propriétés des fonctions analytiques d'une variable réelle ce qui nous conduira à la définition de classes quasi-analytique et leurs propriétés avec quelques exemples, deux types de classes quasi-analytiques de fonctions seront étudiées, les classes de Denjoy-Carleman et celle de Bernstein, et on s'interessera plus particulièrement aux classes de Denjoy-Carleman, enfin Déterminer un prolongement quasi-analytique, problème d'unicité et application

# Chapitre 1

# Préliminaires

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques éléments d'algèbre et d'analyse que nous allons utiliser dans les chapitres suivants dans ce mémoire.

## 1.1 Algèbre

Soit $\mathbb{K}$ un corps

**Définition 1.1.** ***Espace véctoriel*** *[6]*
*On appelle espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ (ou $\mathbb{K}$-espace vectoriel) un ensemble $E$ muni de deux lois :*
***une loi interne****, notée $+$, telle que $(E,+)$ soit un groupe commutatif, c.à.d :*
- *$+$ est associatice, c.à.d : $\forall (x,y,z) \in E^3,\ x+(y+z) = (x+y)+z$*
- *Il existe un élément neutre notée $0_E$, c,à,d $\quad \forall x \in E,\ x + 0_E = 0_E + x = x$*
- *toute élément possède un symétrique, c.à.d :*

$$\forall x \in E,\ \exists (-x) \in E \text{ avec } x + (-x) = -x + x = 0_E$$

- *$+$ est commutative, c.à.d $\quad \forall (x,y) \in E^2,\ x+y = y+x$*

***une loi externe****, notée $\cdot$ , qui est une application de $\mathbf{K} \times E$ dans $E$ vérifaint :*
- *$\forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2, \forall x \in E,\ (\alpha+\beta)\cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x.$*
- *$\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall (x,y) \in E^2,\ \alpha \cdot (x+y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y.$*
- *$\forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2, \forall x \in E,\ \alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha\beta)\cdot x.$*
- *$\forall x \in E,\ 1 \cdot x = x.$*

**Définition 1.2.** ***Algèbre*** ***[6]***
*Une algèbre sur un corps commutatif $\mathbb{K}$, ou simplement une $\mathbb{K}$-algèbre, est une structure algébrique $(A,+,\cdot,\times)$ telle que*
- *$(A,+,\cdot)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$*
- *la loi $\times$ est interne*

— *la loi $\times$ est bilinéaire c.à.d :* $\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{K}^2, (x,y,z)\in A^3$, *on a :*

$$(x+y)\times z = x\times z + y\times z$$

$$x\times(y+z) = x\times y + x\times z$$

$$(\alpha x)\times(\beta y) = (\alpha\beta)(x\times y)$$

## 1.2 Série entière

**Définition 1.3.** ***Série entière [6]***
*On appelle série entière toute série de fonctions de la forme* $\sum\limits_n a_n z^n$ *où* $a_n$ *est une suite de nombres complexes et* $z\in\mathbb{C}$

**Définition 1.4.** ***Rayon de convergence [6]***
*On appelle rayon de convergence de la série entière* $\sum\limits_n a_n z^n$ *le réel*

$$R = \sup\{\rho\geq 0;\ (a_n\rho^n) \text{ est bornée}\}\in\mathbb{R}_+\cup\{+\infty\}.$$

## 1.3 Fonction analytique

**Définition 1.5.** *[1]*
*Soit $f$ une fonction d'une variable réelle ou complexe à valeurs complexe définie sur un ensemble $X\subseteq\mathbb{C}$.*
*on dit que $f$ est analytique en $z_0$, si $z_0$ appartient au domaine de définition de $f$ et s'il existe une série entière $\sum a_n(z-z_0)^n$ de rayon de convergence strictement positif qui coïncide avec $f$ sur un voisinage de $z_0$*

*On dit que $f$ est analytique sur $E$, si $f$ est analytique en tout point $z_0$ de $E$*

## 1.4 Fonction indéfiniment dérivable

**Définition 1.6.** *[6]*
*On dit qu'une fonction $f:[a,b]\to\mathbb{R}\,(ou\,\mathbb{C})$ est indéfiniment dérivable, si $f$ est dérivable sur $]a,b[$ et si toutes les dérivées de $f$ admettent une limite finie à droite de $a$ et à gauche de $b$.*

## 1.5 propriétés des fonctions analytiques

### propriétés d'unicité

**Proposition 1.1.** *[1]*
*soit $f$ et $g$ définies et analytiques sur $[a,b]$ :*

1. *s'il existe* $x_0 \in [a,b]$ *tel que pour tout naturel* $n \in \mathbb{N}$ *on ait :*
$$f^{(n)}(x_0) = g^{(n)}(x_0) \qquad alors \qquad f = g$$
2. *si* $f(x) = g(x)$ *sur un sous-intervalle ouvert non vide de* $[a,b]$ *alors* $f = g$

## prolongement par recollement

**Proposition 1.2.** *[1]*
*soient* $f$ *et* $g$ *analytiques réspectivement sur* $[a,b]$ *et* $[c,d]$*,*
*soient* $I = [a,b] \cup [c,d]$*,* $J = [a,b] \cap [c,d]$ *alors :*

1. *S'il existe* $x_0 \in J$ *tel que pour tout naturel* $n$ $f^{(n)}(x_0) = g^{(n)}(x_0)$ *alors il existe* $h$ *analytique sur* $I$ *qui coïncide avec* $f$ *sur* $[a,b]$ *et avec* $g$ *sur* $[c,d]$
2. *si* $f(x) = g(x)$ *sur un sous-intervalle ouvert non vide de* $J$ *alors il existe une fonction analytique* $h$ *définie sur* $I$ *qui coïncide avec* $f$ *sur* $[a,b]$ *et avec* $g$ *sur* $[c,d]$

## Théorèmes de caractérisation

**Théorème 1.1.** ***Pringsheim [1]***
*$f$ définie sur $[a,b]$ est analytique sur $[a,b]$ si et seulement si $f$ est indéfiniment dérivable sur $[a,b]$ et s'il existe $A > 0$ tel que pour tout naturel $n$ et tout $x \in [a,b]$ :*
$$|f^{(n)}(x)| \leq A^n \, n\,! \tag{1.1}$$

**Définition 1.7.** *[1]*
*soit $f$ une fonction définie sur $[a,b]$, on note :*
$$||f|| = ||f||_{[a,b]} = \sup\{|f(x)|; x \in [a,b]\} \tag{1.2}$$

$$E_n(f) = E_n(f,[a,b]) = min\,\{\,||f-p||\,;\ \ p \text{ pôlynome de degré au plus } n\} \tag{1.3}$$

*signalons que si $f$ est continue, il existe un unique polynôme $p_n$ tel que $||f - p_n|| = E_n(f)$ , appelé polynôme de meilleure approximation de degré au plus $n$ de la fonction (Théorème de Weierstrass)*

**Théorème 1.2.** ***Bernstein [1]***
*Soit $f$ une fonction définie sur $[a,b]$, $f$ est analytique sur $[a,b]$ si et seulement s'il existe $A > 0$ et $\rho \in ]0,1[$ tel que pour tout naturel $n$*
$$E_n(f) \leq A\,\rho^n \tag{1.4}$$

## Propriétés algébriques

— L'ensemble des fonctions analytiues sur $[a,b]$ est une algébre pour la multiplication ponctuelle.
— Si $f : I \to J$ est analytique, $g$ analytique sur $J$ Alors $g \circ f$ est analytique sur $I$.

### Propriétés différentielles

Si $f$ est analytique sur $I$, toute primitive de $f$ est analytique sur $I$, et sa dérivée $f'$ est analytique sur $I$.

## 1.6 Formule de Stirling

**Définition 1.8.** *[6]*
*La formule de Stirling, du nom du mathématicien écossais James Stirling, donne un équivalent de la factorielle d'un entier naturel $n$ quand $n$ tend vers l'infini :*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n\,!}{\sqrt{2\pi n}\ (n/\mathrm{e})^n} = 1$$

*que l'on trouve souvent écrite ainsi :*

$$n\,! \sim \sqrt{2\pi n}\ \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$$

*où le nombre e désigne la base de logarithme népérien.*

## 1.7 Inégalité de shwarz

**Théorème 1.3.** *[6] Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien réel ou complexe. Alors, pour tous vecteurs $x$ et $y$ de $E$*

$$|\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\|\ \|y\|$$

## 1.8 Principe de symétrie de Schwarz

**Théorème 1.4.** *[6]*
*Si une fonction $f : E \to F$ est de classe $\mathcal{C}^2$ en un point $a \in E$, alors l'application bilinéaire $\mathrm{d}^2 f_a : E \times E \to F$ est symétrique.*

## 1.9 Enveloppe convexe

**Définition 1.9.** ***Partie convexe***
*Un ensemble $C$ est dit convexe lorsque, pour tous $x$ et $y$ de $C$, le segment $[x, y]$ est tout entier contenu dans $C$, c'est-à-dire :*

$$\forall x, y \in C \quad \forall t \in [0\,;1] \qquad t\,x + (1-t)\,y \in C$$

**Définition 1.10.** ***Enveloppe convexe***
*Soit $A$ une partie de $E$. L'enveloppe convexe de $A$ est l'intersection de toutes les parties convexes de $E$ qui contiennent $A$.*

## 1.10 Forme quadratique

**Définition 1.11.** ***Polynôme homogène***
*Un polynôme homogène, est un polynôme en plusieurs indéterminées dont tous les monômes non nuls sont de même degré total. Par exemple le polynôme* $x^5 + 2x^3y^2 + 9xy^4$ *est homogène de degré 5 car la somme des exposants est 5 pour chacun des monômes*

**Définition 1.12.** ***Forme quadratique***
*Une forme quadratique est un polynôme homogène de degré 2.*
*Les formes quadratiques d'une, deux et trois variables sont données respectivement par les formules suivantes* ($a, b, c, d, e, f$ *désignant des coefficients) :*

$$Q(x) = ax^2$$
$$Q(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$$
$$Q(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz$$

## 1.11 Equation intégrale de Voltera

**Définition 1.13.**
*Une équation intégrale est une équation dont l'une des indéterminées est une intégrale. On appelle une équation intégrale linéaire de Voltera de second espèce une équation de la forme*

$$\phi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t)\, \phi(t)\, \mathrm{d}t.$$

*où* $\phi$ *est une fonction inconnue et* $K$ *et* $f$ *sont des fonctions connues*

## 1.12 Théorème de Bang

**Théorème 1.5.** *[7]*
*En géométrie , le théorème de Bang sur les tétraèdres stipule que, si une sphère est inscrite dans un tétraèdre et que des segments sont tirés des points de tangence à chaque sommet sur la même face du tétraèdre, alors les quatre points de tangence ont le même triple de angles. En particulier, il s'ensuit que les 12 triangles dans lesquels les segments subdivisent les faces du tétraèdre forment des paires congruentes sur chaque bord du tétraèdre.*

## 1.13 Arc de Jordan analytique

**Définition 1.14.**
*Soit* $\gamma : I \to C$ *On dit que* $\gamma$ *est l'arc de Jordan Si* $B$ *est un arc de frontière libre de* $C$ *et il existe* $A$ *un arc ouvert de frontière libre de* $D$ *tel que* $\gamma$ *a une extension injective continue et* $\gamma(A) = B$.

## 1.14 Introduction aux classes quasi-analytiques réeles

### 1.14.1 Les classes de DENJOY-CARLEMAN

Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\{M_n\}_n$ une suite de nombres réels positifs

**Définitions 1.1.** *[1]*
*La classe $C(M) = C(M, I)$ tel que $M = \{M_n\}_n$ est l'ensemble des fonctions $f$ définies sur $I$, indéfiniment dérivable telles qu'il existe $A > 0$ vérifiant pour tout naturel $n$*

$$||f^{(n)}(x)||_I \leq A^n\, M_n \tag{1.5}$$

*Si $M_n = n!$ ces inégalités sont vérifiées en particulier par toute fonction analytique sur $I$ et* (1.1) *montre que C(M,I) est l'ensemble des fonctions analytique sur $I$.*
*La classe $C(M)$ est dite quasi-analytique au sens de Denjoy-Carleman si tout élément $f$ de cette classe est complétement déterminé par la suite $\{f^n(x_0)\}_n$, où $x_0 \in I$.*
*En particulier (1) de 1.4.1 montre que la classe des fonctions analytique est une classe quasi-analytique de Denjoy-Carleman*

### 1.14.2 Les classes de S.BERNSTEIN

Soit $\{N_n\}_n$ une suite strictement croissante de naturels et $I = [a, b]$.

**Définitions 1.2.** *[1]*
*La classe $B(N) = B(N, I)$ tel que $N = \{N_n\}_n$ est l'ensemble des fonctions $f$ telles qu'il existe $A > 0$ et $p \in ]0, 1[$ satisfaisant pour tout $m \in \{N_n\}_n$*

$$E_m(f) \leq Ap^m \tag{1.6}$$

*Si $\{N_n\} = n$ ces inégalités sont vérifiées en particulier par toute fonction analytique sur $I$, et* (1.2) *montre que $B(N, I)$ est exactement l'ensemble des fonctions analytique sur $I$.*
*La classe $B(N, I)$ est dite quasi-analytique au sens de Bernstein si tout élément $f$ de cette classe est complétement détérmoiner par sa restriction à un sous intervalle ouvert non vide de $I$.*
*En particulier (2) de 1.4.1 montre que la classe des fonctions analytique est une classe quasi-analytique de Bernstein.*

# Chapitre 2

# les classes de DENJOY-CARLEMAN

## 2.1 Caractérisation

**Théorème 2.1.** ***DENJOY-CARLEMAN [1]***
*$C(M)$ est une classe quasi-analytique de Denjoy-Carleman si et seulement si $\sum_n \frac{1}{\beta_n}$ diverge avec $\beta_n = \inf_{r\in\mathbb{N}} (M_{n+r})^{1/n+r}$*

Pour des conditions équivalantes on peut utiliser le lemme suivant

**Lemme 2.1.** *[1]*
*Soit $\{M_n\}_n$ une suite de nombres positifs, on désigne par $\overline{M}_n = e^{\inf\{t;(n,t)\in E\}}$ où $E$ désigne l'enveloppe convexe des points $(k, M_k)$, $k \in \mathbb{N}$, $T(r) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{r^n}{M_n}$ alors les expressions suivantes convergent ou divergent simultanément*

$$\sum_n \frac{1}{\beta_n} \quad ,\sum_n \frac{1}{(\overline{M}_n)^{1/n}} \quad ,\sum_n \frac{\overline{M}_n}{\overline{M}_{n+1}} \quad ,\int_1^\infty \frac{\log T(r)}{r^2}dr \quad ,\int_1^\infty \log[\sum(\frac{r^n}{M_n})^p]dr$$

*et $p > 0$*

### 2.1.1 Exemples et contre-exemples de classes quasi-analytiques de DENJOY-CARLEMAN

Soit $q$ un entier $q > 0$ soit $\log_1 x = \log x$ et par récurrence $\log_{p+1}(x) = \log(\log_p x)$ alors

— Les classes $C(M_q, I)$ avec $M_q(n) = (n\log_1(n) \times ... \times \log_q(n))^n$ pour $n$ assez grand, sont des classes quasi-analytiques de Denjoy-Carleman pour tout entier $q \geq 1$
— Les classes $C(M_q^\lambda, I)$ avec $M_q^\lambda = (n\log_1(n) \times ... \times \log_{q-1}(n) \times \log_q(n)^\lambda)^n$ sont quasi-analytiques pour $\lambda \leq 1$ et non quasi-analytique pour $\lambda > 1$.

## 2.2 Inclusion d'une classe dans une classe

**Théorème 2.2.** ***Cartan et Mandelbrojt [1]***
*$C(M,I) \subseteq C(M',I)$ si et seulement si $\overline{\lim_n}(\frac{M_n^f}{M'_n})^{1/n} < \infty$*

$$\text{où} \quad M_n^f = \frac{1}{n^n}\sup_{r\geq n}\frac{r^{2n}}{U(r)} \qquad \text{et} \qquad U(r) = \sup_{n\leq r}\frac{r^{2n}}{n^n M_n}, r\in\mathbb{R}.$$

**Remarques 2.1.**
- *Il existe un procédé constructif pour obtenir la suite $\{M_n^f\}_n$ à l'aide de la suite $\{M_n\}_n$.*
- *Le théorème précédent est encore valable en supprimant la condition de quasi-analyticité de $C(M,I)$ et de $C(M',I)$.*

### 2.2.1 Résultats

1. S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0 : M_n = 0$ alors $C(M,I)$ est inclu dans l'ensemble des polynôme de degré au plus $n_0 - 1$ restreints à $I$.
2. La classe analytique est incluse dans $C(M',I)$ si et seulement si
$$\overline{\lim_n}\frac{n}{(M'_n)^{1/n}} < \infty$$

**Démonstration**

1. On a $\forall n \in \mathbb{N}\, ||f^{(n)}(x)||_I \leq A^n\, M_n$ alors pour $n \geq n_0$ on a $||f^{(n)}(x)||_I \leq 0$
c à d $f^{(n)}(x) = 0$ et on a $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^n(x)}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{n_0-1}\frac{f^n(x)}{n!}x^n$
2. En utilisant la formule de Stirling, on montre que $C(n!,I) = C(n^n,I)$.
Soit $M_n = n^n$, on va déterminer un encadrement de $M_n^f$.
$U(r) = \sup_{n\leq r}\frac{r^{2n}}{n^{2n}}$ et on remarque que $\frac{d}{dn}(\frac{r^{2n}}{n^{2n}}) = 2(\frac{r}{n})^{2n}(\log\frac{r}{n} - 1)$, donc $\frac{r^{2n}}{n^{2n}}$ est maximale en $x = \frac{r}{e}$ sur $[0,r]$ (on suppose $r \geq 6$ ) on ontient que $U(r) \leq \beta^r$ avec $\beta = e^{2/e}$. D'autre part soit $m \in \mathbb{N}, 1 \leq m \leq r$ tel que $\frac{r^{2m}}{m^{2m}} = U(r)$. comme $\frac{r^{2y}}{y^{2y}}$ est monotone sur $[1,x]$ et $[x,r]$ il vient que $|m - \frac{r}{e}| < 1$ et donc $|m - \frac{r}{e}| < \frac{r}{2e}$ par conséquent
$$U(r) \geq \min\{\left(\frac{r}{\frac{r}{2e}}\right)^{2\cdot\frac{r}{2e}} \quad ; \quad \left(\frac{r}{\frac{3}{2}\frac{r}{e}}\right)^{2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{r}{e}}\} = \alpha^r \quad \alpha = (2e)^{1/e}$$
On obtient l'encadrement

$$\left(\frac{2n}{e.\log\beta}\right)^{2n} = \sup_{r\geq n}\frac{r^{2n}}{\beta^r} \leq n^n M_n^f \leq \sup_{r\geq n}\frac{r^{2n}}{\alpha^r} = \left(\frac{2n}{e.\log\alpha}\right)^{2n}$$

Vu que $\frac{d}{dr}\left[\frac{r^{2n}}{\gamma^r}\right] = (2r\frac{n}{r} - \log\gamma)\frac{r^{2n}}{\gamma^r}$, d'où on déduit que $\frac{r^{2n}}{\gamma^r}$ est maximal en $r = \frac{2n}{\log\gamma}$. Enfin on obtient les inégalités

$$\left(\frac{4n}{(e.\log\beta)^2}\right)^n \leq M_n^f \leq \left(\frac{4n}{(e.\log\alpha)^2}\right)^n$$

qui avec le théorème précédent démontrent le deuxième point.

## 2.3 Log-convexe et quasi-analyticité

### 2.3.1 suites log-convexe

**Définition 2.1.** *[3]*
*Une suite de nombres réels positifs $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite logarithmiquement convexe si et seulement si pour tout $n \geqslant 1, M_n^2 \leqslant M_{n-1}M_{n+1}$*

**Proposition 2.1.** *[3]*
*Pour une suite de nombres réels positifs $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les assertions suivantes sont equivalentes :*

1. *$(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est log-convexe*
2. *$\left(\frac{M_n}{M_{n-1}}\right)$ est monotone croissante*
3. *$(\ln(M_n))$ est convexe*

**Preuve 2.1.**
*Les conditions (1)et (2)sont évidemment équivalentes.*
*si (3)est vraie alors $2\ln M_n \leqslant \ln M_{n-1}.\ln M_{n+1}$ d'ou (1)*
*si (2) est vraie alors pour tout $n, m, k \in \mathbb{N}$ tel que :$n \leqslant k \leqslant m$ on a :*

$$\frac{1}{k-n}\sum_{j=n+1}^{k}\ln\left(\frac{M_j}{M_{j-1}}\right) \leqslant \frac{1}{m-k}\sum_{j=k+1}^{m}\ln\left(\frac{M_j}{M_{j-1}}\right)$$

**Corollaire 2.1.** *[3]*
*Si une suite de nombres réels positifs $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est log-convexe avec $M_0 = 1$, Alors : $\left(\sqrt[n]{M_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone croissante*

**Preuve 2.2.**
*proposition **3.3.2**,il s'ensuit que pour tout $n \in \mathbb{N}$ :*

$$M_n = \frac{M_n}{M_0} = \prod_{j=1}^{n}\frac{M_j}{M_{j-1}} \leqslant \left(\frac{M_n}{M_{n-1}}\right)^n$$

*ou equivalent à :*

$$M_{n-1}^{\frac{1}{n-1}} \leqslant M_n^{\frac{1}{n}}$$

**Lemme 2.2.** *[3]*
*Supposons que $(M_n)$est une suite log-conv de nombres réels positifs .$C\{M_n\}$ est quasi analytique si et seulement si pour certains et donc pour tout $j \in \mathbb{N}$ la classe $C\left\{\sqrt[j]{M_{nj}}\right\}$ est quasi-analytique*

**Preuve 2.3.**
*On peut supposer $M_0 = 1$.En fait, si $M_0 \neq 1$ alors on peut appliquer la preuve à la suite $\left(\dfrac{M_n}{M_0}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. il suffit de prouver que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{M_n}} = +\infty$ seulement si pour un $j \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[nj]{M_{nj}}} = +\infty$*
*on a alors :*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{M_n}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{\sqrt[nj]{M_{nj}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt[nj+(j-1)]{M_{nj+(j-1)}}}} \right) + \sum_{n=1}^{j-1} \frac{1}{\sqrt[n]{M_n}} \leqslant j \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[nj]{M_{nj}}} +$$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{j-1} \frac{1}{\sqrt[n]{M_n}}$ *ce qui prouve la partie nécéssité d'autre part* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[nj]{M_{nj}}}$ *diverge pour certains $j \in \mathbb{N}$ alors la série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{M_n}}$ *diverge aussi car elle contient plus de sommations*

### 2.3.2 Propriétés algébriques

- $C(M, I)$ est un espace vectoriel.
- une condition suffisante pour que $C(M, I)$ soit stable pour la multiplication ponctuelle est que l'un des deux propriétés suivantes soient vérifiée :
  1. $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est log-convexe
  2. $\lim\limits_{n} \dfrac{M_n}{n} > 0$ c'est à dire si $M(C, I)$ contient la classe analytique

**Démonstration de (2)**

Rappelons les inégalités de Cartan-Georny
Soit $I = [-1, 1]$ et pour tout naturel $r$, $A_r$ un nombre positif tel que $A_r \leq ||f^{(r)}||_I$ alors pour tout naturel $p$ et tout naturel $k \leq p$ on a

$$||f^{(k)}||_I \leq \max\left\{ 2\left(\frac{e^2 p}{k}\right)^k A_0^{1-\frac{k}{p}} A_p^{\frac{k}{p}} \quad , \quad 2\left(\frac{e^2 p^2}{2k}\right)^k A_0 \right\}$$

Auterement dit ces inégalité peut s'écrire $||f^{(k)}||_I \leq 2\left(\frac{e^2p}{k}\right)^k A_0 \max\left\{\left(\frac{A_p}{A_0}\right)^{\frac{k}{p}}, \left(\frac{p}{2}\right)^k\right\}$ et en posant $B_p = \max\left\{\left(\frac{A_p}{A_0}\right), \left(\frac{p}{2}\right)^p\right\}$ il vient que $||f^{(k)}||_I \leq 2A_0\left(\frac{e^2p}{k}\right)^k B_p^{\frac{k}{p}}$

Soient $f$ et $g$ éléments de $C(M,I)$ il existe $A$ et $B$ deux nombres positifs tels que pour tout naturel $n$ on ait $||f^{(n)}||_I \leq AB^nM_n$, $||g^{(n)}||_I \leq AB^nM_n$.

Définissons pour tout naturel $r$, $A_r = AB^rM_r$ de $(f.g)^{(p)} = \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k} f^{(k)}g^{(p-k)}$ (Formule de Lebniz) il vient en utilisant les inégalités de Cartan-Gorny que

$$\begin{aligned}||(f.g)^{(p)}||_I \leq ||(f.g)^p||_I &\leq \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}\left(2A_0\left(\frac{e^2p}{k}\right)^k B_p^{\frac{k}{p}}\right)\left(2A_0\left(\frac{e^2p}{p-k}\right)^{p-k} B_p^{\frac{p-k}{p}}\right)\\ &\leq 4e^{2p}A_0^2B_p\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}\frac{p^p}{k^k\,(p-k)^{p-k}}\end{aligned}$$

En utilisant la formule de Stirling, il est facile de vérifier qu'il existe une constante $c$ vérifiant pour tout naturel $k$ et $p$, $k \leq p$

$$\frac{p^p}{k^p(p-k)^k} < \frac{p!}{k!(p-k)!}c.\sqrt{p}$$

D'autre part

$$\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}^2 \leq \left(\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}\right)^2 = 4^{2p}$$

donc

$$||(f.g)^{(p)}||_I \leq 4\,c\,(4e)^{2p}\,\sqrt{p}\,A_0^2\,\max\left\{\frac{A_p}{A_0}, \left(\frac{p}{2}\right)^p\right\}$$

Du fait que $\lim_n \frac{(M_n)^{1/n}}{n} > 0$ il existe $a \geq 1$ tel que quelque soit $p$ : $\left(\frac{p}{2}\right)^p \leq a^p\frac{A_p}{A_0}$ Donc $||(f.g)^{(p)}||_I \leq A'B'^pM_p$ avec $A' = 4c.A_0, B' = 2a.(4e)^2$ et remarquant que $\sqrt{p} < 2^p$. Le cas où $I = [a,b]$ se ramène, par un changement de variable affine, au cas $[-1,1]$ ce qui achève la démonstration.

### 2.3.3 Propriétés différentielles

— Toute primitive de $f \in C(M,I)$ est un élément de $C(M,I)$.

— $C(M,I)$ est stable pour la dérivation si et seulement si $\overline{\lim_n}\left(\frac{M_{n+1}^f}{M_n}\right)^{1/n} < \infty$.

## 2.4 Prolongement par recollement

**Proposition 2.2.** *[10]*
*Soient $f \in C(M, I), g \in C(M, J)$ et $K = I \cup J$. S'il existe $x_0 \in I \cap J$ tel que pour tout naturel $n$, $f^{(n)}(x_0) = g^{(n)}(x_0)$ alors il existe $n \in C(M, K)$ qui prolonge $f$ et $g$.*

## 2.5 Prolongement par interpolation

### 2.5.1 Méthode de Charles de le Vallée-Poussin

Nous avons utilisé **[11]** comme référence de ce paragraphe
Pour simplifier les notation soit $I = [-\pi, \pi]$ et soit $x_0 \in I$ et $\{c_n\}_n$ suite des nombres réels (ou complexes),
Supposons qu'il existe $f \in C(M, I)$ périodique de période $2\pi$ telle que $f^{(n)}(x_0) = c_n$ et que de plus, l'on connaisse $A$ et $B$ tels que $||f^n||_I \leq B\, A^n\, M_n$. On se propose de détérminer les coefficients de Fourier de $f$. Sans restreindre la généralité on peut supposer que $f$ est paire, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx, x_0 = 0$. On a donc à résoudre le système linéaire infini

$$c_{2i} = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^i\, r^{2i}\, a_r \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

Posons $T(r) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{r^n}{M_n}$ et $S(r) = \dfrac{1}{\beta} T(\dfrac{r}{A})$ . On montre, par intégration par partie, que $|a_r| \leq \dfrac{1}{S(r)}$. Soient $\epsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}$ données, on choisit $p \in \mathbb{N}$ tel que

$$\left( \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{k^{2(n-1)}}{S(k)} \right)^2 \leq \frac{\epsilon}{n} \tag{2.1}$$

On a alors

$$\left( c_{2i} - \sum_{r=0}^{p} r^{2i}\, a_r \right)^2 \leq \frac{\epsilon}{n} \quad \text{pour } i \in \{0, ..., n-1\}$$

Soients
$$F(y) = \sum_{i=0}^{n-1} \left( c_{2i} - \sum_{r=0}^{p} r^{2i}\, y_r \right)^2 + \epsilon \sum_{r=0}^{p} y_r^2\, S(r)^2\, \alpha^{-2r} \quad \alpha > 1$$

$\left(a_0^p, ..., a_p^p\right)$ le point où $f$ est minimale et $m$ la valeur de ce minimum. On a

$$m \leq \sum_{i=0}^{n-1} \left( c_{2i} - \sum_{r=0}^{p} r^{2i} a_r \right)^2 + \epsilon \sum_{r=0}^{p} a_r^2\, S(r)^2\, \alpha^{-2r} \leq \epsilon \left( 1 + \frac{1}{1 - \alpha^{-2}} \right)$$

en posant $C = 1 + \dfrac{1}{1 - \alpha^{-2}}$ et $D = \alpha . C^{1/2}$ , On obtient

1. $\left(c_{2i} - \sum_{r=0}^{p} r^{2i} a_r^p\right)^2 < \epsilon.C \quad , i \leq n-1$
2. $|a_r^p| < \dfrac{D}{S(r)} \quad , r \leq p$

soient $\{\epsilon_k\}_k$ une suite de nombres strictement positifs qui converge vers zéro et $\{n_k\}_k$ une suite strictement croissante de naturels. Soit $p_k$ un entier satisfaisant 1.6 pour $\epsilon = \epsilon_k$ et $n = n_k$, soit $N_0 = \{p_k; \quad k \in \mathbb{N}\}$. pour tout sous-ensemble infini $N_1$ de $N_0$ il existe un sous-ensemble infini $N_2$ de $N_1$ tel que pour tout $r \in \mathbb{N}\{a_r^p\}_{p\in\mathbb{N}_2}$ soit convergente vers $a_r^*$. ($\alpha > 1$ fixé).
On peut montrer que
" La classe des fonctions périodique

$$P(\gamma) = \{g; \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{'} cosnx + b_n^{'} sinx \quad et \quad \exists B' \in \mathbb{R} \quad tq \quad \max\{|a_n^{'}|, |b_n^{'}|\} < B'e^{-\gamma(n)}\}$$

où $\gamma$ une fonction continue sur $[1, \infty[$ telle que $t\gamma'(t)$ tend en croissant vers l'infini lorsque $t$ tend vers l'infini est quasi-analytique si et seulement si $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\gamma(t)}{t^2}dt$ diverge".
Supposons de plus que $\{M_n^{1/n}\}_n$ croît vers l'infini.
En prenant pour $\gamma(t) = \log(S(t))$ on a $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\gamma(t)}{t^2}dt = \infty$ et $\gamma'(t) = \dfrac{A}{2}\dfrac{n(t/A)}{t}$ où $n(r)$ est la plus petite valeur $m \in \mathbb{N}$ telle que $T(r) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{r^n}{M_n} = \dfrac{r^m}{M_m}$.
Les conditions sur $\gamma$ sont alors vérifiées et $P(\gamma)$ est une classe quasi-analytique périodique qui a pour élément $f$ et $g$ : $g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n^* \, cos(nx)$, vu les inégalités (2). De plus, les inégalités (1) montrent que $g^{(r)}(0) = f^{(r)}(0) \quad \forall r \in \mathbb{N}$, par conséquent $f = g$ et $a_{rp}^p$ converge vers $a_r$ pour tout naturel $r$.

**Remarque 2.1.**
*La méthode qu'on vient de présenter n'est pas exactement celle de C.de la Vallée-Poussin. Ce dernier n'a pas imposé l'inégalité 1.6 et de ce fait n'obtient que l'existence d'une sous-suite de $\{a_r^p\}_p$ qui converge vers $a_r$ pour tout naturel $r$.*

### 2.5.2 Méthode de T.CARLEMAN

Nous avons utilisé **[12]** comme référence de ce paragraphe
Soit $\{c_n\}_n$ une suite de nombres et supposons qu'il existe $f \in C(M, I), I = [0, 1]$, telle que $f^{(n)}(0) = n!\, c_n$ pour tout naturel $n$.
On propose de détermner une suite de fonctions qui convergent uniformément vers $f$ sur $I$ ainsi que leurs dérivées successives.
La classe $C(M, I)$ étant quasi-analytique on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\beta_n} = \infty$, il est alors facile de construire

une suite $\{\alpha_n\}_n$ telle que : $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n} = \infty$ et $\dfrac{\alpha_n}{\beta_n} = \infty$ croit vers l'infini avec $n$.
Posons $\gamma_n = \left(\dfrac{1}{\alpha_n}\right)^{2n}$ Soit $f_n$ la fonction qui minimise $I_n(g) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \gamma_k \int_0^1 |g^{(k)}(x)|^2 dx$ et qui vérifie les conditions $f_n^{(k)}(0) = k!c_k \quad k \in \{0, ..., n-1\}$ alors $f_n$ est la suite de fonctions cherchée.
De plus Carleman montre l'existence de réels $\omega_{n,m}$ tq $n, m \in \mathbb{N}$ (le procédé de calcul des $\omega_{n,m}$ est explicite dans sa démonstration) tel que toute fonction $f \in C(M, I)$ se présenter par $f(x) = \lim\limits_{m=0}^{n-1} \omega_{n,m} c_m x^m$ la convergence étant uniforme et $m!c_m = f_0^m$ T.Carleman affirme ce dernier résultat sans toutefois l'avoir démontré. Au passage Carleman enonce le théorème suivant :

**Théorème 2.3.** *[1]*
*Etant donné un nombre positif $\epsilon$ on peut trouver un nombre entier $N$ et une quantité positive $\delta$ (ne dépent que de $\epsilon, ketM_0, M_1, ..., M_n$) tels que les inégalités*

$$|f^{(v)}(x)| \leq k^v M_v \qquad a \leq x \leq b$$
$$|f^{(v)}(a)| \leq \delta \quad pour \quad 0 \leq v \leq N$$

*entraînent*

$$|f(x)| < \epsilon \quad pour \quad a \leq x \leq b$$

*pour vu que $C(M, [a, b])$ soit quasi-analytique*
*Théorème qui a été depuis démontré par Bang et Mandelborojt*

### 2.5.3 Compléments, 1er Algorithme, 2ème Algorithme

## Compléments

Soit $C_2(M, I)$ l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables sur l'intervalle $I$ telles qu'il existe deux nombres $A$ et $B$ tels que pour tout naturel $n$,
$||f^{(n)}||_2 \leq B\, A^n\, M_n \qquad$ où $\qquad ||g||_2 = \left[\int_I |g(x)|^2 dx\right]^{1/2}$.

Il serait naturel d'utiliser la méthode de Carleman dans ces classes de fonctions.

**Théorème 2.4.** *[1]*
*La classe $C_2(M, I)$ est quasi-analytique si et seulement si $\sum \dfrac{a}{\beta_n}$ diverge avec $\beta_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} (M_{n+r})^{1/(n+r)}$*

**Démonstration**

donnons le lemme de Carleman suivant :

**Lemme 2.3.** *[1]*
*une condition nécéssaire et suffisante pour que toute fonction analytique $\phi$ dans le demi-plan, réel $z > a$ et qui satisfait aux inégalités $|\phi(z)| \leq \dfrac{M_n}{|z|^n}$ soit identiquement nulle est que*

$$\int_1^{\infty} \log\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{M_n}\right) \frac{dr}{r^2} \quad \textit{diverge}$$

**Preuve 2.4.** *Ceci dit montrons la suffisance par l'absurde.*
*Supposons qu'il existe $x_0 \in I$ et $f \in C_2(M, I)$ tels que $f \neq 0$ et $f^{(n)}(x_0) = 0$ pour tout naturel $n$.*
*Quitte à faire une transformation affine on peut supposer que $I = [0, 1]$ et que $x_0 = 0$. On peut aussi supposer que $f'' \in C_2(M, I)$ quitte à remplacer $f(x)$ par $\int_0^x \int_0^\tau f(t)\, dt\, d\tau$.*
*La fonction $g(x) = f(4x(x-1))$ est non identiquement nulle vu que*

$$\begin{aligned} &[0,1] \to [0,1] \\ &[0,1] \to 4x(x-1) \end{aligned}$$

*est surjective et que $f$ est non identiquement nulle. De plus, $g$ vérifie :*

1. *$g^{(n)}(0) = g^{(n)}(1) = 0$ pour tout naturel $n$*
2. *$g \in C_2(M, I)$*

*Comme nous l'avons supposé que $f^{(n)}(0) = 0$ et comme on a $g(x) = f(4x(x-1))$ alors $g^{(n)}(x) = f^{(n)}(4x(x-1))$, donc pour $x = 0$ on a $g^{(n)}(0) = f^{(n)}(0) = 0$ , et pour $x = 1$ on a $g^{(n)}(1) = f^{(n)}(0) = 0$*
*montrons le second.*
*Tout d'abord montrons que $||f^{(n-p)}||_2 \leq \dfrac{1}{(p-1)!} ||f^{(n)}||_2$*
*Ceci pour tout $p \leq n$*

$$f^{(n-p)}(x) = \int_0^x f^{(n-p+1)}(t)dt = \frac{1}{(p-2)!} \int_0^x (x-t)^{(p-1)} f^{(n)}(t)dt$$

*En appliquant l'inégalité de Schwarz il vient*

$$\begin{aligned} ||f^{(n-p)}||_2^2 &= \int_0^1 \frac{1}{((p-2)!)^2} \left| \int_0^x (x-t)^{(p-1)}\, f^{(n)}(t)\, dt\right|^2 dx \\ &\leq \frac{1}{((p-2)!)^2} \int_0^1 \int_0^x (x-t)^{2(p-1)} dt \int_0^1 |f^{(n)}(t)|^2 dt dx \\ ||f^{(n-p)}||_2^2 &\leq \frac{1}{((p-2)!)^2 . 2(p-1).(2p-1)} ||f^{(n)}||_2^2 \quad \leq \quad \frac{1}{(p-1)!^2} ||f^{(n)}||_2^2 \end{aligned}$$

*Rappelons l'identité entre séries formelles suivante :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} \left( \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_m}{m!} x^m \right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k}{k!} x^k \qquad \textit{avec}$$

$$\frac{C_k}{k!} = \sum_{n=0}^{k} \frac{a_n}{n!} \sum \frac{(\sum_{m=1}^{k} i_m)!}{\prod_{m=1}^{k} i_m!} \prod_{m=1}^{k} (\frac{b_m}{m}) i_m \qquad \textit{et} \qquad \sum_{m=1}^{k} i_m.m = k$$

*On a en particulier l'identité avec* $a_k = h^{(k)}$ , $b_k = f^{(k)}(h(x))$ *et* $C_k = (f \circ h)^{(k)}(x)$. *Posons* $a'_n = a_n \dfrac{(k-n)!}{k!}$ , $b^*_n = |b_n|$ , $a^*_n = \dfrac{k!}{(k-n)!}$ *pour* $n \leq k$ *et* $a^*_n = 0$ *si* $n>k$

*On a* $|\dfrac{C_k}{k!}| \leq [\max_{n=0}^{k} |a'_n|] . \dfrac{C^*_k}{k!}$ *avec*

$$\frac{C^*_k}{k!} = \sum_{n=0}^{k} \frac{a^*_n}{n!} \sum \frac{(\sum_{m=1}^{k} i_m)!}{\prod_{m=1}^{k} i_m!} \prod_{m=1}^{k} (\frac{b^*_m}{m}) i_m \qquad \textit{et} \qquad \sum_{m=1}^{k} i_m.m = k$$

*On remarque alors que*

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{C^*_\ell}{\ell!} x^\ell = \sum_{n=0}^{k} \frac{a^*_n}{n!} P^{*(x^n)} \qquad \textit{avec} \qquad P^*(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b^*_n}{n!} x^n$$

$$\textit{Comme} \quad \frac{a^*_n}{n!} = \frac{k}{n} \quad \textit{il vient que} \quad \sum \frac{C^*_\ell}{\ell!} x^\ell = (1 + P^*(x))^k$$

**Définition 2.2.** *[1]*
*Soient* $A(x) = \sum A_m x^m$ *et* $B(x) = \sum B_m x^m$ *deux séries formelles, on note* $A(x) \leq B(x)$ *si pour tout* $m, A_m \leq B_m$.

Il est aisé de voir que si $A(x) \leq B(x)$ alors $\dfrac{d}{dx} A(x) \leq \dfrac{d}{dx} B(x)$ et que si $A(x)$ et $B(x)$ ont de plus leurs coefficients positifs alors $(A(x))^k \leq (B(x))^k$ pour tout naturel $k$ .
Ceci dit, prenons $h(x) = 4x(x-1)$, $P^*$ est un polynôme de degré 2.
Soit $M = \max_{m=0}^{2} \dfrac{\| h^{(m)} \|_\infty}{m!} = 8$. Il est clair que $1 + P^*(x) \leq M(1+x)^2$ et que $(1 + P^*(x))^k \leq M^k (1+x)^{2k}$.
On a donc

$$C^*_k \leq M^k \, 2k \, (2k-1)...(2k-(k-1))$$

donc

$$\begin{aligned} |C_k| &\leq \left( \max_{n=0}^{k} |a_n| \, (k-n)! \right) \cdot M^k \frac{2k(2k-1)\dots(2k-(k-1))}{k!} \\ &\leq (2eM)^k \max_{n=0}^{k} |a_n| \, (k-n)! \end{aligned}$$

La dernière inégalité étant obtenue à l'aide de la formule de Stirling, on obtient :

$$|g^{(k)}(x)|^2 \leq (2eM)^{2k} \max_{n=0}^{k} |f^{(n)}(4x(x-1))(k-n)!|^2$$
$$\int_0^1 |g^{(k)}(x)|^2 \leq (2eM)^{2k} \max_{n=0}^{k} (k-n)!^2 \int_0^1 |f^{(n)^2}(4x(x-1))|dx$$

or

$$|f^{(n)}(4x(x-1)| \leq \int_0^{4x(x-1)} |f^{(n+1)}(t)|dt \leq \int_0^1 |f^{(n+1)}(t)|dt$$
$$\leq \| f^{(n+1)} \|_2$$

en utilisant 1e fait que $\| f^{(n+1)} \|_2 \, (k-n)! \leq ||f^{(k+2)}||_2$ il vient que

$$\| g^{(k)} \|_2 \leq (2eM)^k \max_{n=0}^{k} (k-n)! \ \| f^{(n+1)} \|_2 \leq (2eM)^k \ \| f^{(k+2)} \|_2$$

qui montre que $g \in C_2(M, I)$.

On considère $\phi(Z) = \int_0^1 g(t)e^{-Zt}dt$ qui est une fonction entière, en intégrant par partie il vient que

$$\phi(Z) = \int_0^1 \frac{g^{(n)}(t)}{Z^n} e^{-Zt}dt$$

et donc

$$|\phi(z)| \leq \frac{1}{|Z|^n} \int_0^1 |g^{(n)}(t)|dt \leq \frac{M_n}{|z|^n}$$

dans le demi-plan rêel $Z > 0$ donc d'après le lemme de Carleman $\phi$ devrait être identiquement nulle ce qui implique que g est identiquement nulle,ce qui conduit à une contradiction. Si $\int_1^\infty \log \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{r}^n}{M_n} \right) \frac{dr}{r^2}$ converge d'après le thêorème de Denjoy-Carleman, il existe $f \in C(M, I)$ non identiquement nulle et $x_0 \epsilon$ I telle que $f^{(n)}(x_0) = 0$ pour tout naturel $n$, et il est facile de vérifier que $f \in C_2(M, I)$ d'ou le théorème.

**Remarque 2.2.**
*Soit $p \in [1, \infty[$. Si $C_p(M, I)$ désigne l'ensemble des fonctions $f$ telles qu'il existe A et B vérifiant pour tout $r \in N$*

$$\left| \int_I |f^{(r)}(t)|^p dt \right|^{1/p} \leq AB^r M_r$$

*alors, en reprenant la démonstration précédente, on peut montrer que la classe $C_p(M, I)$ est quasi-analytique si et seulement si la classe $C(M, I)$ est quasi-analytique.*

*Voici deux algorithmes théoriques de reconstruction d'une fonction dans une classe quasi-analytique inspirées de la méthode de Carleman.*

*Dans la suite, on se fixe $\{C_n\}_n, C_n \in \mathbb{C}$ et $\{M_n\}_n, M_n > 0$ deux suites de nombres et on suppose que $\sum \beta_n^{-1}$ diverge, $\beta_n = \inf_{r \in \mathbb{N}} (M_{n+r})^{1/(n+r)}$* −26−

# $1^{er}$ Algorithme de prolongement

Nous avons utilisé **[12]** comme référence de ce paragraphe
On se propose de résoudre le problème suivant :
Existe-t-il $f$ appartenant à la classe quasi-analytique $C_2(M, I),\ I = [0, 1]$, telle que $f^{(n)}(O) = n!\, C_n\ \forall n \in \mathbb{N}$. Dans l'affirmative déterminer une suite de fonctions $\{g_n\}_n$ qui convergent uniformément vers $f$ sur $I$ ainsi que toutes leurs dérivées.

**Définitions 2.1.** *[1]*

— *Pour tout naturel $n, V_n$ désignera 1'ensemble des fonctions $g, n-1$ fois continûment dérivables, de dérivée $n^{ème}$ de carré intégrable et qui satisfont*

$$g^{(r)}(0) = r!\, c_r, \quad 0 \leq r \leq n-1$$

— *Pour tout $\varepsilon > 0, \quad n \in \mathbb{N}$ et $g \in V_n$ on définit*

$$J_n(\varepsilon, g) = \sum_{m=0}^{n} \frac{\varepsilon^{2m+1}}{M_m^2} \int_0^1 |g^{(m)}(t)|^2 dt$$

— *Soit* $\mathrm{J_n}(\varepsilon) = \min\{\mathrm{J_n}(\varepsilon, g); g \in \mathrm{V}_n\}$ *Soit $C$ un nombre strictement plus grand que* 1.

**Remarque 2.3.**
*Carleman a montré que quelque soit $n$ et $\varepsilon > 0$ il existe un unique élément de $V_n$ qui minimise $J_n(\varepsilon, g)$.*

**Description de 1'algorithme**

— Déterminer $k_1 = min\left\{k; k \in Z \quad J_1\left(2^{-k}\right) < C\right\}$
— $\varepsilon_1 = 2^{-k_1}$, déterminer $g_1 \in V_1$ tel que $J_1\left(\varepsilon_1 \cdot g_1\right) = J_1\left(\varepsilon_1\right)$

**Boucle sur** $r$

Au $r+1$ ème pas
— déterininer $k_{r+1} = \min\{k; k \in Z \quad k \geq k_r \ et\ J_{r+1}\left(2^{-k}\right) < C\}$
— $\varepsilon_{r+1} = 2^{-k_{r+1}}$, dêterminer $g_{r+1} \epsilon V_{r+1}$ tel que $J_{r+1}\left(\varepsilon_{r+1}, g_{r+1}\right) = J_{r+1}\left(\varepsilon_{r+1}\right)$

**Théorème 2.5.** *[1]*
*Il existe $f \in C_2(M, I)$ telle que $f^{(n)}(0) = n!C_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ si et seulement si dans l'algorithme précédent la suite $\{k_n\}_n$ est stationnaire.*
*De plus si $\{k_n\}_n$ est stationnaire alors $\left\{g_n^{(k)}\right\}_{n>k}$ converge uniformément vers $f^{(k)}$ pour tout naturel $k$.*

**Démonstration**

On remarque que s'il existe $f \in C_2(M, I)$ telle que $f^{(n)}(0) = n!C_n$ alors il existe $A > 0$ et $B > 0$ tels que $||f^{(k)}\|_2 \leq B \cdot A^k \cdot M_k$ pour tout naturel $k$ et il vient que

$$J_n(\varepsilon) \leq J_n(\varepsilon, f) = \sum_{m=0}^{n} \frac{\varepsilon^{2m+1}}{M_m^2} \parallel f^{(m)} \parallel_2^2 \leq B \sum_{m=0}^{n} \varepsilon^{2m+1} A^{2m} = \frac{1-(A\varepsilon)^{2(n+1)}}{1-(A\varepsilon)^2} B\varepsilon$$

Soit $p = \min \left\{k; A2^{-k} < 1 \text{ et } \frac{2^{-k} \cdot B}{1-\left(A2^{-k}\right)^2} < C\right\}$ on a alors

$$2^{-p} \cdot B \cdot \frac{1-\left(A2^{-p}\right)^{2(n+1)}}{1-\left(A2^{-p}\right)^2} \leq \frac{B \cdot 2^{-p}}{1-\left(A2^{-p}\right)^2} < C$$

par conséquent $\mathrm{J_n}\left(2^{-\mathrm{p}}\right) < \mathrm{C}$ et donc pour tout $n, k_n \leq$ p. $\{k_n\}$ étant une suite croissante, on déduit que $\{k_n\}$ est une suite stationnaire.
Réciproquement si 1a suite $\{k_n\}_n$ est stationnaire il existe $n_0$ tel que quelque soit $n \geq n_0\,, k_n = k$.
Posons $\varepsilon = 2^{-k}$. Pour tout $n \geq n_0$ on a $J_n\left(\varepsilon, g_n\right) < C$
par conséquent pour tout naturel $r \leq n$ on a $\parallel g_n^{(r)} \parallel_2 \leq \sqrt{C/\varepsilon}\, \frac{1}{\varepsilon}\, M_r$.
Les suites $\left\{g_n^{(r)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ sont des ensembles uniformément équicontinus de fonctions pour a norme uniforme sur $I$.
Il existe donc un sous-ensemble infini $N'$ de l'ensemble des naturels tel que pour tout $r \in \mathbb{N}$ , $\left\{g_n^{(r)}\right\}_{n\in N'}$ converge uniformément sur $I$. Soit $h$ la limite de $\{g_n\}_{n\in N'}$.
D'autre part, pour tout $r \in \mathbb{N}$ on a $\parallel g_n^{(r)} \parallel_2 \leq \sqrt{C/\varepsilon} \cdot \varepsilon^{-r} M_r$
par conséquent $\parallel h^{(r)} \parallel_2 \leq \sqrt{C/\varepsilon} \cdot \varepsilon^{-r} M_r$ donc $h \in C_2(M, I)$. Du fait que $g_n^{(r)}(0) = r!C_r$ on a $h^{(r)}(0) = r!C_r, r \in \mathbb{N}$. Par conséquent la fonction cherchée $f$ est égale à $h$.
Montrons enfin que quelque soit $r \in \mathbb{N}, \{g_n^{(r)}\}_n$ converge uniformément vers $f^{(r)}$.
pour cela il suffit de montrer que quelque soit $N_j$ ensemble infini de naturels, il existe $\mathrm{N}_2$ sous-ensemble infini de $N_1$ tel que pour tout $r \in \mathbb{N}, \left\{g_n^{(r)}\right\}_{n\in N_2}$ converge vers $f^{(r)}$.
Soit donc $N_1$ un ensemble infini de naturels et du fait que pour tout $r \in \mathbb{N} \left\{g_n^{(r)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille uniformément équicontine , il existe $N_2$ sous-ensemble infini de $N_1$ tel que quelque soit $r, \left\{g_n^{(r)}\right\}_{n\in N_2}$ converge uniformément vers $g^{(r)}$. Comme pour la fonction $h$, on montre que $g \in C_2(M, I)$ et vérifie $g^{(r)}(0) = C_r r!$, $r \in \mathbb{N}$, et du fait que $C_2(M, I)$ est une classe quasi-analytique, il vient que $g = f$, ce qui achève la démonstration du théorème.

## $2^{me}$ Algorithme de prolongement

Nous avons utilisé **[12]** comme référence de ce paragraphe
On se propose de résoudre le problème suivant :
Existe-t-il $\eta > 0$ et $f \in C_2(M, [0, \eta])$ telle que $f^{(n)}(0) = n!C_n$. Dans 1'affirmative,

construire une suite de fonctions $\{g_n\}_n$ qui converge uniformément vers $f$ sur $[0,\eta]$ ainsi que toutes leurs dêrivées.

**Définitions 2.2.** *[1]*
*Pour tout $\epsilon > 0$ on note :*

- $V_n(\varepsilon)$ *l'ensemble des fonctions $g, n-1$ fois continûment dérivables et de dérivée $n^{\text{ème}}$ de carré intégrable sur $[0,\varepsilon]$, et qui satisfont à $\mathrm{g}^{(r)}(0) = r!C_r$, $0 \leq r \leq n-1$.*
- $K_n(\varepsilon, g) = \displaystyle\sum_{m=0}^{n} \frac{\varepsilon^{2m+1}}{M_m^2} \int_0^{\varepsilon} \left|g^{(m)}(t)\right|^2 dt$
- $K_n(\varepsilon) = \min\{K_n(\varepsilon, g)\,;\, g \in V_n(\varepsilon)\}$ *, et $C > 1$*

**Description de l'Algorithme**

- Déterminer $k_1 = \min\left\{k;\, k \in \mathbb{Z}\,;\, k_1\left(2^{-k}\right) < C\right\}$
- $\varepsilon_1 = 2^{-\mathrm{k}_1}$ déterminer $\mathrm{g}_1 \in \mathrm{V}_1(\varepsilon_1)$ tel que $K_1(\varepsilon_1, g_1) = K_1(\varepsilon_1)$

**Boucle sur r**

Au $r + 1^{\text{ème}}$ étape

- Déterminer $k_1 = \min\left\{k;\, k \in \mathbb{Z}\,;\, k \geq k_r\,;\, k_{r+1}(2^{-k}) < C\right\}$
- $\varepsilon_{r+1} = 2^{-k_{r+1}}$ déterminer $g_{r+1} \in V_{r+1}(\varepsilon_{r+1})$ tel que $K_{r+1}(\varepsilon_{r+1}, g_{r+1}) = K_{r+1}(\varepsilon_{r+1})$

**Théorème 2.6.** *[1]*
*Il existe $n > 0$ et $f \in C_2(M, [O,\eta])$ vérifiant $f^{(r)}(O) = C_r r\,!\, r \in \mathbb{N}$ si et seulement si la suite $\{k_n\}_n$ est stationnaire*
*De plus si $\{k_n\}_n$ est stationnaire, soit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que si $n > n_0$ $k_n = k_{n_0}$ et $\eta = 2^{-k_{n_0}}$, alors pour tout naturel $r$ la suite $\left\{g_n^{(r)}\right\}_n$ converge uniformément vers $f^{(r)}$ sur $[0,\eta]$.*

**Démonstration**

On sait la mème démonstration que celle du théorème précédent.

# Chapitre 3

# Exemples des fonctions appartenant à des classes quasi-analytiques

Il y a peu d'exemples non triviaux de fonctions appartenant à des classes quasi-analytiques dans la littérature

— **Carleman** [12]

Donnons $\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-e^n} \left[ \frac{1}{x - \frac{i}{n}} + \frac{1}{x + \frac{1}{n}} \right]$ et dit que $\phi \in C(M, \mathbb{R})$ où $M_n = (n \log n)^n$ et qu'en fait $\| \phi^{(r)} \|_{\mathbb{R}}$ est de l'ordre de grandeur de $M_r$, en particulier n'est pas analytique.

— **Bernstein** [10]

définissons $\theta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n! \arccos x)}{u^{(n-1)!}}$ où $u > 1$, $\theta \in B(n!, [-1, 1])$, ne peut être prolongée quasi-analytiquement et n'est pas analytique. et cite aussi

$\psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos F(n) \arccos x}{F(n)}$ où $F(0) = 1$ et $F(n+1) = 2^{F(n)}$ pour tout n qui n'est pas dérivable sur I.

**Voici mintenant quelques exemples qui permettent de mettre en évidence les différences entre classes de Bernstein et classes de Carleman.**[1]

— Soit $a(x) = \exp\left(-\frac{1}{x}\right)$, $x \in ]0, 1]$, $a(0) = 0$ $I = [0, 1]$.
a est indéfiniment dérivable sur I, analytique sur $\in ]0, 1]$ et n'appartient a aucune classe quasi-analytique $C(M, I)$.

— Soit $b(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{2^n}{n}\right) \cos(2^n x)$, alors b $\in C(M, I)$ avec $M_n = (n \log n)^n$ et n'est analytique en aucun point.

— Soit $c(x) = \sum_{n=k}^{\infty} \exp\left(-\frac{3n}{\log_p(n)}\right) \cos(3^n x)$, $c \in C(M^p, I)$ avec $M_n^p = \left(n \log_{p+1}(n)\right)^n$, et n'est analytique en aucun point.

**Posons** $T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$ , $x \in [-1,1] = J$.

— Soit $d(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{2^{n^2}}{n}\right) T_{2^{n^2}}(x)$ est indéfiniment dérivable sur J appartient à la classe B $\left(2^{n^2},\ \mathrm{J}\right)$ et n'est analytique en aucun point.

— Soit $e(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{3^n}{\log n}\right) T_3 n(x)$, alors e $\in C(M,J)$ , $M_n = (n \log n)^n$ et n'appartient à aucune classe $B(N,J)$.

— Soit $f(x) = \sum_{n=k}^{\infty} \exp\left(-\frac{3^n}{\log_p(n)}\right) T_3 n(x), f \in C\left(M^p, J\right)$ et n'appartient à aucune classe $B(N,J)$.

— Soit $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 3^{-2rN_n} T_{N_{n+1}}(x)$ avec $N_0 = 1, N_{n+1} = 3^N$ et $r$ un naturel non nul, alors $g \in B(N,J)$ est $r-1$ continûment dérivable mais $g^{(r-1)}$ n'est pas continûment dérivable.

— Soit $h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 3^{-(\log n)N_n} T_{N_{n+1}}(x), N_n$ défini ci-dessus, $h \in B(N,J)$ est indéfiniment dérivable et n'appartient à aucune classe Q.A $C(M,J)$.

# Démonstrations

**$\mathbf{b} \in \mathbf{C}(\mathbf{M},\mathbf{I})$ est n'est analytique en aucun point**

Soit $u_n(r) = 2^{r \cdot n} \exp\left(-\frac{2^n}{n}\right)$ , $\theta_n(r) = \log \frac{u_{n+1}(r)}{u_n(r)}$ , $A(r) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(r)$

alors $\| b(r) \| \leq A_r$ et $\theta_n(r) = r \log 2 - \frac{2^n}{n+1}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot$

Soit n la partie entière de $-\frac{\log(r) + \log_2(r)}{\log 2} - 1\cdot$ Pour tout $n \geq n_1 + 1$ on a

$\frac{2^{n-1}}{n-1} \geq \log 2 \frac{r \log r}{\log r + \log_2(r)}$ vu que $\frac{2^t}{t}$ croit pour $t = \frac{1}{\log 2}$.

On a alors $\theta_n(r) = r \log 2 - 2\frac{2^{n-1}}{n-1}\frac{n-1}{n+1}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \leq r \log 2 \left[1 - 2\frac{\log(r)}{\log(r) + \log_2(r)}\left(1 - \frac{\log 2}{\log(r)}\right)\right]$

par conséquent il existe $r_0 > \frac{2}{\log 2}$ tel que pour tout $r \geq r_0$, $\theta_n(r) < -r\frac{\log 2}{2}$.

Posons $n_1 = n_r + 1$.

$$A(r) = \sum_{n \leq n_r} u_n(r) + \sum_{n > n} u_n(r) < \sum_{n \leq n} u_n(r) + \sum_{n > n} u_n(r) e^{-n\frac{\log 2}{2}}$$

$$< \sum_{n \leq n_r} u_n(r) + u_{n_1}(r) \frac{2^{-\frac{n_1}{2}}}{1 - 2^{-\frac{1}{2}}} < \frac{1 + 2^{-\frac{n_1}{2}}}{1 - 2^{-\frac{1}{2}}} \sum_{n \leq n_r} u_n(r)$$

Posons $\alpha = \frac{2}{1 - 2^{-1/2}}$

$$A(r) < \alpha \sum_{n \leqslant n_1} 2^{r \cdot n} \exp\left(-\frac{2^n}{n}\right) < \alpha \cdot n_1 \cdot 2^{r \cdot n_1} \leq 4^r \cdot \alpha \frac{\log r + \log_2(r)}{\log 2} (r \log r)^r$$

Ceci montre l'existence d'un nombre $\beta$ tel que pour tout naturel $r > 1, A(R) \leq \alpha\beta^r (r \log r)^r$ donc $b \in C(M, I)$.

Afin de montrer que b n'est analytique nulle part, considérons $B(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{2^n}{n}\right) z^{2^n}$.

$B$ est une série qui converge uniformêment sur le disque unité fermé $\bar{D}$, et d'après le théorème d'Hadamard sur les sêries lacunaires, le cercle unité $S$ est une frontière naturelle pour la fonction analytique $B$.

Signalons le

**Lemme 3.1.**
*Soit $F(z)$ une fonction analytique sur le disque ouvert $D$, continue sur $\bar{D}$ et telle que le cercle unité $S$ soit une frontière naturelle pour $F$, alors $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = Re\,[F(\exp(ix))]$ n'est analytique en aucun point.*

## Démonstration

Il suffit de montrer que $f$ n'est pas analytique en 0, la démonstration en les autres points étant similaire. Supposons le contraire. Soit $G(z) = f(-i \log z)$ , $\log z = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-z)^n}{n}$, il existe un voisinage ouvert connexe $V$ de 1 sur lequel $G$ est analytique.
Puisque $Re(F(z) - G(z)) = 0$ pour tout $z \in V \cap S$ , par le principe de symétrie de Schwarz, il existe un prolongement analytique $H$ de $F(z) - G(z)$ sur un voisinage de 1. Alors, de $F(z) = G(z) + H(z)$, au voisinage de 1 on conclut que 1 est un point régulier de $F$, contradiction, ce qui achève la démonstration du lemme.
Comme $b(x) = Re(B(\exp ix))$ on déduit que $b$ n'est analytique en aucun point.

### $\mathbf{c} \in \mathbf{C}\,(\mathbf{M^p}, \mathbf{I})$ et n'est analytique en aucun point

Même démonstration que précédemment sauf qu'il faut remplacer $n_r$ par

$$k_r = \frac{\log r + 1 \log_{p+1}(r)}{\log 3} - 1$$

### $\mathbf{d} \in \mathbf{B}\left(\mathbf{2^{n^2}}, \mathbf{J}\right)$ est indéfiniment dérivable et n'est pas analytique nulle part

On a $E_{2^{n^2}}(d, J) \leq \sum_{r=n+1}^{\infty} \exp\left(-\frac{2^{r^2}}{r}\right) \leq \sum_{r > 2^{n^2}} \exp(-r) < ee^{-2^{n^2}}$
vu que $\frac{2^{(r+1)^2}}{r+1} = 2^{r^2} \frac{2^{2r+1}}{r+1} > 2^{r^2}$, donc $d \in B\left(2^{n^2}, J\right)$ qui est une classe stable pour la

dérivation.
D'autre part, $d(\cos x) = Re\left(\sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{2^{n^2}}{n}\right) z^{2^{n^2}}\right)$ qui avec le lemme montre que d n'est analytique en aucun point.

**$\mathbf{e \in C(M,J)}$ et n 'appartient à aucune classe $\mathbf{B(N,J)}$**

Rappelons $1'$ inéga1ité de V.A. Markov

$$\| p(r) \|_J \leq \frac{n^2\,(n^2-1)\ldots(n^2-(r-1)^2)}{1.3\ldots\ldots(2r-1)} \;\| P \|, \quad j=[-1,1]$$

et $P$ polynôme de degrê au plus n' ! .

$$e(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \exp\left(-\frac{3^n}{\log n}\right) \mathrm{T}_{3^n}(x)$$

$$\left|e^{(r)}(x)\right| \leq A(r) = \frac{1}{r!}\sum_{n=2}^{\infty} u_n(r) \quad \text{avec} \quad u_n(r) = 3^{2nr}\exp\left(-\frac{3^n}{\log n}\right)$$

$$\text{Soit} \qquad \theta_n(r) = \log\frac{u_{n+1}(r)}{u_n(r)} = 2r\log 3 - \frac{3^n}{\log n}\left[3\frac{\log(n+1)}{\log n} - 1\right]$$

$$\text{Posons} \quad m_r = \frac{\log r + \log_3 r}{\log 3} - 1 \quad , \quad \text{de} \left(\frac{3^t}{\log t}\right)' = \left(\log 3 - \frac{1}{t\,\log t}\right)\frac{3^t}{\log t}$$

il vient qu'il existe $r_o$ tel que si $r > r_o$ et $n \geq m_r + 1$

$$\theta_n(r) < 2r\log 3 - \frac{3r\log_2 r}{\log\left(\frac{\log r + \log_3 r}{\log 3}\right)}(3-1) \to -\infty \quad \text{lorsque} \quad r \to \infty$$

par conséquent il existe $r_1 > r_o$ tel que quelque soit $r > r_1$ et $n > m_r, \theta_n(r) < -1$.
Soit $m$ la partie entière de $m_r + 2\cdot$

$$A(r)r! \leq \sum_{n\leq m_r} u_n(r) + u_{m_1}(r)\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n} \leq \frac{1+e^{-1}}{1-e^{-1}}\sum_{n\leq m_1} u_n(r)$$

$$A(r) \leq \text{cste}\,\frac{m_1}{r!}3^{2rm_1} \leq 9^r \cdot \text{cste}\cdot\frac{\log r + \log_3(r)}{\log 3}\frac{1}{r!}r^{2r}\left(\log_2 r\right)^{2r}$$

En utilisant la formule de stirling il est facile de voir qu'il existe une constante $C$ telle que

$$A(r) < C^r\left(r\log_2^2 r\right)^r \leq C^r(r\log r)^r$$

ce qui montre que e $\in C(M,J)$.
Montrons que $e \notin B(N,J)$ pout tout $N$. Pour tout naturel $m > 0$ il existe un naturel $r$ tel que $3^r \leq m < 3^{r+1}$.

Soit $P_m = \sum_{n=0}^{r} \exp\left(-\frac{3^n}{\log(n)}\right) T_{3^n}(x), P_m$ est un polynôme de degré au plus m.
Si maintenant $x = \cos\left(\frac{\pi k}{3^{(r+1)}}\right)$ avec $k$ naturel $k \leq 3^{r+1}$, alors

$$(f - P_n)(x) = (-1)^k \sum_{n=r+1}^{\infty} \exp\left(-\frac{3^n}{\log n}\right) = (-1)^k \parallel f - P_m \parallel_J$$

et on utilise le théorème suivant :

"P est le polynôme de meilleure approximation de degré au plus m de f sur J si et seulement s'il existe $x_0 < x_1 < \ldots < x_{\mathrm{nm}+1}$, éléments de J, tels que

$$|(f - P_m)(x_i)| = E_m(f, J) \quad \text{et} \quad (f - P_m)(x_j) = -(f - P_m)(x_{j+1})$$

pour tout naturel $\mathbf{j} \leq \mathrm{m}''$

pour conclure que $E_m(e) = \sum_{n=r+1}^{\infty} \exp\left(-\frac{3^n}{\log n}\right) > \exp\left(-\frac{3(r+1)}{\log(r+1)}\right)$
$(E_m(e))^{1/m} > \exp\left(-\frac{3^{(r+1)}}{m\log(r+1)}\right) > \exp\left(-\frac{3}{\log(r+1)}\right)$

la dernière quantité tendant vers 1 lorsque m tend vers L'infini on déduit que $e \notin B(N, I)$ pour tout $N$.

**$\mathbf{f} \in \mathbf{C}\left(\mathbf{M^P}, \mathbf{J}\right)$ et n'appartient à aucune classe $B(N, J)$**

La démonstration est semblable à la précédente sauf qu'il faut remplacer $m_r$ par $\ell_r = \frac{\log r + \log_{p+3}(r)}{\log 3}$

**$\mathbf{g} \in \mathbf{B}(\mathbf{N}, \mathbf{J})$ est $\mathbf{r-1}$ fois continûment différentiable et ne l'est pas r fois**

On a les résultats :

$$\left|T_n^{(r)}(x)\right| \leq T_n^{(r)}(1) = \frac{n^2\left(n^2 - 1^2\right) \cdot \cdots \cdot \left(n^2 - (r-1)^2\right)}{1 \cdot 3 \cdots (2r-1)} \text{ pour tout } x \in J$$

$$g^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 3^{-2rN_n} T_{N_{n+1}}^{(k)}(x) \quad \text{et comme pour } k \leq r-1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3^{-2rN_{n-1}} \frac{N_n^2\left(N_n^2 - 1^2\right) \cdots \left(N_n^2 - (k-1)^2\right)}{1.3 \cdots (2k-1)} \leq \sum_{n=2}^{\infty} 3^{-2rN_{n-1}} N_n^{2(r-1)}$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} 3^{-2r} N_n 3^{2(r-1)} N_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} 3^{-2} N_n \leq \frac{1}{2}$$

On déduit que g est r-1 fois continûment dérivable.

Soit $h \in ]0,1[$ on a $\dfrac{\mathrm{T}_{\mathrm{n}}^{(r-1)}(1)-\mathrm{T}_{\mathrm{m}}^{(r-1)}(1-h)}{\mathrm{h}}>0$ et de

$$\frac{g^{(r-1)}(1)-g^{(r-1)}(1-h)}{h}=\sum_{n=1}^{\infty}3^{-2rN_n}\frac{\mathrm{T}_{\mathrm{N_n}}^{(r-1)}(1)-\mathrm{T}_{\mathrm{N_n}}^{(r-1)}(1-h)}{\mathrm{h}}$$

Il vient

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{g^{(r-1)}(1)-g^{(r-1)}(1-h)}{h}=\sum_{n=1}^{\infty}3^{-2rN_n}T_{N_{n+1}}^{(r)}(1)=\infty$$

**$\mathbf{h \in B(N,J)}$ est indéfiniment dérivable et n'appartient a aucune classe $\mathbf{Q.A\ C(M,J)}$**

$$\mathrm{E_{N_n}}(h,\ \mathrm{J})=\sum_{\mathrm{r=n}}^{\infty}3^{-(\log r)N_{\mathrm{r}}}\leq 3^{-(\log \mathrm{n})\mathrm{N_n}}\sum_{\mathrm{r=0}}^{\infty}3^{-r}$$
$$\leq\frac{3}{2}3^{-(\log n)\cdot N_n}$$

$(\mathrm{E_{N_n}}(h,J))^{1/N_n}<2\cdot 3^{-\log n}$ qui tend vers zéro lorsque $n$ tend vers l'infini donc $h\in B(N,J)$.

On remarque que

$$\left|h^{(r)}(x)\right|\leq h^{(r)}(1)=\sum_{n=1}^{\infty}3^{-(\log n)N_n}T_{N_{n+1}}^{(r)}(1)$$

Soit $n_r$ un entier tel que $e^r<n_r<e^r+1$ alors

$$h^{(r)}(1)\geq\left(3^{-\log(e^r+1)N_{n_r}}\cdot\left(3^{2\cdot N_{n_{r-1}}}\right)\cdot\left(3^{2\cdot N_{n_r}}-2\right)\ldots\left(3^{2\cdot N_{n_r}}-(\mathrm{r}-1)\right)\right)/1.3\ldots(2r-1)$$

donc $h^{(r)}(1)\geq\left(3^{-(r+1)N_{n_r}}3^{2\cdot r\cdot N_{n_r}}\right)/(4r)^r$ soit alors

$a_r=\| h^{(r)}\|_J^{1/2}$ , $a_r\geq\dfrac{3^{\frac{r-1}{r}N_{n_r}}}{4r}\geq 3^{N_{n_{r-1}}}$ et donc $\displaystyle\sum_{\mathrm{r=0}}^{\infty}\frac{1}{\mathrm{a_r}}<\infty$

donc h n'appartient à aucune classe quasi-analytique $C(M,J)$.

# Chapitre 4

# Prolongement quasi-analytique, problème d'unicité, application

**Définition 4.1.** *[1]*
*Soient $I$ un interval1e compact, $C(M,I)$ une classe quasi-analytique au sens de Denjoy-Carleman et $f \in C(M,I)$.*
*On dit que $g \in C(M',J)$ est un prolongement quasi-analytique de $f$ relatif à $C(M,I)$ si*

***i)*** *$J$ est un intervalle compact et $I \subset \mathrm{J}$.*

***ii)*** *Quelle que soit la classe quasi-analytique $C(M'',I)$ telle que $C(M,J) \subseteq C(M'',J)$ il existe une classe quasi-analytique $C(M^\star,J)$ telle que*

$$C(M'',J) \cup C(M',J) \subseteq C(M^*,J)$$

***iii)*** *Pour tout $x \in I, f(x) = g(x)$.*

*On définit de façon analogue la notion de prolongement quasi-analytique relatif à une classe $B(N,I)$.*

**Remarques 4.1.**

- *Si $g_1$ définie sur $I_1$ et $g_2$ définie sur $I_2$ sont des prolongements quasi-analytiques de $f$ relatifs à $C(M,I)$, (respectivement $B(N,I)$) alors pour tout $x \in I_1 \cap I_2$ on a $g_1(x) = g_2(x)$*
- *Soient $I$ et $J$ des intervalles compacts, $I \subset J$, $f \in C(M,I)$ (réspectivement $f \in B(N,I)$), $g \in C(M,J)$ (réspectivement $g \in B(\mathrm{p} \cdot \mathrm{N}, \mathrm{I}), \mathrm{p}$ naturel non nu1), alors si pour tout $\mathrm{x} \in \mathrm{I}$ $g(x) = f(x), g$ est un prolongement quasi-analytique de $f$ relatif à $C(M,I)$ (respectivement $B(N,I)$)*

## 4.1 Procédés constructifs de prolongement quasi-analytique

Soit $I = [a,b]\,, f \in C(M,I)$ (respectivement $B(N,I)$)

$1^{ère}$ **Méthode**

**i)** Déterminer $\varepsilon > 0$ tel qu'il existe un prolongement quasi-analytique $g \in C(M, [a, b+\varepsilon])$, $(resp\ B(pN, [a, b+\varepsilon]))$, relativement à $C(M, I), (resp\ B(N, I))$.
**ii)** Utiliser un procédé de reconstruction de g précédemment étudié.

$2^{me}$ **Méthode**

Voir le 2ème algorithme de reconstruction page(21)
la seule différence de cette méthode avec la méthode précédente est que le choix de $\varepsilon$ se fait au cours de l'algorithme.

## 4.2 Dépendance entre la classe quasi-analytique dans laquel1e on prolonge une fonction, et son prolongement dans cette classe

Signalons tout d'abord deux théorèmes :

**Théorème 4.1.** ***Théorème de S. MANDELBOJT [1]***
*Soit f une fonction indéfiniment dérivable sur I, alors il existe deux fonctions $f_1, f_2$ indéfiniment dérivables telles que :*

***i)*** $\sum_{r=0}^{\infty} ||f_i^{(r)}||^{-1/r}$ *diverge si* $i \in \{1, 2\}$

***ii)*** $f = f_1 + f_2$

**Théorème 4.2.** ***Théorème de MARKUSHEVICH [1]***
*Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue alors il existe deux fonctions continues $f_1, f_2$ telles que*

***i)*** $\lim_{n\to\infty} (E_n(f_i))^{1/n} < 1$ *pour* $i \in \{1, 2\}$

***ii)*** $f = f_1 + f_2$

*De plus, si f est r fois continûment dérivable, alors $f_1$ et $f_2$ peuvent être choisis r fois continûment dérivables.*

**De ces deux théorèmes on peut déduire**

- Qu'il existe deux classes quasi-analytiques C(M,I) et $C(M_2, I), (resp\ B(N_1, I), B(N_2, I))$ qui ne peuvent âtre incluses toutes les deux dans une classe quasi-analytique $C(M, I), (resp\ B(N, I))$.
- Soit f appartenant à la classe quasi-analytique C(M,I) , (resp $B(N, I)$), $J$ un intervalle compact contenant strictement I.
  Soit une classe quasi-analytique $C(M, J), (resp\ B(N', J))$ telle que
  **i)** $C(M, J) \subset C(M', J), (resp\ B(N, J) \subset B(N', J))$
  **ii)** Il existe $g \in (M', J)\,(resp\ g \in B(N', J))$ qui prolonge $f$.

Alors le prolongement $g$ de $f$ dépend en général effectivement de la classe $C(M', J)$, $(resp\ B(N', J))$

— Soit $I = [0, 1]$ il existe une suite $\{C_n\}$, deux classes quasi-analytiques $C(M, I)$ et $C(M', I)$, et deux fonctions $f$ et $g$ telles que
**i)** $f \in C(M, I), \quad g \in C(M', I)$
**ii)** $f^{(n)}(0) = C_n n! = g^{(n)}(0), \quad n \in \mathbb{N}$.
**iii)** $f \neq g$
En particulier le procédé de reconstruction de CARLEMAN d'une fonction dans une classe quasi-analytique $C(M, I)$ fournit une fonction qui dépend effectivement de la classe $C(M, I)$.

— Soit $I = [a, b], \tau_o \in [a, b]$ il existe deux classes $B(N, I)$ et $B(N', I)$, $u$ définie sur $[a, \tau_0]$, et deux fonctions $f$ et $g$ telles que
**i)** $f \in B(N, I), g \in B(N', I)$
**ii)** $f(x) = g(x) = u(x)$ pour tout $x \in [a, t_0]$.
**iii)** $f \neq g$.
En parriculier le procédé de reconstruction d'une fonction dans une classe de BERNSTEIN B $(N, I)$ fournit une fonction qui dépend effectivement de la classe $B(N, I)$.

## 4.3 Critiques des procédés de reconstruction dans les classes de carleman et problèmes ouverts

Soient $\{c_n\}_n$ une suite de nombres réels et $A > 0$.
Supposons qu'il existe $f \in C(M, I)$ telle que
**i)** $\| f^{(n)} \|_I \leq A^n M_n, \ n \in \mathbb{N}$
**ii)** $f^{(\mathrm{n})}(0) = C_n n!, \quad n \in \mathbb{N}$.

**1)** procédé de Carleman fournit une suite de fonctions $g_n$ qui convergent uniformément vers $f$ sur I ainsi que leurs dérivées.

— Le calcul de chaque $g_n$ s'obtient en résolvant une équation intégrale de Volterra de deuxième espèce à noyau symétrique.

— Pour tout r $\in \mathbb{N}$ et $\varepsilon > 0$ donnés nous n'avons pas de moyen pour trouver $n \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \leq r$ on ait $\| f^{(k)} - g_n^{(k)} \|_I < \varepsilon$

**2)** Si de plus la fonction est périodique, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$
la méthode de Charles de la Vallée-Poussin fournit pour tout $r \in \mathbb{N}$ des suites $\{a_n^r\}_n$, $\{b_n^r\}_n$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\{a_n^r\}_n$ et $\{b_n^r\}_n$ convergent respectivement vers $a_n$ et $b_n$.

— Les valeurs des suites $\{a_n^{\mathbf{r}}\}_n$ et $\{b_n^r\}_n$ qui en fait satisfont à $a_n^r = b_n^r = 0$ pour tout $n$ assez grand s'obtiennent en minimisant une forme quadratique

— Pour tout $\varepsilon > 0$ nous n'avons pas de procédé pour trouver

$$r \in N \text{ tel que } \quad \left\| f(x) - \sum_n \left(a_n^r \cos(nx) + b_n^r \sin(nx)\right) \right\|_{\mathbb{R}} \leqslant \varepsilon$$

**Voici deux problèmes ouverts**

### Premier problème

Soient $\{C_n\}_n$ une suite de nombres et $A > 0$.
Supposons qu'il existe f $\in C(M, I)$ telle que
**i)** $\left\| f^{(n)} \right\|_I \leq A^n M_n, \quad n \in \mathbb{N}$
**ii)** $f^{(n)}(0) = C_n n!, \quad n \in N$
Pour tout $r \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon > 0$ fixé, Pouvons-nous construire une fonction g telle que pour tout $n \leq r$

$$\| f^{(n)} - g^{(n)} \|_I < \varepsilon.$$

Ce problème admet une solution et que $g$ peut être choisie polynômiale, résultat qui peut être déduit de la démonstration de théorème de Bang

### Deuxième problème

Soient $I = [0, 1], \quad C_2(M, I)$ une classe quasi-analytique

$$\| g \| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{M_n} \int_0^1 |g^n(t)|^2 dt$$

$$H = \{g : \quad g \in C_2(M, I)\,, \| g \| < \infty\}$$

Est-ce que l'ensemble des polynômes est dense dans H pour la norme $\| \quad \|$

## 4.4 Application de prolongement de fonctions analytiques

### Prolongement quasi-analytique d'une fonction analytique à travers sa frontière naturelle

Soient $D = \{z, \mid z \mid < 1\}$

$$F_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{3^n}{\log n}\right) z^{3^n}$$

$$F_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(n-1)!} z^{n!}$$

$F_1$ et $F_2$ sont des fonctions analytiques sur D et continues sur $\bar{D}$, et $\partial D = \{z; |z| = 1\}$ est leur frontière naturelle.

On peut montrer, en reprenant la démonstration concernant l'exemple $c(x)$, page(25) que

$$\left\| F_1^{(r)} \right\|_D \leq A \cdot B^r (r \log r)^r$$

pour tout $r$ et que $1'$ on peut déterminer A et B.

Soient $a \in D$ et $b$ un point frontière de $D$, soit

$$f_1(t) = F_1(bt + (1-t) \text{ a}) \ , \ t \in I = [0,1]$$

il est clair que $f_1 \in C\left((n \log n)^n , \text{I}\right)$.
Si $f_1$ admet un prolongement quasi-analytique sur $[0, 1+\varepsilon]$ $(\varepsilon > 0)$ relatif à C $((\text{n} \log n)^{\text{n}}, \text{I})$ on dira que $f_1(t), t \in ]1, 1+\varepsilon]$ est la valeur du prolongement quasi-analytique de $F_1$ suivant $[a, b]$ en $a \cdot (1-t) + bt$ relatif à la classe $C\left((n \log n)^n, I\right)$
Remarquons d'autre part que $\| F_2(z) - \sum_{n=1}^{r} e^{-(n-1)!} \cdot z^{n!} \| \leq \sum_{n=r+1}^{\infty} e^{-(n-1)!} \leq \dfrac{e}{e-1} e^{-r!}$
Soit $a \in D$ et $b$ un point frontière de $D$, soit $f_2(t) = F_2(bt + (1-t) \text{ a}) \ t \in I = [0,1]$
Il est évident que $f_2 \in B(n!, I)$
Si $f_2$ admet un prolongement quasi-analytique sur $[0, 1+\varepsilon]$ $(\varepsilon > 0)$ relatif à $B(n!, I)$ on dira que $f_2(t), t \in ]1, 1+\varepsilon]$ est la valeur du prolongement quasi-analytique de $F_2$ suivant $[a, b]$ en $a(1-t) + bt$ relatif à la classe $B(N, I)$
Le prolongement quasi-analytique d'une Fonction analytique à travers sa frontière natu-rel1e peut être un moyen de définir en certains points une fonction analytique à $1'$ extérieur de sa frontière naturelle.

## Prolongement analytique le long d'un arc d'une fonction analytique définie par sa série de Taylor en un point

Soit $I = [-1, 1]$, $\gamma : I \to C$ un arc de Jordan analytique, $z_0 = \gamma(-1)$ et $s(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ une série entière de rayon de convergence non nul et supposons que :
**i)** $s(z)$ se prolonge analytiquement le long de l'arc $\gamma$
**ii)** L'on connaisse $r > 0$ tel que pour tout $t$ le prolongement analytique de $s \circ \gamma$ en $t$ ait un développement en série entière de rayon de convergence $r_t > r$.
**iii)** L'on connaisse $\tau_0 \epsilon ] - 1, 1]$ tel que $\gamma([-1, \tau_0])$ soit inclus dans le disque de convergence de $s(z)$ (ouvert). On se propose de trouver une suite de polynômes $p_n$ qui convergent quasi-analytiquement vers le prolongement de $s \circ \gamma$.

# Conclusion

Nous n'avons pas pu donner une solution satisfaisante au problème de prolongement de façon unique une fonction analytique le long d'un segement qui traverse la frontière naturelle de la fonction, car en général le prolongement quasi-analytique dépend de la classe quasi-analytique dans laquelle on a effectué le prolongement.

Enfin, étant donné $s(z) = \sum a_n(z - z_0)^n$ une série entière qui se prolonge analytiquement sur un arc de Jordan analytique $\gamma : I \to \mathbb{C}$, sous certaines hypothèses, nous avons construit une suite de pôlynomes $Q_n$ de degré au plus $n$ qui convergent quasi-analytique vers le prolongement de $s \circ \gamma$.

# Bibliographie


[1] TEIKI PHILIPPE REBOUL, *Classes quasi-analytiques de fonctions et problèmes de prolongement quasi-analytique* , Université Joseph-Fourier - Grenoble ii, 1982

[2] EDWARD BIERSTONE and PIERRE D.MILMAN, *Resolution of singularittes in DENJOY-CARLEMAN classes*, arXiv- Cornell university, 2001

[3] MARIA INFUSINO, *Quasi-analyticity and Determinacy of the Full Moment Problem from finite to infinite dimensions*, National institute of higher mathematics, 2016

[4] HIKOSABURO KOMATSU, *A characterization of ceal analytic functions*, Department of Mathematics, University of Tokyo, 1960

[5] FEDERICA PIERONI, *Sums of squares in quasianalytic Denjoy-Carleman classes*, Selecta Mathematica volume 13, Article number : 321, 2007.

[6] JEAN-MICHEL FERRARD, *Cours de mathématiques*, EduKlub S.A, 2000.

[7] V. SCHLEGEL, *Quelques théorèmes de géométrie à n dimensions*, Bulletin de la S. M. F., tome 10 (1882), p. 172-207

[8] Haim Brezis, *Analyse Fonctionnelle Théorie et applications*, masson, 2010.

[9] EDWIN J. AKUTOWICZ, *Extrapolation and approximation of function given on linear sets of positive capacity*, Math. Zeit. 89, pp.414-419, 1965.

[10] SERGE BERNSTEIN, *leçons sur les propriétés extrémales et la meilleure approximation des fonctions analytiques d'une variable réelle.L'approximation par S.BERNSTEIN et C. de la VALLEE POUSSIN*, CHELSEA publishing company, 1965.

[11] C.de la VALLEE POUSSIN, *On the approximation of functions of a real variable and on quasi-analytic functions*, The Rice Institute, pp 105-172, 1924.

[12] TORSTEN CARLEMAN, *les fonctions quasi-analytiques*, GHAUTHIER-VILLARS, Paris, 1926.