# Résumé

Soit l'équation différentiel :

$$\sum a_\alpha D^\alpha u = f. \tag{1}$$

Une méthode pour résoudre l'équation (1) est de calculer une solution fondamentale de l'opérateur $P(D) = \sum a_\alpha D^\alpha$, une solution fondamental vérifie dans $\mathscr{D}'(\Omega)$ l'équation

$$P(D)E = \delta \tag{2}$$

La transformation de Fourier permet de transformé l'équation (2) de nature différentielle à une équation de nature algébrique :

$$P(\xi)\hat{E} = 1. \tag{3}$$

Les distribution tempérées fournissent un cadre idéal à l'utilisation de la transformation de Fourier .
La solution fondamentale est donnée par

$$E = \overline{\mathcal{F}}(\hat{E}) = \overline{\mathcal{F}}\left[\frac{1}{P(\xi)}\right].$$

Et la solution de (1) sous certaines condition n'est autre que

$$u = E * f.$$


**Mots clé** : Distributions, distributions tempérées, convolution, transformation de Fourier, solution fondamentale.

# Table des matières


**Introduction** **1**

**1 Distribution** **2**

1.1 Introduction . . . . . . . . 2

1.2 Fonction test et dualité . . . . . . . . 3

1.2.1 Espace $\mathscr{D}(\Omega)$ . . . . . . . . 3

1.2.2 Espace $\mathscr{D}'(\Omega)$ . . . . . . . . 5

1.2.3 Convergence dans $\mathscr{D}'(\Omega)$ . . . . . . . . 7

1.3 Opération sur Les distributions . . . . . . . . 8

1.3.1 Translation, Changement d'échelle . . . . . . . . 8

1.3.2 Multiplication par une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ . . . . . . . . 9

1.3.3 Dérivation des distributions . . . . . . . . 12

1.3.4 formule des sauts(cas une variable) . . . . . . . . 15

**2 Distribution à support Compact et Convolution** **17**

2.1 Distribution à Support Compact . . . . . . . . 17

2.2 Convolution . . . . . . . . 19

2.2.1 Produit Tensoriel . . . . . . . . 19

2.2.2 Exemple et propriétés . . . . . . . . 21

2.2.3 Convolution . . . . . . . . 21

2.2.4 Propriétés de la convolution . . . . . . . . 24

**3 Transformation De Fourier** **25**

3.1 Introduction . . . . . . . . 25

3.2 Transformation de Fourier . . . . . . . . 25

3.3 Espaces de Schwartz de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ . . . . . . . . 28

3.3.1 Transformation de Fourier dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ . . . . . . . . 28

3.3.2 Propriétés de la transformation de Fourier dans $\mathscr{S}$ . . . . . . . . 29

3.4 Espace $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ . . . . . . . . 29

3.4.1 Transformation de Fourier dans $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ . . . . . . . . 30

3.4.2 Propriétés de la transformation de Fourier dans $\mathscr{S}'$ . . . . . . . . . . . 30
3.5 Convolution et transformation de Fourier . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 30

**4 Solution fondamentale d'opérateurs différentielles 33**

**Conclusion 36**

**Bibliographie 37**

# Introduction

On introduit dans ce travail la notion de solution fondamentale d'opérateurs différentiels de la forme $P(D) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha D^\alpha$, où $a_\alpha$ sont des coefficients constants, $\alpha \in \mathbb{N}^n$ un multi-indice et $D = \frac{1}{i}\partial$ un opérateur différentiel.

Une solution fondamentale est une fonctionnelle $E$ qui vérifie l'équation suivant : $P(D)E = \delta$, où $\delta$ est la masse de Dirac, d'autre part la recherche de la fonctionnelle $E$ se fait dans $\mathscr{D}'(\Omega)$, l'espace des distributions introduit par L. Schwartz [6],en effet :on dispose dans $\mathscr{D}'(\Omega)$ de tout les outils nécessaire pour le calcul de la fonctionnelle $E$. Une autre approche consiste à utiliser la transformation de Fourier qui va permettre de transformé l'équation $P(D)E = \delta$ à une équation algébrique équivalente de la forme $P(\xi)\hat{E} = 1$, où on a noté $\hat{E}$ la transformation de Fourier de $E$,et $P(\xi)$ est un polynôme de degré $\leq m$.Néanmoins la transformation de Fourier n'est pas toujours définie dans $\mathscr{D}'(\Omega)$, or la restriction en $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ l'espace des distribution tempérées peut contourner cet obstacle, donc on cherche une fonctionnelle tempérée.

Le calcul de la solution fondamentale nous permet la résolution des équations différentielles $P(D)u = f$.Une telle solution est donnée sous certaines conditions par $u = E * f$ autrement dite la solution $u$ est donnée par la convolé de la solution fondamental $E$ et le second membre $f$.

Le programme adopté pour tirer au claire la notion de solution fondamentale est le suivant :

**Chapitre 1** : Dans le chapitre 1 on introduit la notion des distributions, les points essentiels sont la dérivation et la multiplication par des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$.

**Chapitre 2** : Dans le chapitre 2 on introduit un cas particulier des distributions, celle qui sont à supports compacts, et la notion de convolution des distributions.

**Chapitre 3** :Dans Le chapitre 3 on introduit la notion de la transformation de Fourier dans l'étude des équations aux dérivées partielle, le cadre adéquat pour l'utilisation de la transformation de Fourier est l'espace des distributions tempérées, la propriété fondamentale pour la transformation de Fourier est que la dérivation s'échange en une multiplication et ceci permet de transformé les problèmes différentiels aux problème algébrique.

**Chapitre 4** :Dans le chapitre 4 on définit proprement la notion de solution fondamentale et comment grâce à la transformation de Fourier peut-on la calculer.

# Chapitre 1

# Distribution

## 1.1 Introduction

La théorie des Distributions est utiliser au début par les physiciens mais dans un cadre formel. Ainsi par exemple en physique on définie la fonction dite de Dirac par

$$\begin{cases} \delta_x = 0 & \text{si } x \neq 0 \\ \delta_x = \infty & \text{si} x = 0 \\ \int \delta_x \varphi(x) dx = \varphi(0) & \forall \varphi \text{ une bonne fonction} \end{cases}$$

En particulier si $\varphi(x) = 1$ on a $\int \delta_x dx = 1$ et cette définition n'a aucun sens car la fonction $\delta$ étant nulle presque partout, son intégrale doit être nulle. Cependant en mathématique on veut donner un sens à la fonction de Dirac et à d'autre formule similaire et ceci en introduisant des nouveaux objets, et les distribution sont ces nouveaux objets mathématiques. Ainsi une distribution sera définie comme une forme linéaire continue sur un espace de fonctions suffisamment régulières. L'idée de base est de considérer une fonction $f$ comme un opérateur $T_f$ (une fonctionnelle) agissant par intégration sur les fonctions

$$T_f(\varphi) = \int f(x)\varphi(x)dx$$

et pour que cette intégrale aie un sens on doit imposer aux fonctions - tests - $\varphi$ des conditions comme par exemple être nulle en dehors d'un ouvert borné affin de pas avoir le problème de convergence à l'infini et de classe $\mathscr{C}^\infty$ pour généraliser la dérivation. Les outils mathématiques, telle que la dérivation, la convolution et transformation de Fourier, devient via la notion de distribution des outils de grande puissance dans la résolution et l'interprétation des problème physiques, en d'autre terme les distributions sont des outils utiliser pour représenter des phénomènes physique que les fonctions classiques s'avère incapable de représenter et on parle dans ce ces des fonctions généralisées, ou fonctionnelles.

## 1.2 Fonction test et dualité

La notion essentielle pour la théorie des distributions est la notion de dualité.

**Définition 1.2.1** *(Notion De Dualité)*
*Soit $E$ un espace fonctionnel, on définit l'espace dual de $E$ noté $E'$, comme l'ensemble des formes linéaires continue sur $E$, c'est à dire l'ensemble des applications linéaires*

$$\begin{array}{rccc} T: & E & \to & \mathbb{C} \\ & f & \mapsto & \langle T, f\rangle \end{array}$$

*satisfaisant les propriétés suivantes :*

1. *Linéarité : Pour toutes $f,\ g \in E$ et $\lambda,\ \mu \in \mathbb{C}$*

$$\langle T, \lambda f + \mu g\rangle = \lambda\langle T, f\rangle + \mu\langle T, g\rangle.$$

2. *Continuité :*

$$f_n \to f \, dans\ E \Rightarrow \langle T, f_n\rangle \to \langle T, f\rangle \, dans\ \mathbb{C}$$

Un espace des distributions sera le dual d'un espace vectoriel fonction bien choisi, qu'on l'appelle espace des fonctions test, et on verra dans la suite différents espaces de fonctions test.

### 1.2.1 Espace $\mathscr{D}(\Omega)$

Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ (éventuellement $\mathbb{R}^n$ tout entier). On note pour $x \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$

$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n,\ \|y - x\| < r\} \tag{1.1}$$

la boule ouverte de centre $x$ et de rayon $r$.

**Définition 1.2.2** *Si $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction, on appelle support de $f$ noté $supp(f)$ le fermé*

$$supp(f) = \overline{\{x \in \Omega\ :\ f(x) \neq 0\}}$$

*c'est le plus petit fermé sur lequel $f(x) \neq 0$. Autrement dit*

$$x \in supp(f) \Leftrightarrow \forall r > 0,\ \exists\ y \in B(x, r),\ f(y) \neq 0$$

*On a évidemment pour tout $\lambda \neq 0$*

$$supp(\lambda f) = supp(f).$$

*et si $f,\ g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions*

$$supp(f + g) \subset supp(f) + supp(g).$$

**Proposition 1.2.1** *Si $x \notin supp(f)$, alors f est nulle dans un voisinage ouvert de $x$*

$$x \notin \ supp(f) \Leftrightarrow \exists\ r > 0,\ \forall\ y \in B(x,r),\ f(y) = 0 \tag{1.2}$$

**Preuve**. Par définition supp$(f)$ est fermé. Donc si $x \notin$ supp$(f)$ alors $x$ est dans l'ouvert $\complement_{\text{supp}(f)}\mathbb{R}$ donc il existe une boule ouverte $B(x,r) \subset \complement_{\text{supp}(f)}\mathbb{R}$ donc supp$(f) \subset \complement_{B(x,r)}\mathbb{R}$ ■

**Exemple 1.1**
*Dans $\mathbb{R}$ la fonction de Heaviside*

$$H = \mathbb{1}_{[0,+\infty[} = \begin{cases} 1 & si\ x \geq 0 \\ 0 & si\ x < 0 \end{cases}$$

*a pour support $\mathbb{R}_+$*

**Définition 1.2.3** *(Fonction test) On note $\mathscr{D}(\Omega)$ ( ou encore $\mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$) l'espace vectoriel des fonctions définies sur $\Omega$ et à valeur dans $\mathbb{R}$ , indéfiniment dérivable et à support compact*

$$\mathscr{D}(\Omega) = \{f \in \mathscr{C}^\infty(\Omega), \exists K, compact\ inclu\ dans\ \mathbb{R} \ \ telque\ f(x) = 0, \forall x \notin K\}$$

**Lemme 1.2.1** *La fonction $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par*

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{\|x\|^2-1}} & si\ \|x\| < 1 \\ 0 & si\ \|x\| \geq 1 \end{cases}$$

*est dans $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ et $supp(\varphi) = \overline{B(0,1)}$*

**Preuve**. Le fait que supp$(\varphi)$ est dans $\overline{B(0,1)}$ est clair, la fonction est de classe $\mathscr{C}^\infty$ comme composé de deux fonctions de classes $\mathscr{C}^\infty$. On vérifie donc qu'elle est dérivable en 1. On considère le cas $n = 1$, le cas $n \geq 2$ s'ensuit sans peine. Une récurrence directe montre que $\varphi^p(x)$ est de la forme $\dfrac{P_p(x)}{(x^2-1)^{2p}}e^{\frac{1}{x^2-1}}$ pour $|x| < 1$, et 0 pour $|x| \geq 1$. Donc $\varphi$ est de classe $\mathscr{C}^p$ et $\varphi^p(1) = 0$. ■

Pour pouvoir traiter des problèmes relatifs à la continuité des formes linéaires il nous faut définir la convergence sur $\mathscr{D}$. Nous donnons ici une description rapide, pour approfondir la notion de la topologie de ces espaces on peut consulter le livre [1].

**Définition 1.2.4** *On dit qu'une suite $\varphi_j$ de fonction de $\mathscr{D}$ converge vers une fonction $\varphi$ de $\mathscr{D}$ si*

1. *Il existe un compact $K \subset \Omega$ tel que $supp(\varphi_j) \subset K$ pour tous $j$.*
2. *$\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$, $D^\alpha\varphi_j \to D^\alpha\varphi$.*

La notion de convergence pour $\mathscr{D}$ assure sa complétude en d'autre terme $\mathscr{D}(\Omega)$ est un espace complet. Voir le livre de [1].

### 1.2.2 Espace $\mathscr{D}'(\Omega)$

Les distributions sont donc définis par dualité en considèrent pour espace fonctionnelle E l'espace des fonctions test $\mathscr{D}(\Omega)$.

**Définition 1.2.5** *Une forme linéaire $T : \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$ est dite continue si $\lim_{j\to\infty} T(\varphi_j) = T(\varphi)$ pour toute suite de fonction $\varphi_j \to \varphi$ dans $\mathscr{D}(\Omega)$.*

**Définition 1.2.6** *Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ , une distribution sur $\Omega$ est une forme linéaire continue $T : \mathscr{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C}$ On note $\mathscr{D}'(\Omega)$ le dual de $\mathscr{D}(\Omega)$ l'espace vectoriel des distributions sur $\Omega$.*

Une distribution $T$ est donc une application linéaire et continue de $\mathscr{D}$ dans $\mathbb{C}$. Autrement dit : si $\varphi_1,\ \varphi_2 \in \mathscr{D}$, on a

$$T(\varphi_1 + \varphi_2) = T(\varphi_1) + T(\varphi_2)$$

si $\lambda$ est un scalaire et $\varphi \in \mathscr{D}$, on a

$$T(\lambda\varphi) = \lambda T(\varphi)$$

L'addition des deux distribution $T_1$ et $T_2$ et la multiplication d'une distribution par un scalaire sont définis par

$$(T_1 + T_2)(\varphi) = T_1(\varphi) + T_2(\varphi)$$

$$(\lambda T)(\varphi) = \lambda T(\varphi)$$

de ce fait l'espace $\mathscr{D}'$ est un espace vectoriel.
Si $\varphi_j$ est une suite de fonction de $\mathscr{D}$ qui converge vers $\varphi$ au sens de la définition on a

$$\lim_{j\to\infty} T(\varphi_j) = T(\varphi)$$

On note souvent $T(\varphi)$ par $\langle T, \varphi\rangle$ ou $\langle ., .\rangle$ désigne le crochet de dualité $\mathscr{D}' \times \mathscr{D}$.
La proposition suivant dont la preuve est donné dans le livre de [2] donne une caractérisation d'une distribution par les semi normes de $\mathscr{D}(\Omega)$

**Proposition 1.2.2** *Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$, la forme linéaire $T : \mathscr{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C}$ est appelé distribution si pour tout compact $K \subset \Omega$ , il existe un réel $C$ et un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que :*

$$|\langle T, \varphi\rangle| \leq C_K \sum_{|\alpha|\leq N} \sup_{x\in K} |\partial^\alpha \varphi(x)|$$

*pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ avec supp$(\varphi) \subset K$.*

**Remarque 1.2.1** *L'entier $N$ intervenant dans la définition peut dépendre du compact $K$ , lorsque $N$ est valable pour tous les compacts on dit que $T$ est d'ordre $\leq N$.*

**Exemple 1.2** *A tout fonction $f$ de $L^1_{loc}(\Omega)$ , on associée la forme linéaire définie par :*

$$T_f : \varphi \longmapsto \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx, \forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega).$$

*$\forall$ $K$ compact de $\Omega$ et pour tout $\varphi$ à support dans $K$ on a :*

$$|\langle T_f, \varphi\rangle| = |\int_\Omega f(x)\varphi(x)dx| \leqslant \int_K |f(x)||\varphi(x)|dx \leqslant C_K \sup_{x\in K} |\varphi(x)|.$$

*donc $T_f$ est une distribution d'ordre 0 sur $\Omega$.*

**Exemple 1.3** *La masse de Dirac centré en a $\delta_a$ telle que*

$$\forall \varphi \mathscr{D} \ \langle \delta_a, \varphi\rangle = \varphi(a)$$

*$\forall$ $K$ compact de $\Omega$ et pour tout $\varphi$ à support dans $K$ on a*

$$|\langle \delta_a, \varphi\rangle| \leq \sup_{x\in K} |\varphi(x)| = |\varphi(a)|$$

*donc $\delta_a$ est une distribution d'ordre* 0.
*$\delta_a$ n'est pas donnée par un fonction de $L^1_{loc}(\Omega)$.*

**Exemple 1.4** *La fonction $\frac{1}{x}$ n'est pas localement intégrable sur $\mathbb{R}$ , on peut lui associée une distribution appelée valeur principal de $\frac{1}{x}$ notée $v_p(\frac{1}{x})$ par la formule*

$$\langle v_p \frac{1}{x}, \varphi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|x|\geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx$$

*en suppose $K = supp\varphi \subset \{x \in \mathbb{R}.|x| \leq M\}$.*
*On peut écrire :*
$\varphi(x) = \varphi(0) + x\psi(x)$ *ou* $\psi \in C^0(\mathbb{R})$ *et* $\sup_{|x|\leqslant M} |\psi(x)| \leqslant C \sup_{|x|\leqslant M} |\varphi'(x)|$.
*On déduit que*

$$\int_{\varepsilon\leqslant|x|\leqslant M} \frac{\varphi(x)}{x}dx = \varphi(0)\int_{\varepsilon\leqslant|x|\leqslant M} \frac{dx}{x} + \int_{\varepsilon\leqslant|x|\leqslant M} \psi(x)dx$$

$$\int_{\varepsilon\leqslant|x|\leqslant M} \frac{dx}{x} = \int_{-M}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int_{\varepsilon}^{M} \frac{dx}{x} = 0$$

*D'autre part d'après le théorème de convergence dominé de Lebesgue , puisque $\psi \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ :*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\varepsilon\leqslant|x|\leqslant M} \psi(x)dx = \int_{|x|\leqslant M} \psi(x)dx$$

*Donc*

$$|\langle v_p \frac{1}{x}, \varphi\rangle| = |\int_{|x|\leqslant M} \psi(x)dx| \leqslant C \sup_{|x|\leqslant M} |\psi(x)| \leqslant C' \sup_{x\in K} |\varphi'(x)|$$

*Par conséquent $v_p(\frac{1}{x})$ est une distribution d'ordre $\leq 1$.*

**Remarque 1.2.2**

1. *Toute fonction localement intégrable sur* $\Omega$ *s'identifier avec la distribution* $T_f$ *qu'elle définie sur* $\Omega$ *, ceci est du au fait que l'application*

$$T_f : L^1_{loc}(\Omega) \longrightarrow \mathscr{D}'(\Omega)$$

$$f \longmapsto T_f$$

*est injective, et on parle de distribution régulière.*

2. *Les distributions qui ne s'identifie pas à des fonction localement intégrable sont dite singulière c'est le cas pour la valeur principal de* $\dfrac{1}{x}$ *et la masse de Dirac.*

### 1.2.3 Convergence dans $\mathscr{D}'(\Omega)$

La convergence des suites des distribution n'est rien d'autre que la convergence simple.

**Définition 1.2.7** *On dit qu'une suite de distribution* $(T_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *de* $\mathscr{D}'$ *converge dans* $\mathscr{D}'$ *si et seulement si elle converge simplement. Autrement dit si quelque soit* $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ *la suite des scalaire* $\langle T_j, \varphi\rangle$ *converge dans* $\mathbb{R}$

$$\forall\ \varphi \in \mathscr{D}(\Omega),\quad \exists\ C_\varphi \in \mathbb{R},\ \lim_{j\to\infty} \langle T_j, \varphi\rangle = C_\varphi. \tag{1.3}$$

*On note alors* $C_\varphi = \langle T, \varphi\rangle$ *la limite réelle, ce qui définie la fonctionnelle* $T : \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ *appelée limite de la suite* $T_j$ *dans* $\mathscr{D}'(\Omega)$.

**Proposition 1.2.3** *La limite* $T$ *de la suite* $T_j$ *quand elle existe est une distribution. (c'est à dire une fonctionnelle linéaire et continue sur* $\mathscr{D}(\Omega)$.

**Preuve**. Voir [1] ■

**Exemple 1.5** *Calculons la* $\lim_{j\to\infty} \cos jx$ *dans* $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$. *Soit* $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, *supposons que* $supp(\varphi) \subset ]-M, M[$ *Nous avons donc en intégrant par partie*

$$\begin{aligned}\int \cos(jx)\varphi(x)dx = &\ \textstyle\int_{-M}^{M} \cos(jx)\varphi(x)dx \\ = &\ -\tfrac{1}{j}\textstyle\int \sin(jx)\varphi'(x)dx\end{aligned}$$

*donc*

$$|\int \cos(jx)\varphi(x)dx| \le \frac{1}{j}\int |\varphi'(x)|dx \to 0,\ \textit{lorsque}\ j \to \infty$$

**Proposition 1.2.4** *Si la distribution* $T_j$ *converge vers la distribution* $T$ *lorsque* $j \to \infty$, *la distribution dérivée* $T'_j$ *converge vers* $T'$

Cette proposition montre en particulier qu'une série convergente peut être dérivée terme à terme sans précaution spéciale. (La dérivation est une opération linéaire continue). **Preuve**. Si $\lim\limits_{j\to\infty} T_j = T$ donc quelle que soit $\varphi \in \mathscr{D}$ on a

$$\lim_{j\to\infty} \langle T_j, \varphi\rangle = \langle T, \varphi\rangle$$

Mais

$$\lim_{j\to\infty} \langle T'_j, \varphi\rangle = -\lim_{j\to\infty} \langle T_j, \varphi'\rangle = -\langle T, \varphi'\rangle = \langle T', \varphi\rangle$$

■

## 1.3 Opération sur Les distributions

Le but est d'étendre aux distributions certaines opérations définies sur les fonctions. Donc de manière générale les formules valides pour les fonctions seront valide pour les distributions.

### 1.3.1 Translation, Changement d'échelle

**Translation**

On commence par remarquer que pour $f$ une fonction localement sommable ($f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$) on a pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$

$$\int f(x-a)\varphi(x)dx = \int f(x)\varphi(x+a)dx \tag{1.4}$$

On note $\tau_a f$ la translatée de $f$ : ($\tau_a f(x) = f(x-a)$). On a donc au sens des distributions :

**Définition 1.3.1** *Pour une distribution $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ la distribution translatée $\tau_a T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ est définie par*

$$\langle \tau_a T, \varphi\rangle = \langle T, \tau_{-a}\varphi\rangle, \quad \forall\ \varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$$

On vérifie sans peine que $\tau_a T$ est une distribution et avec les notations usuelles

$$\langle \tau_a T, \varphi\rangle = \langle T(x-a), \varphi\rangle = \langle T(x), \varphi(x+a)\rangle \ \ \forall\ \varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$$

**Exemple 1.6** *La masse de Dirac en $a$ est définie par $\delta_a = \tau_a\delta$. si $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$*

$$\langle \delta_a, \varphi\rangle = \langle \tau_a\delta, \varphi\rangle = \langle \delta, \tau_{-a}\varphi\rangle = \tau_{-a}\varphi(0) = \varphi(x+a)|_{x=0} = \varphi(a)$$

**Changement d'échelle**

Pour une fonction $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ on a par un changement de variable

$$\int f(\alpha x)\varphi(x)dx = \frac{1}{|\alpha|}\int f(x)\varphi(\frac{x}{\alpha})dx$$

On a donc au sens des distributions

**Définition 1.3.2** *Pour une distribution $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ on définit la distribution $S$ par*

$$\langle S, \varphi\rangle = \langle T(x), \frac{1}{|\alpha|}\varphi(\frac{x}{\alpha})\rangle, \quad \forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega). \tag{1.5}$$

On vérifie immédiatement que $S$ est une distribution. On note $S(x) = T(\alpha x)$ ce qui donne

$$\langle T(\alpha x), \varphi(x)\rangle = \langle T(x), \frac{1}{|\alpha|}\varphi(\frac{x}{\alpha})\rangle \quad \forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$$

**Exemple 1.7** *Pour $a \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^*$, et $\varphi \in \mathscr{D}$ on a*

$$\delta_a(\alpha x) = \frac{1}{|\alpha|}\delta_{\frac{a}{\alpha}}(x)$$

### 1.3.2 Multiplication par une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$

On ne peut pas multiplier deux distributions entre elles. Par exemple la distribution $T_f$ associée à la fonction localement intégrable $\frac{1}{\sqrt{x}}$ ne peut pas être multiplier par elle même car la fonction $\frac{1}{x}$ ne définit pas une distribution. Mais pour une fonction localement intégrable $f$ et une fonction $\psi$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ on a pour tout $\varphi \in \mathscr{D}$

$$\int (\psi(x)f(x))\varphi(x) = \int f(x)(\psi(x)\varphi(x))dx$$

et ce avec $\psi\varphi \in \mathscr{D}$. Soit au sens des distributions :

**Définition 1.3.3** *Pour une distribution $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$, dès que $\psi \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ on définit la distribution $\psi T$ par*

$$\langle \psi T, \varphi\rangle = \langle T, \psi\varphi\rangle, \quad \forall\ \varphi \in \mathscr{D}(\Omega) \tag{1.6}$$

**Proposition 1.3.1** *Soit $T$ une distribution alors pour tout $\psi \in \mathscr{C}^\infty$, $\psi T$ est une distribution.*

**Preuve**. On a $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ donc $\forall K$ compact de $\Omega$ $\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$ avec $supp(\varphi) \in K$ on a il existe $M \in \mathbb{N}$, $C_K > 0$ telle que :

$$|\langle T, \varphi\rangle| \leqslant C_K \quad \sum_{|\alpha|\leqslant M} \sup_K |\partial^\alpha \varphi|$$

. Si $\psi \in \mathscr{C}^\infty$, on a alors grâce à la formule de Leibnitz pour $\alpha \in \mathbb{N}^n$ et $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$

$$\partial^\alpha(\psi\varphi) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta \psi \partial^{\alpha-\beta}\varphi$$

En particulier pour $|\alpha| \leq N$

$$\sup_K |\partial^\alpha(\psi\varphi)| \leq \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} (\sup_K |\partial^\beta \psi|)(\sup_K |\partial^{\alpha-\beta}\varphi|)$$

donc

$$\sum_{|\alpha| \leq N} \sup_K |\partial^\alpha(\psi\varphi)| \leq (\sum_{|\alpha| \leq N} \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta})(\sum_{|\gamma| \leq N} \sup_K |\partial^\gamma \psi|)(\sum_{|\gamma| \leq N} \sup_K |\partial^\gamma \varphi|)$$

et

$$|\langle \psi T, \varphi \rangle| = |\langle T, \psi\varphi \rangle| \leq (\sum_{|\alpha| \leq N} \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta})(\sum_{|\gamma| \leq N} \sup_K |\partial^\gamma \psi|)(\sum_{|\gamma| \leq N} \sup_K |\partial^\gamma \varphi|)$$

■

**Exemple 1.8** *On a $xV_p(\frac{1}{x}) = 1$ dans $\mathscr{D}'(\Omega)$.*
*En effet :*

$$\langle xV_p(\frac{1}{x}), \varphi \rangle = \langle V_p(\frac{1}{x}), x\varphi \rangle$$

*Théorème de convergence dominé de Lebesgue donne :*

$$\begin{aligned} \langle V_p(\frac{1}{x}), x\varphi \rangle &= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x| \geqslant \varepsilon} (\frac{1}{x}).x\varphi(x)dx \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x| \geqslant \varepsilon} \varphi(x)dx \\ &= \int_{|x| \geqslant \varepsilon} \varphi(x)dx \\ &= \langle 1, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

**Exemple 1.9** *Soit $x_0 \in \Omega$ ,$f \in \mathscr{C}^\infty(\Omega)$ on a : $f\delta_{x_0} = f(x_0)\delta_{x_0}$*
*En effet*

$$\langle f\delta_{x_0}, \varphi \rangle = \langle \delta_{x_0}, f\varphi \rangle = (f\varphi)|_{x=x_0} = f(x_0)\varphi(x_0) = f(x_0)\langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle.$$

On donne le résultat suivant qui interprète un problème de division. On s'intéresse à résoudre l'équation $xT = 0$ le problème est que la fonction $x$ possède un zéro simple.

**Lemme 1.3.1** *1. Soit $\theta \in \mathscr{D}(\Omega)$ telle que $\theta(0) = 1$. Il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ et une fonction $\psi \in \mathscr{D}(\Omega)$ vérifiant $\psi(0) = 0$ telle que*

$$\varphi(x) = c\theta(x) + \psi(x), \quad \forall, \ \varphi \in \mathscr{D}(\Omega). \tag{1.7}$$

*2.* $\forall,\ \varphi \in \mathscr{D}(\Omega),\ \exists\ \psi \in \mathscr{D}(\Omega)$ *telle que*

$$\varphi(x) = x\psi(x) \Leftrightarrow \varphi(0) = 0 \tag{1.8}$$

**Preuve**.

1. Il suffit d'écrire
$$\varphi(x) = \theta(x)\varphi(0) + \varphi(x) - \theta(x)\varphi(0)$$
puis on pose $c = \varphi(0)$ et $\psi(x) = \varphi(x) - \theta(x)\varphi(0)$
2. Si $\varphi(x) = x\psi(x)$ alors $\varphi(0) = 0$ inversement, la formule de Taylor de $\varphi$ à l'ordre 1 au voisinage de 0 donne
$$\varphi(x) = \varphi(0) + x\varphi'(\xi x)$$
si on pose $\varphi'(\xi x) = \psi(x)$ on a puisque $\varphi(0) = 0$, $\varphi(x) = x\psi(x)$

■

**Proposition 1.3.2**
*Si* $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ *on a équivalence entre*

*1.* $xT = 0$

*2.* $T = c\delta,\ c \in \mathbb{R}$

**Preuve**. Si $T = c\delta$ alors $\forall\ \varphi \in \mathscr{D}$

$$\langle xT, \varphi\rangle = \langle T, x\varphi\rangle = (x\varphi(x))|_{x=0} = 0$$

Inversement, si $xT = 0$ alors $\forall\ \varphi \in \mathscr{D}$

$$\langle xT, \varphi\rangle = \langle T, x\varphi\rangle = \langle T, \psi\rangle = 0$$

dès que $\psi = x\varphi$ le lemme 1.3.1 donne

$$\langle T, \varphi\rangle = c\langle T, \theta\rangle + \langle T, \phi\rangle = c\langle T, \theta\rangle + \langle T, x\chi\rangle$$

car $\phi(0) = 0$ par suite
$$\langle T, \varphi\rangle = c\langle T, \theta\rangle = \varphi(0)\langle T, \theta\rangle$$
. Il suffit de prendre $c = \langle T, \theta\rangle$ ■

**Exemple 1.10** *Résoudre* $xT = 1$ *c'est une équation avec un second membre. On sait déjà que* $xV_p\dfrac{1}{x} = 1$ *donc on a* $x(T - V_p\dfrac{1}{x}) = 0$ *en posant* $T_1 = T - V_p\dfrac{1}{x}$ *alors* $xT_1 = 0 \Leftrightarrow T_1 = c\delta$ *c'est à dire* $T = V_p\dfrac{1}{x} + c\delta$

### 1.3.3 Dérivation des distributions

Contrairement aux fonctions, les distributions sont toujours dérivables, leurs dérivées sont aussi des distributions.

**Définition 1.3.4** *Soient $n \geq 1$ entier, $\Omega$ ouvert de $\mathbb{R}^n$ , et $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ . Pour tout $i = \overline{1,n}$ , on définit la distribution $\partial_{x_j} T$ par la formule :*

$$\langle \partial_{x_i} T, \varphi \rangle = -\langle T, \partial_{x_i} \varphi \rangle, \textit{pour tout} \varphi \in \mathscr{D}(\Omega). \tag{1.9}$$

*où $\partial_{x_j}$ est la dérivée partielle de $T$ par rapport à $x_i$*
*Plus généralement, on a pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$*

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle \tag{1.10}$$

*où*

$$|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$$

*et*

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_n^{\alpha_n}}$$

**Remarque 1.3.1**

1. *La définition 1.3.4 est légitime car $\frac{\partial T}{\partial x_i}$ définit bien un élément de $\mathscr{D}'(\Omega)$ en effet si $\varphi_j \to 0$ dans $\mathscr{D}(\Omega)$ alors $\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \to 0$ également et on a*

$$\langle \frac{\partial T}{\partial x_i}, \varphi \rangle = -\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \rangle \to 0$$

2. *Dans $\mathscr{D}'$ on a toujours*

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 T}{\partial x_j \partial x_i}$$

*même si $T$ est définie par une fonction $f$ telle que $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$.*

3. *On peut toujours échanger les signes limite et dérivée, autrement dit on*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} (\frac{\partial T_\varepsilon}{\partial x_i}) = \frac{\partial}{\partial x_i} (\lim_{\varepsilon \to 0} T_\varepsilon)$$

*En effet*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \langle \frac{\partial T_\varepsilon}{\partial x_i}, \varphi \rangle = -\lim_{\varepsilon \to 0} \langle T_\varepsilon, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \rangle = -\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \rangle = \langle \frac{\partial T}{\partial x_i}, \varphi \rangle = \langle \frac{\partial}{\partial x_i} (\lim_{\varepsilon \to 0} T_\varepsilon), \varphi \rangle$$

**Proposition 1.3.3**
*Si $T$ est donnée par une fonction $f \in \mathscr{C}^1(\Omega)$, alors $\frac{\partial T}{\partial x_i}$ est donnée par la fonction $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, en d'autre terme La dérivation coïncide avec la notion habituelle pour les fonctions de classe $\mathscr{C}^1$, donc*

$$\frac{\partial T}{\partial x_i} = T_{\frac{\partial f}{\partial x_i}}$$

.

**Preuve**. Soit $f \in \mathscr{C}^1(\Omega)$ et $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$

$$\begin{aligned}
\langle \frac{\partial T_f}{\partial x_i}, \varphi \rangle &= -\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \rangle \\
&= -\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_i} dx \\
&= -\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left( \int_{\mathbb{R}} f(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx_i \right) dx' \quad \text{par Fubini} \\
&= -\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left( [f(x)\varphi(x)] - \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \varphi(x) dx_i \right) dx' \quad \text{une intégration par partie} \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \varphi(x) dx \\
&= \langle \frac{\partial f}{\partial x_i}, \varphi \rangle \\
&= \langle T_{\frac{\partial f}{\partial x_i}}, \phi \rangle
\end{aligned}$$

■

**Proposition 1.3.4** *La dérivation est une opération continue sur $\mathscr{D}'(\Omega)$. Autrement dit si $T$ et $T_n$ sont dans $\mathscr{D}'(\Omega)$ telle que*

$$T_n \to T$$

*dans $\mathscr{D}'(\Omega)$ lorsque $n \to \infty$. Alors $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$ on a*

$$\partial^\alpha T_n \to \partial^\alpha T$$

*dans $\mathscr{D}'(\Omega)$.*

**Preuve**.
$\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$
$\langle \partial^\alpha T_n, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T_n, \partial^\alpha \varphi \rangle \longrightarrow (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \varphi \rangle = \langle \partial^\alpha T, \varphi \rangle$. ■

**Exemple 1.11**

1. *La dérivée de la fonction $H$ de **Heaviside**.*

$$H(x) = \begin{cases} 1 & x \geqslant 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

*Alors* $H'(x) = \delta_0$ *dans* $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$. *En effet*

$$\langle H', \varphi\rangle = -\langle H, \varphi'\rangle = -\int_0^{\infty} \varphi'(x)dx = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi\rangle$$

2. $T = \delta$ *alors* $\langle \delta', \varphi\rangle = -\varphi(0)$ *et une itération (dérivées successives) donne* $\forall m$, $\langle \delta^{(m)}, \varphi\rangle = (-1)^m \varphi^{(m)}(0)$
3. $T = \ln|x| \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ *On* $\langle (\ln|x|)', \varphi\rangle = -\langle \ln|x|, \varphi'\rangle = -\int_{-\infty}^{+\infty} \ln|x|\varphi'(x)dx$, *mais ici on ne peut pas intégré par partie à cause de* $0$ *mais en utilisant le théorème de convergence dominé de Lebesgue on obtient*

$$-\int_{-\infty}^{+\infty} \ln|x|\varphi'(x)dx = -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|\geq 0} \ln|x|\varphi'(x)dx$$

*une intégration par partie donne*

$$\begin{aligned} -\int_{|x|\geq 0} \ln|x|\varphi'(x)dx &= -\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \ln(-x)\varphi'(x)dx - \int_{\varepsilon}^{+\infty} \ln(x)\varphi'(x)dx \\ &= -\ln\varepsilon\varphi(-\varepsilon) + \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}dx + \ln\varepsilon\varphi(\varepsilon) + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}dx \\ &= \ln\varepsilon(\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon)) + \int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}dx \end{aligned}$$

*Un DL d'ordre* $1$ *donne la majoration* $|\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon)| \leq 2\varepsilon \sup|\varphi'|$ *donc*

$$\langle (\ln|x|)', \varphi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}dx = V_p(\frac{1}{x})$$

*c'est à dire*

$$(\ln|x|)' = V_p\frac{1}{x}.$$

**Proposition 1.3.5** *Soit* $\psi \in \mathscr{C}^\infty(\Omega)$ *et* $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ *on a la formule de dérivation par partie suivante :*

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\psi T) = \frac{\partial}{\partial x_i}\psi T + \psi\frac{\partial}{\partial x_i}T$$

**Preuve**. On sait dèja que $\psi T \in \mathscr{D}'$, on calcul la dérivée, on a

$$\begin{aligned} \langle \frac{\partial}{\partial x_i}(\psi T), \varphi\rangle &= -\langle \psi T, \frac{\partial}{\partial x_i}\varphi\rangle \\ &= -\langle T, \psi\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi\rangle \\ &= -\langle T, \frac{\partial}{\partial x_i}(\psi\varphi) - \varphi\frac{\partial}{\partial x_i}\psi\rangle \\ &= \langle \frac{\partial}{\partial x_i}\psi T, \varphi\rangle + \langle \psi\frac{\partial}{\partial x_i}T, \varphi\rangle \end{aligned}$$

■

**Remarque 1.3.2** *Le résultat de la proposition 1.3.5 se généralise pour des dérivées supérieures et on obtient la formule de Leibnitz suivante pour les distributions*

$$D^\alpha(\psi T) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta \psi \ D^{\alpha-\beta} T$$

**Exemple 1.12** *Si $T = H \sin x$ alors*

$$T' = (H \sin x)' = H' \sin x + H \cos x = \delta \sin x + H \cos x = H \cos x$$

*et on a aussi*

$$T'' = (H \cos x)' = H' \cos x - H \sin x = \delta \cos x - H \sin x = \delta - H \sin x$$

### 1.3.4 formule des sauts(cas une variable)

On cherche à calculer la dérivée au sens des distributions d'une fonction de classe $C^1$ par morceaux.

**Proposition 1.3.6**
*Soit f une fonction de classe $C^1$ par morceaux sur ]a,b[ on a :*

$$f' = \{f'\} + \sum_{i=1}^{p} \left( f(a_i^+) - f(a_i^-) \right) \delta_{a_i}$$

*ou $f'$ désigne la dérivées de $f$ au sens des distribution ,et $\{f'\}$ désigne la distribution définie par la dérivée de $f$ en dehors des points de discontinuité $a_i \quad , 1 \leqslant i \leqslant p$.*

**Exemple 1.13**

$$H(x) = \begin{cases} 1 & x \geqslant 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

*Ici on a un seul saut en 0 d'où $f(a_i^+) - (f(a_i^-) = 1 - 0 = 1$ en déduit alors*

$$H'(x) = \{1'\} + 1 \times \delta_0 = \delta_0.$$

**Preuve**. $p = 1$ et $\Omega = ]a, b[ \quad a_1$(point de discontinuité)$\in \Omega$ :

$$\begin{aligned}
\langle f', \varphi \rangle &= -\langle f, \varphi' \rangle \\
&= -\int_a^b f\varphi' = -\int_a^{a_1} f\varphi' dx - \int_{a_1}^b f\varphi' \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_a^{a_1 - \frac{1}{n}} f\varphi' - \int_{a_1+\frac{1}{n}}^b f\varphi'
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\lim_{n\to\infty}\left[f(a_1-\frac{1}{n})\varphi(a_1-\frac{1}{n}f) - \lim_{n\to\infty}\int_a^{a_1-\frac{1}{n}} f'\varphi\right] \\
&= -\lim_{n\to\infty}\left[-f(a_1+\frac{1}{n})\varphi(a_1+\frac{1}{n}f) - \lim_{n\to\infty}\int_{a_1^b} f'\varphi\right] \\
&= -\varphi(a_1)f(a^-) + \varphi(a_1)f(a^+) + \int_a^{a_1} f'\varphi + \int_{a_1}^b f'\varphi \\
&= \varphi(a_1)(f(a^+) - f(a^-)) + \int_a^b f'\varphi.
\end{aligned}
$$

■

**Remarque 1.3.3** *La formule des sauts dans l'espace n'est autre que la formule de Stokes pour plus de détaille on peut voir le livre de [7].*

# Chapitre 2

# Distribution à support Compact et Convolution

## 2.1 Distribution à Support Compact

### Support d'une distribution

**Définition 2.1.1** *Soit $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$, on dit que $T$ est nulle sur un ouvert $W$ de $\Omega$ si*

$$\forall\ \varphi \in \mathscr{D}(\Omega),\ \langle T, \varphi\rangle = 0$$

*On note aussi $T|_W = 0$ et on dit que $W$ est un ouvert d'annulation de $T$.*

**Exemple 2.1**
1. *$T = H$ alors $]-\infty, 0[$ est un ouvert d'annulation de $H$*
2. *$T = \delta$ alors tout ouvert de $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ est un ouvert d'annulation pour $\delta$*
3. *Si $T_f$ est une distribution définie par une fonction localement intégrable $f$ alors*

$$W \text{ ouvert d'annulation de } T_f \Leftrightarrow W \text{ ouvert sur lequel } f \text{ est nulle pp}$$

**Définition 2.1.2 (support d'une distribution)** *Soit $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$.Il existe un plus grand ouvert $W$ de $\Omega$ tel que la restriction $T|_W$ soit nulle. Le complémentaire de cet ouvert est appelé le support de $T$ et est noté supp$(T)$.*
*Le support de $T$ et donc un sous-ensemble fermé $F$ de $\Omega$ tel que, pour $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ nulle au voisinage de $F$ on a $\langle T, \varphi\rangle = 0$ ,et c'est le plus petit ensemble fermé jouissant de cette propriété puisque c'est le complémentaire dans $\Omega$ de $W$.*

**Exemple 2.2** *$T = \delta_a$ masse de dirac centré en $a$. On a supp$\delta_a = \{a\}$. En effet $\mathbb{R}\backslash\{a\}$ est un ouvert d'annulation de $\delta_a$, si $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}\backslash\{a\})$ alors supp$\varphi$ est un compact de $\mathbb{R}\backslash\{a\}$ et donc $\varphi(a) = 0$ d'où $\langle \delta_a, \varphi\rangle = 0$*

**Définition 2.1.3** *On note $\mathscr{E}'(\Omega)$ l'ensemble des distributions à support compact.*

**Théorème 2.1.1** *Tout distribution $T \in \mathscr{E}'(\Omega)$ est d'ordre fini. Autrement dit, si $N$ est l'ordre de $T$, pour tout voisinage compact $K$ de suppT il existe une constante $C$ telle que*

$$\forall varphi \in \mathscr{D}(\Omega), \quad \langle T, \varphi \rangle \leq C \sum_{|\alpha| \leq N} \sup_K |\varphi(x)|$$

**Preuve**. Soit $L$ le support de $T$. On définit une fonction $\theta$ à support compact dans $\Omega$ telle que $\theta(x) = 1$ sur $L$. Donc si $\varphi \in \mathscr{D}$ alors $\varphi - \theta\varphi$ est nulle sur $L$ donc $\varphi - \theta\varphi \in \mathscr{D}(\Omega \backslash L)$. On a $\langle T, \varphi \rangle = \langle T, \theta\varphi \rangle$, $T$ étant une distribution on a

$$|\langle T, \varphi \rangle| = |\langle T, \theta\varphi \rangle| \leq C_K \sum_{|\alpha| \leq N} \sup_K |\partial^\alpha(\theta\varphi)(x)|$$

Or si $|\alpha| \leq N$ et d'après la formule de Leibnitz

$$\sup_K |\partial^\alpha(\theta\varphi)(x)| = \sup_{K \cap M} |\partial^\alpha(\theta\varphi)(x)| \leq C'(\sup_M |\partial^\gamma\theta|)(\sup_K |\partial^\gamma\varphi|)$$

et donc

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq Cst \sum_{|\gamma| \leq N} \sup |\partial^\gamma\varphi(x)|$$

où $Cst$ et $N$ sont indépendantes de $K$ ■

**Définition 2.1.4** ***(Extension de la dualité)***

*Soient $T \in \mathscr{E}'(\Omega)$ et $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$. On pose :*

$$\langle T, \varphi \rangle_{\mathscr{E}', \mathscr{C}^\infty} = \langle T, \theta\varphi \rangle$$

*où, $\theta$ appartient à $\mathscr{D}(\Omega)$, et est égale à 1 au voisinage du support de $T$.*

**Remarque 2.1.1**

*Il est clair que le changement, de fonction $\theta$ ne modifie $\theta\varphi$ que par une fonction nulle au voisinage du support de $T$, et ne change donc pas le résultat. En effet si $\varphi \in \mathscr{C}^\infty$ et si $\theta_1$, $\theta_2$ sont deux fonction de $\mathscr{D}(\Omega)$ valant 1 au voisinage de support de $T$ alors $(\theta_1 - \theta_2)\varphi = 0$ au voisinage du support de $T$ donc*

$$\langle T, (\theta_1 - \theta_2)\varphi = 0 \rangle \Rightarrow \langle T, \theta_1\varphi \rangle = \langle T, \theta_2\varphi \rangle$$

### Distributions à support réduit à un point

Le cas extrême des distributions à support compact est celui des distribution dont leurs supports est réduit à un point. On peut supposer sans ambiguïté que le support est l'origine. On a le résultat suivant dont la preuve est donner dans le livre de [4].

**Théorème 2.1.2** *Soit $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ telle que suppT $= \{0\}$. Alors il existe un entier $N$ telle que*

$$T = \sum_{|\alpha| \leq N} c_\alpha \partial^\alpha \delta$$

## 2.2 Convolution

On introduit la notion de convolution des distributions, qui est utile dans l'étude des équation aux dérivées partielles et les équations intégrales, l'exposé sera récapitulatif, le but étant de se familiarisé avec le produit convolutif des distribution. pour un exposé détaillé on peut consulté les livres [6],[4].

### 2.2.1 Produit Tensoriel

Soit $X, Y$ deux ouverts de $\mathbb{R}^n$ et de $\mathbb{R}^m$ respectivement. On définit la fonction $f \otimes g$, sur $X \times Y$ par :

$$f \otimes g(x, y) = f(x)g(y) \quad (x, y) \in X \times Y$$

alors $f \otimes g \in X \times Y$.

**Définition 2.2.1** *Soient $X$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $Y$ un ouvert de $\mathbb{R}^m$, $f : X \to \mathbb{R}$ et $g : Y \to \mathbb{R}$ deux fonctions numériques, On appelle produit tensoriel des fonctions $f$ et $g$ la fonction $h = f \otimes g : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}$ définit par le produit :*

$$(f \otimes g)(x, y) = h(x, y) = f(x)g(x) \tag{2.1}$$

**Remarque 2.2.1**

1. *$h = f \otimes g$ est une fonction à variables séparée sur $\mathbb{R}^{n+m} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ et on note aussi*

$$h(x, y) = f(x) \otimes g(y)$$

2. *Si $f$ et $g$ sont localement intégrables sur $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ alors $f \otimes g$ est localement intégrable. En effet d'après Fubini on a*

$$\int\int |(f \otimes g)(x, y)| \leq (\int |f(x)|dx)(\int |g(y)|dy)$$

En terme des distributions si $\varphi \in \mathscr{D}(X \times Y)$ est à variables séparées, autrement dit $\varphi = \varphi_1(x) \times \varphi_2(y)$ avec $\varphi_1 \in \mathscr{D}(X)$ et $\varphi_2 \in \mathscr{D}(Y)$ alors

$$\begin{aligned}
\langle T_{f\otimes g}, \varphi_1 \otimes \varphi_2 \rangle &= \int\int f(x)g(y)\varphi_1(x)\varphi_2(y)dxdy \\
&= \int f(x)\varphi_1(x)dx \int g(y)\varphi_2(y)dy \\
&= \langle T_f, \varphi_1 \rangle \langle T_g, \varphi_2 \rangle
\end{aligned}$$

En particulier si $\varphi(x, y) = \varphi(x)\varphi(y)$

$$\langle u_1 \otimes u_2, \varphi \rangle = \langle u_1, \varphi_1 \rangle \langle u_2, \varphi_2 \rangle$$

Et si $\varphi$ n'est pas à variables séparées, alors on applique le théorème de Fubini

$$\begin{aligned}\langle T_{f\otimes g}, \varphi\rangle &= \int f(x)(\int g(y)\varphi(x,y)dy)dx \\ &= \langle T_f(x), \langle T_g(y), \varphi(x,y)\rangle\rangle = \langle T_g(y), \langle T_f(x), \varphi(x,y)\rangle\rangle\end{aligned}$$

Ce qui a un sens quand $\varphi \in \mathscr{D}(X \times Y)$ puisque alors $(x,y) \mapsto f(x)g(y)\varphi(x,y)$ est localement intégrable sur $X \times Y$ et on note

$$T_f \otimes T_g = T_{f\otimes g}$$

On a ainsi défini le produit tensoriel sur les distributions régulières et on a

$$\langle T_{f\otimes g}, \varphi\rangle = \langle T_f \otimes T_g, \varphi\rangle = \langle f \otimes g, \varphi\rangle$$

La généralisation à tout distribution est donnée par le théorème suivant dont la preuve est donné dans [4]

**Théorème 2.2.1** *Soient $T \in \mathscr{D}'(X)$ et $S \in \mathscr{D}'(Y)$, il existe une unique distribution $W = T \otimes S \in \mathscr{D}'(X \times Y)$ telle que pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(X)$ et $\psi \in \mathscr{D}(Y)$ on ait :*

$$\langle W, \varphi \otimes \psi\rangle = \langle T, \varphi\rangle\langle S, \psi\rangle$$

*de plus si $\varphi \in \mathscr{D}(X \times Y)$ alors :*

$$\langle W, \varphi\rangle = \langle T, \langle S, \varphi(x, .)\rangle\rangle$$

**Remarque 2.2.2** *On a aussi :*

$$\langle W, \varphi\rangle = \langle S, \langle T, \varphi(., y)\rangle\rangle$$

*En fait on calcule $\langle W, \varphi\rangle$ grâce au théorème de Fubini. Si $\varphi \in \mathscr{D}(X \times Y)$ On fixe $x$ , alors $\varphi(x, .)$ est fonction de y appartient à $\mathscr{D}(Y)$, en posant $\theta(x) = \langle S_y, \varphi(x,y)\rangle$ alors $\theta(x) \in \mathscr{D}(Y)$ (voir [4]) et on peut calculer :*

$$\langle T \otimes S, \varphi\rangle = \langle T, \theta(x)\rangle = \langle T, \langle S, \varphi(x,y)\rangle\rangle$$

**Proposition 2.2.1**

$$supp(T \otimes S) = suppT \times suppS.$$

**Preuve**.
On montre que les doubles inclusions
supp$T$ $\times$ supp$S \subset$ supp$T$ $\times$ supp$S$

Soit (x,y) $\in$ *suppT* $\times$ *supp* et soit W un voisinage de (x,y) donc il existe un voisinage ouvert U de x et un voisinage ouvert V de y tel que $U \times V \subset W$ comme $x \in suppT$, T ne s'annule pas dans U du il existe $\varphi_1 \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ tel que $supp\varphi_1 \subset U$ et $\langle T, \varphi_1 \rangle \neq 0$ de même S ne s'annule pas dans V alors il existe $\varphi_2 \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$ tel que $supp\varphi_2 \subset V$ et $\langle T, \varphi_2 \rangle \neq 0$. Donc :

$$\varphi_1(x)\varphi_2(y) \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^{n+m}), supp(\varphi_1(x)\varphi_2(y)) \subset U \times V \subset W$$

et $\langle T \otimes S, \varphi_1 \times \varphi_2 \rangle = \langle T, \varphi_1 \rangle \langle S, \varphi_2 \rangle \neq 0$
d'où $(x, y) \in supp(T \otimes S)$
Inversement. Supposons que $(x, y) \notin suppT \times suppS$ due $x \notin suppT$ ou $y \notin suppS$. On suppose que $x \in suppT$, soit $U$ un voisinage ouvert de $x$ tel que $suppT \cap U = \emptyset$ et soit $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que $supp\varphi \subset U$ alors $\langle T, \varphi \rangle = 0$ que $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$ telle que $supp\varphi \subset U \times \mathbb{R}^m$
On a $\theta(x) = \langle S, \varphi(x, y) \rangle = 0$ par $x \notin U$
due $supp\theta \subset U$ due :
$\langle T \otimes S, \varphi(x, y) \rangle = \langle T, \langle S, \varphi(x, y) \rangle \rangle = \langle T, \theta \rangle = 0, x \notin U$
due $T \otimes S$ s'annule sur $U \times \mathbb{R}^m$ et $(x, y) \notin supp(T \otimes S)$
d'où $suppT \otimes S \subset suppT \times suppS$ ■

### 2.2.2 Exemple et propriétés

1. $D_x^\alpha D_y^\beta (T \otimes S) = (D_x^\alpha T) \otimes (D_y^\beta S)$
2. $\delta_x \otimes \delta_y = \delta_{(x,y)}$
3. Une distribution est dite indépendante de x si elle est de la forme $1_x \otimes S$ et on a : $\langle 1_x \otimes S, \varphi(x, y) \rangle = \int \langle S, \varphi(x, y) \rangle dx = \langle S, \int \varphi(x, y) dx \rangle$
4. Le produit tensoriel est associative :

$$(T \otimes S) \otimes R = T \otimes (S \otimes R)$$

5. Soit $H(x_1, \ldots, x_n)$ la fonction de Heaviside de n variables définie par :

$$H(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1 & x_i \geqslant 0, \quad 0 \leqslant i \leqslant n \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

Elle est le produit tensoriel :
$H(x_1, \ldots, x_n) = H(x_1) \otimes H(x_2) \ldots \otimes H(x_n)$,
de plus $\frac{\partial^n H}{\partial x_1 \ldots \partial x_n} = \delta_{x_1} \otimes \delta_{x_2} \otimes \ldots \otimes \delta_{x_n} = \delta_{(x_1, \ldots, x_n)}$

### 2.2.3 Convolution

On va donnée très brièvement aperçu sur la notion de convolution et on va voire $u$ ces au la convolution et défini :

**Définition 2.2.2** *Soit $f$ et $g$ deux fonctions définis sur $\mathbb{R}^n$ la convolution de $f$ et $g$ si elle existe , noté $f * g$ est défini par*

$$\begin{aligned}(f*g)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y).g(x-y)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y).g(y)dy.\end{aligned}$$

Si $\varphi \in \mathscr{D}$ alors :

$$\int (f*g)(x)\varphi(x)dx = \int\int f(x-y)g(y)\varphi(x)dxdy \tag{2.2}$$

$$= \int\int f(u)g(v)\varphi(u+v)dudv \tag{2.3}$$

$$= \langle f\otimes g, \varphi(u+v)\rangle. \tag{2.4}$$

Cette formule qui donne une définition fonctionnelle du produit de convolution de $f$ par $g$ va permettre de définir le produit de convolution de deux distributions .

**Définition 2.2.3** *On appelle produit de convolution de deux distributions $T$ et $S$ définies toutes les deux sur $\mathbb{R}^n$ la distribution définie sur $\mathbb{R}^n$ est noté $T * S$ telle que :*

$$\langle T_x * S_y, \varphi(x)\rangle = \langle T_u \otimes S_v, \varphi(u+v)\rangle \tag{2.5}$$

$$= \langle T_u \langle S_v, \varphi(u+v)\rangle\rangle. \tag{2.6}$$

**Remarque 2.2.3**

1. *On a évident $T * S = S * T$.*
2. *si $T$ et $S$ sont deux distributions quelconques $T * S$ n'est pas toujours définie , en effet si $\varphi(x), x \in \mathbb{R}^n$ est a support compact il n'est plus pour $\varphi(u+v)$, qui est définie sur $\mathbb{R}^{2n}$. car le support de $\varphi(u+v)$ est la bande $|u+v| \leq a$ qui n'est pas compact. Par exemple si $[-M, M]$ est le support de la fonction $x \mapsto \varphi(x)$ le support de la fonction $(u,v) \mapsto \varphi(u+v)$ est la bande $|u+v| \leq M$ qui n'est pas compact.*

Pour donnée un sens au produit de convolution on suppose que l'une des distributions $T$ ou $S$ est à support compact , (il existe d'autres hypothèses possibles ).
En effet si $\operatorname{supp}(T) \subset \{x : \ |x| \leq b\}$ et $\operatorname{supp}(\varphi) \subset \{x : \ |x| \leq a\}$ alors l'intégration est sur :

$$\begin{aligned}\Omega = \operatorname{supp}T\otimes S \cap \operatorname{supp}\phi(x+y) &= (\operatorname{supp}T \times \operatorname{supp}S) \cap \operatorname{supp}\phi(x+y) \\ &= \{(x,y) : |x| \leq b, |x+y| \leq a\} \\ &= \{(x,y) : |x_i| \leq b, |x_i+y_i| \leq a, i = 1,\dots,n\}\end{aligned}$$

Supposons que $T \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$ et $S \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$. Si $\theta(x) \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ tels $\theta(x) = 1$ au voisinage de supp de $T$ et 0 ailleurs. Alors d'après le théorème 2.2.1 et la remarque 2.2.2 $\theta(x)\varphi(x+y) =$

$\psi(x,y) \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^{2n})$. et $\langle S, \psi(x,y)\rangle \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ et :

$$\begin{aligned} \langle T * S, \varphi\rangle &= \langle T, \langle S, \theta(x)\varphi(x+y)\rangle\rangle \\ &= \langle T, \theta(x)\langle S, \varphi(x+y)\rangle\rangle \\ &= \langle T, \langle S, \varphi(x+y)\rangle\rangle. \end{aligned}$$

**Théorème 2.2.2** *Soit $T \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n), S \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ , alors $T * S$ définie une distribution sur $\mathbb{R}^n$.*

**Preuve**. soit $\psi(x,y) = \theta(x)\varphi(x+y)$ définie précédemment, on a

$$\langle T * S, \varphi =\rangle T \otimes S, \psi\rangle \quad \forall \varphi \in \mathscr{D}$$

Comme le produit tensoriel de deux distributions est une distribution, il suffit de montrer la continuité. Soit $\varphi_j(x)$ une suite de fonction de $\mathscr{D}(\mathbb{R}^\ltimes)$ qui converge vers 0 alors $\psi_j(x,y) = \theta(x)\varphi_j(x+y)$ est une suite de fonction dans $\mathscr{D}(\mathbb{R}^{2n})$ qui converge vers 0 donc

$$\langle T * S, \varphi_j =\rangle T \otimes S, \psi_j\rangle \to 0 \quad \text{lorsque} \quad j \to \infty$$

■

**Proposition 2.2.2** *Quelle que soit la distribution $T$ on a*

$$T * \delta = \delta * T = T$$

$$\delta' * T = T'$$

**Preuve**. $\delta$ est à support compact , et pour tout $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n), \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ on a

1.
$$\langle \delta * T, \varphi\rangle = \langle \delta_x, \langle T_y, \varphi(x+y)\rangle\rangle = \langle T_y, \varphi(y)\rangle = T$$
$$\langle T * \delta, \varphi\rangle = \langle T_x, \langle \delta_y, \varphi(x+y)\rangle\rangle = T_x, \varphi(x)\rangle = T_x$$

2.
$$\begin{aligned} \langle \delta' * T, \varphi\rangle &= \langle \delta', \langle T, \varphi\rangle\rangle \\ &= -\langle \delta, \langle T, \varphi'\rangle\rangle \\ &= \langle \delta, \langle T', \varphi\rangle\rangle \\ &= \langle \delta * T', \varphi\rangle \\ &= \delta * T' = T'. \end{aligned}$$

■

### 2.2.4 Propriétés de la convolution

Les résultats suivants résument les principales propriétés de la convolution :

1. **La convolution est commutative**. Soit $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ et $S \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$ alors
$$T * S = S * T$$
2. **Support**. Soit $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ et $S \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$ alors
$$\mathrm{supp}(T * S) \subset \mathrm{supp}T + \mathrm{supp}S$$
3. **Associativité**. Soient $T,\ S,\ H \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ telle que au moins deux distributions sont à support compact alors
$$(T * S) * H = T * (S * H)$$
4. **Différentiation**. Soient $T,\ S \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ telle que l'une des deux est à support compact et si $\alpha \in \mathbb{N}^n$ alors on a
$$D^\alpha(T * S) = D^\alpha T * S = T * D^\alpha S$$

# Chapitre 3

# Transformation De Fourier

## 3.1 Introduction

La transformation de Fourier est un outil important en analyse, particulièrement en équations différentielles et aux dérivées partielles, son importance réside dans le fait qu'elle transforme l'opération de dérivation en une multiplication et ceci permet de convertir les problèmes différentielles à des problèmes algébriques.

## 3.2 Transformation de Fourier

**Définition 3.2.1** *Soit $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$. On appelle transformation de Fourier de la fonction $u$ , notée $\mathcal{F}(u)$ ou $\hat{u}$ est la fonction sur $\mathbb{R}^n$ définie par :*

$$\hat{u}(\xi) = \mathcal{F}(u(\xi)) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix.\xi} u(x)dx, \tag{3.1}$$

*où $x.\xi = x.\xi = x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + \cdots + x_n\xi_n$ est le produit scalaire usuelle de $\mathbb{R}^n$. Cette définition a bien un sens puisque $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix.\xi}u$ est intégrable*

$$\left( \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix.\xi} udx \in L^1(\mathbb{R}^n), car \quad \int_{\mathbb{R}^n} |e^{-ix.\xi}u|dx = \int |u|dx < +\infty \right)$$

.

**Remarque 3.2.1** *On peut rencontrer une autre définition de $\hat{u}$ dans la quelle $dx$ et remplacer par $(2\pi)^n dx$, ce qui est la même puisque les formules différent de puissance de $(2\pi)$.*

**Exemple 3.1**

1. *Soit* $c > 0$ $x \in \mathbb{R}$ $f(x) = \begin{cases} 1 & si\ |x| \leq c \\ 0 & si\ |x| < c \end{cases}$ *une fonction réelle.*

   *on a* $f \in L^1(\mathbb{R})$ *et* $\hat{f}(\xi) = \int e^{ix\xi} f(x)dx = \int_{-c}^{c} e^{-ix\xi}dx = \begin{cases} -\frac{1}{i\xi}e^{-ix\xi}\Big]_{-c}^{c} & si\ \xi \neq 0 \\ 2c & si\ \xi = 0 \end{cases}$

$= \begin{cases} \frac{2sinc\xi}{\xi} & si\ \xi \neq 0 \\ 2c & si\ \xi = 0 \end{cases}$

2. $g(x) = e^{-c|x|}$, *on a :*

$$\begin{aligned} \hat{g}(\xi) &= \int e^{-ix\xi}e^{-c|x|}dx \\ &= \int_{-\infty}^{0} e^{(-i\xi+c)x}dx + \int_{0}^{+\infty} e^{(-i\xi-c)x}dx \\ &= \frac{1}{(c-i\xi)}e^{(c-i\xi)x}\Big]_{-\infty}^{0} + \frac{1}{(c+i\xi)} - e^{-(c+i\xi)x}\Big]_{0}^{+\infty} \\ &= \frac{1}{c-i\xi} + \frac{1}{c+i\xi} = \frac{2c}{c^2+\xi^2} \end{aligned}$$

**Remarque 3.2.2**

*Si* $u \in L^1(\mathbb{R})$ *, on a pas en général* $\hat{u} \in L^1(\mathbb{R})$ *d'après l'exemple 3.1 (1).*

**Définition 3.2.2** *(**Inversion de Fourier** ) Soit* $u \in L^1(\mathbb{R})$ *telle que* $\hat{u} \in L^1(\mathbb{R})$*.on a alors :*

$$u = (2\pi)^{-n}\overline{\mathcal{F}}(\hat{u})$$

*où on a noté* $\overline{\mathcal{F}}$ *l'analogue de la transformation de Fourier avec*

$$\overline{\mathcal{F}}(\hat{u}) = \int_{\mathbb{R}} e^{ix.\xi}\hat{u}(\xi)d\xi,$$

**Théorème 3.2.1 (Rieman-Lebesgue)** *Soit* $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *,alors on a :*

1. $\hat{u}$ *est borné.*
2. $\hat{u}$ *est continue.*
3. $\lim_{\xi \to +\infty} \hat{u}(\xi) = 0$

**Preuve**.

1. $\hat{u}$ est bornée car : $sup|\mathcal{F}(u)| \leq \|u\|_{L^1} < +\infty$.
2. Pour la continuité : La fonction $\xi \to e^{-ix\xi}$ est continue sur $\mathbb{R}^n$.Pour presque tout $x$,soit $u_j$ une suit de $L^1(\mathbb{R}^n)$
   on a : $|\hat{u}_j(\xi) - \hat{u}(\xi)| \leq \|u_j - u\|_{L^1} \xrightarrow[j \to +\infty]{} 0$.
   due $\hat{u}_j \longrightarrow \hat{u}$ uniformément sur $\mathbb{R}^n$.

3. L'espace $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ étant dense dans $L^1(\mathbb{R}^n)$ (voir[1]),il suffit de montrer le résultat pour $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$.
   On a : $\xi_1 \hat{u}(\xi) = \int \xi_1 e^{-ix\xi}\varphi(x)dx = i\int \frac{\partial}{\partial x_1}(e^{-ix\xi})\varphi(x)dx$
   une intégration par partie donne :
$$\xi_1 \hat{u}(\xi) = (-i)\int e^{-ix\xi}\frac{\partial \varphi'}{\partial x_1}dx$$
   par suit : en itérant pour toute les variables on obtient :
   $|\xi||\hat{u}(\xi)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\frac{\partial u}{\partial x}|dx = \|\frac{\partial u}{\partial x}\|_{L^1} < \infty$ d'où
$$|\hat{u}(\xi)| = 0(\frac{1}{|\xi|})$$

■ Les propriétés de la transformation de Fourier se résume dans le théorème suivant :

**Théorème 3.2.2** *Si $u, v \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et $|x_j f| \in {}^1(\mathbb{R}^n)$ alors :*

1. $\widehat{D_j u} = \xi_j \hat{u}$, *oú* $D_j = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j}$,
2. $\widehat{x_j u} = -D_j \hat{u}$, *oú* $D_j = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial \xi_j}$,
3. $u * v \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *et* $\mathcal{F}(u * v) = \hat{u}.\hat{v}$,
4. $\widehat{u.v} = (2\pi)^n \hat{u} * \hat{v}$

**Preuve**. voir le livre [2] ■

Pour définir une opération au sens des distributions, la procédure est toujours la même : on reporte la définition sur la fonction test. Suivant cette idée, $\varphi$ étant une fonction test, la transformation de Fourier de la distribution régulière $f$, que nous noterons $\hat{f}$, pourrait être définie par l'égalité :

$$\begin{aligned}
\langle \hat{f}, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)\varphi(\xi)d\xi &= \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-i\xi}dx\right)\varphi(\xi)d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x)e^{-i\xi}d\xi dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\hat{\varphi}(x)dx \\
&= \langle f, \hat{\varphi}\rangle.
\end{aligned}$$

(par Fubini f et $\varphi$ étant intégrable $(|e^{-ix\xi f(x)\varphi(x)}| \leqslant |f(x)||\varphi(s)|)$ donc la transformation de Fourier d'une distribution quelconque $T$ est définie de la façons suivant :

$$\langle \hat{T}, \varphi\rangle = \langle T, \hat{\varphi}\rangle$$

## 3.3 Espaces de Schwartz de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$

On introduit un nouvel espace des fonctions tests, que l'appelle espace de Schwartz, et qu'on le note $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$

**Définition 3.3.1** *L'espace $\mathscr{S} = \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ est constitué des fonctions $u$ appartenant à $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ telles que*

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n, \exists C_{\alpha,\beta} > 0, |x^\alpha \partial^\beta u(x)| \leq C_{\alpha,\beta}, \forall x \in \mathbb{R}^n. \tag{3.2}$$

*Touts les dérivée d'un élément de $\mathscr{S}$ tendent vers zéro à l'infini (plus vite) que tout polynôme .Voici des exemples :*

**Exemple 3.2**

1. $\mathscr{C}_0^\infty \in \mathscr{S}$.
2. *La fonction $u(x) = e^{-|x|^2}$, $x \in \mathbb{R}^n$,appartient à $\mathscr{S}$.*
3. *Plus généralement, pour $a \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction sur $\mathbb{R}^n$,$u(x) = e^{-a|x|^2}$ appartient à $\mathscr{S}$.*

**Remarque 3.3.1** *[2]*

1. *Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$,les application $u \mapsto x^\alpha u$ et $u \mapsto \partial^\alpha u$ sont continues de $\mathscr{S}$ dans $\mathscr{S}$.*
2. *Le produit de deux éléments de $\mathscr{S}$ appartient à $\mathscr{S}$.*
3. *$\mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $\mathscr{S}$.*
4. *Pour tout $1 \leq p \leq +\infty$,$\mathscr{S} \subset L^p(\mathbb{R}^n)$ on particulier $\mathscr{S} \subset L^p(\mathbb{R}^n), p = 1$.*

### 3.3.1 Transformation de Fourier dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$

**Définition 3.3.2** *Pour $u \in \mathscr{S}$ ,la transformation de Fourier de $u$, notée $\mathcal{F}(u)$ ou $\hat{u}$ est la fonction sur $\mathbb{R}^n$ définie par :*

$$\hat{u}(\xi) = \mathcal{F}(u(\xi)) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix.\xi} u(x) dx,_\xi \in \mathbb{R}^n \tag{3.3}$$

*Cette définition a bien un sens puisque ,$e^{-ix.\xi} u \in L^1(\mathbb{R}^n)$.*

**Théorème 3.3.1** *[2] La transformation de Fourier $\mathcal{F}$ est une application linéaire bijective bicontinue de $\mathscr{S}$ sur $\mathscr{S}$ .Si on pose pour $v \in \mathscr{S}$ ,*

$$\overline{\mathcal{F}} v(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix\xi} v(\xi) d\xi \tag{3.4}$$

*alors $\overline{\mathcal{F}}$ envoie $\mathscr{S}$ dans $\mathscr{S}$ et on a $\mathcal{F}\overline{\mathcal{F}} = \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F} =$ identité de $\mathscr{S}$,i.e.$\mathcal{F}^{-1} = \overline{\mathcal{F}}$.*

### 3.3.2 Propriétés de la transformation de Fourier dans $\mathscr{S}$

Les propriétés de transformation de Fourier se résume dans le théorème suivant

**Théorème 3.3.2** *Si $u, v \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ alors :*

1. $\widehat{D_j u} = \xi_j \hat{u}$, *oú* $D_j = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j}$,
2. $\widehat{x_j u} = -D_j \hat{u}$, *oú* $D_j = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial \xi_j}$,
3. $u * v \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *et* $\mathcal{F}(u * v) = \hat{u}.\hat{v}$,
4. $\widehat{u.v} = (2\pi)^n \hat{u} * \hat{v}$.

**Preuve**. voir le livre [2] ■

## 3.4 Espace $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$

De la même façon pour l'espace des distributions $\mathscr{D}'(\Omega)$, on définit l'espace des distributions tempérées $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ comme l'ensemble des formes linéaire définie sur $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$

**Définition 3.4.1** *$\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) = \mathscr{S}'$ est le dual topologique de $\mathscr{S}$, i.e. l'espace vectoriel des formes linéaires continues de $\mathscr{S}$ dans $\mathscr{C}$ .*
*Donc une application linéaire, $T : \mathscr{S} \to \mathscr{C}$ appartient à $\mathscr{S}'$ si et seulement si,*

$$\exists k, l \in \mathbb{N}, \exists C > 0 : |\langle T, \varphi \rangle| \leqslant C \sum_{|\alpha| \leqslant k, |\beta| \leqslant l} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)|, \quad \forall \varphi \in \mathscr{S}.$$

**Théorème 3.4.1**
1. *Les fonctions qui sont soit sommables, soit bornées,soit majorées par un polynôme définissent des distributions régulières tempérées.*
2. *Les distributions à support bornés sont tempérées.*

**Preuve**. Pour le premier point il faut montrer que $\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx$ est finie lorsque $\varphi \in \mathscr{S}$ Comme $\varphi$ est bornée, si $f$ est sommable ou bornée, l'intégral a un sens. Le produit d'un polynôme et d'une fonction de $\mathscr{S}$ est également une fonction de $\mathscr{S}$, donc intégrable. Pour le 2 ème point, comme $\varphi \in \mathscr{S}$, $\varphi$ est $\mathscr{C}^\infty$ , et comme la distribution (disons T) est ‘a support borné par hypothèse, le produit $\langle T, \varphi \rangle$ a un sens. ■

**Exemple 3.3** *Les distributions $\delta_a$ et $\delta^{(n)}$ sont des distributions tempérées. Les distributions régulières $1, H, \cos ax, He^{iax}$sont des distributions tempérées.*
*Lorsque le théorème précédent ne peut être appliqué, pour savoir si une distribution particulière $T$ est tempérée, il faut vérifier directement si $\langle T, \varphi \rangle$ a un sens pour toute fonction $\varphi \in \mathscr{S}$.*

### 3.4.1 Transformation de Fourier dans $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$

**Définition 3.4.2** *Soit $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$ , c'est-'a-dire une distribution tempérée. La transformée de Fourier,$\hat{T} = \mathcal{F}T$, de la distribution $T$ est définie par la relation :*

$$\forall \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}), \quad \langle \mathcal{F}T, \varphi \rangle \equiv \langle T, \mathcal{F}\varphi \rangle$$

*et la transformée de Fourier inverse, $\mathcal{F}^{-1}T$, est définie par la relation :*

$$\forall \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}), \quad \langle \mathcal{F}^{-1}T, \varphi \rangle \equiv \langle T, \mathcal{F}^{-1}\varphi \rangle$$

**Exemple 3.4** $\hat{\delta} = 1$ *et* $\hat{1} = \delta$
*En effet, par définition* $\langle \hat{\delta}, \varphi \rangle = \langle \delta, \hat{\varphi} \rangle = \hat{\varphi}(0) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)dx = \langle 1, \varphi \rangle$.
*De même,*$\langle \hat{1}, \varphi \rangle = \langle 1, \hat{\varphi} \rangle = \int_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}(q)dq = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle$.

**Théorème 3.4.2** *La transformation de Fourier est une application linéaire, bijective et bi-continue sur les suites de $\mathscr{S}'$ dans $\mathscr{S}'$ et $\mathcal{F}^{-1} = \overline{\mathcal{F}}$.*

**Preuve**. Cela résulte du théorème (3.3.1).En effet, on a $\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}T = \mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}T = T$ pour tout $T \in \mathscr{S}'$ car $\langle \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}T, \varphi \rangle = \langle \mathcal{F}T, \overline{\mathcal{F}}\varphi \rangle = T, \mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}\varphi = \langle T, \varphi \rangle$ pour $\varphi \in \mathscr{S}$. Donc $\mathcal{F}$ est bijective et $\mathcal{F}^{-1} = \overline{\mathcal{F}}$. Ensuite, si $T_j \to T$ dans $\mathscr{S}'$on a $\langle \mathcal{F}T_j, \varphi \rangle = \langle T_j, \mathcal{F}\varphi \rangle \to \langle T, \mathcal{F}\varphi \rangle = \langle \mathcal{F}T, \varphi \rangle$, donc $\mathcal{F}T_j \to \mathcal{F}T$. De même pour $\overline{\mathcal{F}}$. ■

### 3.4.2 Propriétés de la transformation de Fourier dans $\mathscr{S}'$

**Théorème 3.4.3**
1. *La transformation de Fourier dans $\mathscr{S}'$ coïncide avec la transformation de Fourier dans $\mathscr{S}$, si $T \in \mathscr{S}$.*
   *Pour $T \in \mathscr{S}'$ on a,*
2. $\mathcal{F}\mathcal{F}T = (2\pi)^n T^{-1}$, *ou* $\langle T^{-1}, \varphi \rangle = \langle T, \varphi^{-1} \rangle$ *et* $\varphi^{-1}(x) = \varphi(-x)$.
3. $\mathcal{F}(D_jT) = \xi_j \mathcal{F}T, D_j = \frac{1}{i}\partial_j$.
4. $\mathcal{F}(x_jT) = -D_j\mathcal{F}T$.

## 3.5 Convolution et transformation de Fourier

Pour ce qui concerne la convolution, l'échange entre produit de convolution et produit par transformation de Fourier est total dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ :

**Théorème 3.5.1** *Soient $f$ et $g$ deux fonctions de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ . Alors, le produit $f \times g$ et le produit de convolution $f * g$ sont aussi dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ et l'on a :*

$$\widehat{f * g} = \widehat{f} \times \widehat{g} \text{ et } \widehat{f \times g} = \widehat{f} * \widehat{g}$$

*(la deuxième propriété n'est pas garantie dans $L^1(\mathbb{R})$ .*

La première propriété résulte d'un simple changement de variable ; il est évident que cette première propriété vaut également avec la transformation de Fourier inverse : $\mathcal{F}^{-1}(f * g) = \mathcal{F}^{-1}(f)\overline{\mathcal{F}}^{-1}(g)$ Or $\mathcal{F}(f)$ et $\mathcal{F}(g)$ sont également dans $\mathscr{S}$. Donc :

$$\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}f * \mathcal{F}g) = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}f)\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}g) = fg \text{ donc } \mathcal{F}(f) * \mathcal{F}(g) = \mathcal{F}(fg),$$

ce qui démontre la deux ème propriété.

**Exemple 3.5** *Soit*

$$\Pi(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in [\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \\ 2 & si \quad non \end{cases} \tag{3.5}$$

$\widehat{\Pi * \Pi}(\xi) = (\dfrac{sin\pi\xi}{\pi\xi})^2$

Rappelons que le produit de convolution des 2 distributions $S$ et $T$, lorsqu'il existe, noté $S*T$ est défini, pour toute fonction $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^2)$ de la forme $\varphi(x, y) = u(x)v(y)$ avec $u, v \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ par la relation :

$$\langle S * T, u(x)v(y)\rangle = \langle S, u\rangle\langle T, v\rangle$$

On rappelle également que le produit de convolution existe si l'une au moins des 2 distributions est à support bornée.

**Théorème 3.5.2** *Soient $S$ et $T$ deux distributions à supports bornées. Alors leur produit de convolution $S * T$ est aussi à support borné et vérifie :*

$$\mathcal{F}(S * T) = \mathcal{F}(S) \times \mathcal{F}(T)$$

Si $S$ et $T$ sont supports bornés, comme le support de $S*T$ est inclus dans la somme du support de S et du support de $T$, le support de $S * T$ est donc borné.$\mathcal{F}(S)$ et $\mathcal{F}(T)$ étant à supports bornés, ce sont des distributions régulières définies par les fonctions $\mathcal{F}(Sx) = \langle S, e^{-i\xi x}\rangle$ et $\mathcal{F}(Ty) = \langle S, e^{-i\xi y}\rangle$ .
Le produit de ces deux fonctions est tel que :

$$\mathcal{F}(S)(x)\mathcal{F}(Sy) = \langle S, e^{-i\xi}\rangle\langle S, e^{-i\xi y}\rangle \equiv \langle S * T, S, e^{-i\xi(x+y)}\rangle$$

Cette dernière expression est une fonction $C^\infty$ (par rapport à la variable $x + y$) qui définit la transformation de Fourier de la distribution $S * T$
Bien noter que le produit de deux distributions, $ST$ ou $\widehat{S}\widehat{T}$ ne peut être défini en toute généralité. Dans le cas où S est une distribution tempérée quelconque et $T$ une distribution à support borné, le théorème tient encore, mais le produit $\widehat{S}\widehat{T}$ doit être interprété comme le produit d'une distribution par une fonction $C^\infty$

**Exemple 3.6**
$\widehat{T'} = ix\widehat{T}$ .

Il suffit de remarquer que $T' \equiv \delta' * T$ puis d'utiliser le théorème.

# Chapitre 4

# Solution fondamentale d'opérateurs différentielles

Dans cette section, nous étudions les équations différentiels linéaire de la forme :

$$\sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha D^\alpha u = f(x), f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \tag{4.1}$$

avec des coefficients constants $a_\alpha \in \mathbb{R}^n$.
Si on pose

$$P(D) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha D^\alpha$$

l'équation (4.1) prend la forme :

$$P(D)u = f(x), f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n). \tag{4.2}$$

**Définition 4.0.1** *Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On dit que $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ est une solution au sens des distributions*[1] *de l'équation (4.2) dans $\Omega$ si $u$ vérifie*

$$\langle \sum_{|\alpha|\leq m} D^\alpha u, \varphi\rangle = \langle f, \varphi\rangle \tag{4.3}$$

$\forall\ \varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$

**Remarque 4.0.1** *Supposons $f \in \mathscr{C}(\Omega)$. Si $u \in \mathscr{C}^m(\Omega)$ et satisfait l'équation (4.2) alors $u$ est dite solution classique*[2] *de (4.2). Évidement si $u$ est une solution faible de classe $\mathscr{C}^m$ alors c'est une solution classique.*

**Définition 4.0.2** *Une distribution $E \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ est dite solution fondamentale de l'opérateur $P(D)$ si*

$$P(D)E = \delta(x). \tag{4.4}$$

1. On dit aussi solution faible, ou généralisé
2. On dit aussi solution forte

***Remarque 4.0.2*** *Si $u$ est une solution de l'équation homogène $P(D)u = 0$ alors $E + u$ est aussi une solution fondamentale de (4.2), donc en général une solution fondamental n'est pas unique*

*Une solution fondamentale permet de résoudre les équation de la forme (4.1) et on a*

**Théorème 4.0.3** *Soit $f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ une distribution telle que la convolution*

$$u = E * f. \tag{4.5}$$

*existe dans $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$. Alors $u$ est solution de l'équation (4.1) De plus, cette solution est unique modulo les distributions dans$\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ pour les quelles la convolé $E * u$ existe.*

**Preuve**. En utilisant les propriétés de la convolution, nous obtenons :

$$P(D)(E * f) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha (E * f) = (\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha E) * f$$

$$(P(D)E) * f = \delta * f = f$$

donc $u = E * f$ défini une solution de (4.2). Pour l'unicité, on suppose que $u_1$ et $u_2$ sont deux solutions vérifiant (4.2) alors $v = u_1 - u_2$ vérifie l'équation homogène

$$P(D)v = 0$$

Mais

$$v = \delta * v = (P(D)E) * v = E * (P(D)v) = E * 0 = 0$$

donc $u_1 = u_2$. ■

**Exemple 4.1** 1. *On sait dèja que $H' = \delta$ ou $H$ est la fonction de Heaviside donc $H$ est la solution fondamentale de l'opérateur $\frac{d}{dx}$ dans $\mathbb{R}$.*

2. *On a $(xH)'' = (H + H'x)' = (H + x\delta)' = H' = \delta$ donc $xH$ est une solution fondamentale de l'opérateur $\frac{d^2}{dx^2}$*

Le résultat suivant de Malgrange-Ehrenpreis et le point clé de ce mémoire.

**Théorème 4.0.4 (Malgrange-Ehrenpreis)** *Tout opérateur différentiel linéaire non nul à coefficients constants admet une solution fondamentale.*

Les propriétés de la transformation de Fourier va nous permettre de calculer d'une manière algébrique les solution fondamentales.

**Théorème 4.0.5** *Une distribution $E \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ est une solution fondamentale de l'opérateur $P(D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha$ si et seulement si sa transformée de Fourier vérifie l'équation*

$$P(\xi)\hat{E} = 1 \tag{4.6}$$

*où $P(\xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \xi^\alpha$.*

**Preuve**. La vérification est directe d'après la linéarité de la transformation de Fourier et la propriété (dérivation) et le théorème de l'isomorphisme de $\mathcal{F}$ sur $\mathscr{S}$. ■

**Exemple 4.2** *Soit à déterminer la solution fondamentale dans $\mathscr{S}'$ de l'opérateur*

$$-\frac{d^2}{dx^2}+1$$

*donc on cherche*

$$(-\frac{d^2}{dx^2}+1)E=\delta$$

*D'après le théorème 4.0.5 on a*

$$(\xi^2+1)\hat{E}=1$$

*On obtient ainsi une équation algébrique qui donne*

$$\hat{E}=\frac{1}{\xi^2+1}$$

*La fonction $\frac{1}{\xi^2+1}$ n'est pas dans $\mathscr{S}$ mais elle est intégrable donc elle définie une distribution tempérés, et grâce à la transformation de Fourier inverse, on obtient*

$$E(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix\xi}}{\xi^2+1}d\xi$$

*On sait déjà (Voir example) que $\mathcal{F}(e^{-a|x|})=\frac{2a}{a^2+\xi^2}$ en particulier pour $a=1$ on a*

$$\mathcal{F}(e^{-|x|})=\frac{2}{1+\xi^2}$$

*En appliquant Fourier inverse on obtient*

$$e^{-|x|}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2}{1+\xi^2}e^{ix\xi}d\xi$$

*donc*

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}e^{-|x|} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+\xi^2}e^{ix\xi}d\xi\\ &= \mathcal{F}^{-1}(\frac{1}{1+\xi^2})\end{aligned}$$

*donc*

$$E(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}$$

*est la solution fondamentale de l'opérateur $P(D)=-\frac{d^2}{dx^2}+1$*

# Conclusion

On a vu que tout opérateur différentielle linéaire $P(D)$ à coefficients constants admet une solution fondamentale donnée par l'équation

$$P(D)E = \delta$$

La recherche de telle solution se fait dans $\mathscr{D}'(\Omega)$, l'espace des distributions, une autre approche est d'utiliser la transformation de Fourier ce ci revient à résoudre maintenant dans $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ l'espace des distributions tempérées l'équation équivalente suivante

$$P(\xi)\hat{E} = 1$$

cette dernière équation (algébrique) nous permet de calculer directement la solution fondamentale qui est donnée par l'équation

$$\hat{E} = \frac{1}{P(\xi)}.$$

L'inconvénient pour cette équation algébrique réside dans le faite qu'on peut avoir $P(\xi) = 0$ et donc on a un problème de division dans $\mathscr{S}'$ donc on peut déjà ce soucier à éviter ce problème. Par contre on peut trouver une classe d'opérateurs vérifiant $P(\xi) \neq 0$, l'exemple traiter en fait partie. On peut aussi ce soucier de cas d' opérateurs à coefficients non constant, car dans ce cas la transformation de Fourier n'est pas directement applicable.

# Bibliographie


[1] C.Wagschal, Distribution, analyse microlocal, équations aux dérivées partielles . Hermann. Paris. 2011

[2] C.Zuily, Éléments de distributions et d'équations aux dérivées partielles. Dunod. Paris. 2002

[3] D.Fredon, M.Bridier, Mathématique pour les sciences de l'ingénieur. Dunod. 2003.

[4] F. G. Friedlander, M. Joshi Introduction to the theory of distribution. Cambridge University press. 1982

[5] F.Golse, Distributions, analyse de Fourier,équations aux dérivées partielles. octobre 2012.

[6] J.-M. Bony, Cours d'analyse, théorie des distributions et analyse de Fourier. Les Éditions de l'école Polytechnique, Palaiseau. 2001.

[7] L.Schwartz, Méthodes mathématiques pour les science physique. Hermann. boulevard saint-Germain. paris. 1961

[8] L.Schwartz, Théorie des distributions. Hermann. paris. 1966

[9] R.Shafikov, Real analysis lecture notes.

[10] Y.Caumel, Cours d'analyse fonctionnelle et complexe. Cépaduès $2^{eme}$ édition. France. 2009.