République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère d'Enseignement Supérieure et de la Recherche Scientifique
Université de GHARDAIA

Faculté des Science et de Technologie
Département de Mathématique et Informatique
Laboratoire de Mathématiques et Sciences Appliquées

Memoire

Présenté par

Chettouh Lamia   Chettouh Zohra

pour obtenir

le diplôme de Master

Spécialité : Analyse Fonctionnelle et appliquée

Existence de solution d'une équation différentielle fonctionnelle d'ordre fractionnaire avec conditions non locales

Soutenu le ../../2017 devant le jury

Président :	Mr Guerbati Kaddour	M. C. A(Univ. Ghardaia)
Promoteur :	Mme Hammouche Hadda	M. C. A(Univ. Ghardaia)
examinateur :	Mr Latreche Smail	M. A(Univ. Ghardaia)

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère d'Enseignement Supérieure et de la Recherche Scientifique
Université de GHARDAIA

Faculté des Science et de Technologie
Département de Mathématique et Informatique
Laboratoire de Mathématiques et Sciences Appliquées

Memoire

Présenté par

Chettouh Lamia   Chettouh Zohra

pour obtenir

le diplôme de Master

Spécialité : Analyse Fonctionnelle et appliquée

Existence de solution d'une équation différentielle fonctionnelle d'ordre fractionnaire avec conditions non locales

Soutenu le ../../2017 devant le jury

Président :	Mr Guerbati Kaddour	M. C. A(Univ. Ghardaia)
Promoteur :	Mme Hammouche Hadda	M. C. A(Univ. Ghardaia)
examinateur :	Mr Latreche Smail	M. A(Univ. Ghardaia)

Table des matières

Introduction

Le calcul fractionnaire a vu une grande expansion durant les trois dernières décennies. il a gagné une popularité et une considération importante dûe principalement aux nombreuses applications dans divers domaines de sciences appliquées et de l'ingénierie, où il a été remarqué que le comportement d'un grand nombre de systèmes physiques peut être décrit en utilisant la dérivée d'ordre fractionnaire qui fournit une excellente description de plusieurs propriétés de matériaux et processus.

Plusieurs mathématiciens ont apporté des contributions importantes dans l'analyse des opérateurs et systèmes d'ordre fractionnaire entre autre : P.S. Laplace (1812), J.B.J. Fourier (1822), N.H. Abel (1823 ; 1826), H. Holmgren (1865 ;67), A.K. Grünwald (1867 ;1872), A.V. Letnikov (1868-1872), H. Laurent (1884), P.A. Nekrassov (1888), J. Hadamard (1892), O. Heaviside (1892 ;1912), S. Pincherle (1902), G.H. Hardy and J.E. Littlewood (1917 ;1928), H.Weyl (1917), P. Lévy (1923), A. Marchaud (1927), H.T.Davis (1924 ;1936), A. Zygmund (1935 ;1945), E.R. Love (1938 ;1996), A. Erdélyi (1939 ;1965), H. Kober (1940), D.V.Widder (1941),M. Riesz (1949).

La théorie des équations différentielles fractionnaires a suscité beaucoup d'intérêt au cours des vingt dernières années, car ces dernières sont importants pour décrire des modèles naturels tels que les processus de diffusion, les processus stochastiques, les finances et l'hydrologie. Plusieurs notions associées au familles résolvantes sont développées tel que la résolvante intégrale, les opérateurs de solution, les fonctions d'opérateur de α-résolvante, résolvante de (a, k)-régularisé et semi-groupes fractionnaire d'ordre α. Toutes ces notions jouent un rôle central dans l'étude des équations de Volterra, en particulier les équations différentielles fractionnaires. En ce qui concerne la littérature, nous renvoyons le lecteur aux livres [10], [11], aux études récentes [14] et leurs références.

En revanche, les équations différentielles abstraites avec conditions non locaux ont également été étudié largement dans la littérature, puisqu'il est démontré que les problèmes non locales ont des meilleurs effets dans les applications que les classiques. C'était Byszewski et Michel qui ont d'abord étudié l'existence et l'unicité de solutions faibles pour des équations différentielles non locales

Les équations différentielles fonctionnelles d'ordre fractionnaires avec condition non local apparaissent comme une description naturelle de nombreux phénomènes d'évolution car la majorité des processus dans les sciences appliquées sont représentés par des équations différentielles fractionnaires.

Dans ce mémoire nous nous intéressons à l'existence de solutions d'une équation différentielle fonctionnelle d'ordre fractionnaire avec conditions non local, il est composé de trois chapitres.

Le premier chapitre sera consacré aux" Préliminaires" il comporte quelques notions de bases ainsi que toutes les notations et définitions qui nous serons utiles.

Le deuxième Chapitre est consacré à l'étude d'existence de solution d'un equation différentielle fractionnaire moyennant la théorie des familles résolvants dans le cas de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo.

Dans le troisième Chapitre on illustre notre théorie par un exemple.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Outils de base

1.1.1 La fonction Gamma

La fonction Gamma d'Euler est une fonction qui prolonge la fonction factorielle aux valeurs réels ou complexes.

Définition 1.1.1. [7] pour $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $Re(\alpha) > 0$ on définit la fonction suivante

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

la fonction Γ est bien définie pour tout $Re(\alpha) > 0$

Cette intégrale converge absolument sur le demi-plan complexe où la partie réelle est strictement positive.
En intégrant par parties, on peut voir que

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha), \ Re(\alpha) > 0$$

En particulier

$$\Gamma(n + 1) = n! \ \forall n \in \mathbb{N}$$

***Exemple* 1.1.1.** $\Gamma(\frac{1}{2})$ *Par définition*

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-x} dx$$

posons $x = y^2$ *alors*

$$dx = 2ydy$$

d'où

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{y} e^{-y^2} 2ydy \\ &= 2\int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy\end{aligned}$$

Calculons $\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2$, *on trouve*

$$\begin{aligned}\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 &= \left[2\int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy\right]^2 \\ &= \left[2\int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy\right]\left[2\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt\right] \\ &= 4\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-(t^2+y^2)} dtdy\end{aligned}$$

C'est une intégrale double sur le premier quadrant du plan, on peut la calculer plus aisément en passant aux coordonnées polaires, posons

$$\begin{cases} t = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \quad r \in [0, +\infty[, \theta \in [0, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$$

on aura

$$\begin{aligned}
\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 &= 4\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{r=0}^{+\infty} e^{-r^2} r dr d\theta \\
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} [-\frac{e^{-r^2}}{2}]_0^{+\infty} d\theta \\
&= 4\left[-\frac{e^{-r^2}}{2}\right]_0^{+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \\
&= 4\frac{1}{2}\frac{\pi}{2} = \pi \\
\Rightarrow \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \sqrt{\pi}
\end{aligned}$$

1.1.2 La fonction Bêta

Définition 1.1.2. [3] La fonction Bêta est une intégrale de type Euler définie pour tous nombres positifs $p > 0; q > 0$ par

$$\beta(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt$$

1.1.3 La Relation entre les fonctions Gamma et Bêta

La fonction Bêta est liée à la fonction Gamma par la relation suivante

$$\beta(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

Définition 1.1.3. L'application $f : J \times E \longrightarrow E$est dite Carathéodory si :

1. $t \longrightarrow f(t,u)$est mesurable pour tout $u \in E$
2. $t \longrightarrow f(t,u)$ est continue presque pour tous $t \in J$

Lemme 1.1.1. *(lemme de Gronwall-Bellman)[13] Soient f, g, k trois fonction vérifient*

i) *f, g et k, fonctions intégrables et définies de $\mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$,*

ii) $g \geq 0, k \geq 0$

iii) $g \in L_\infty$

iv) *gk est intégrable sur* $\mathbb{R}^+$

$$si \quad u(t) \leq f(t) + g(t)\int_0^t k(s)u(s)ds \;\; \forall t \in \mathbb{R}^+ \tag{1.1.1}$$

Alors

$$u(t) \leq f(t) + g(t)\int_0^t k(s)f(s)exp\Big(\int_s^t k(\tau)g(\tau)d\tau\Big)ds \tag{1.1.2}$$

Corollaire 1.1.1. *[13] Soit* $K : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$*, une famille intégrable sur* $\mathbb{R}^+$ *et* $K \geq 0$*. Si*

$$u(t) \;\; \leq \;\; c + \int_0^t k(s)u(s)ds \;\; \forall t \in \mathbb{R}^+ \tag{1.1.3}$$

$$\tag{1.1.4}$$

alors

$$u(t) \;\; \leq \;\; c \;\; exp\Big(\int_0^t k(s)ds\Big) \tag{1.1.5}$$

$$\tag{1.1.6}$$

1.1.4 Critère de compacité

Dans cette section, nous rappelons quelques éléments de base liés a la théorie de compacité. Pour cela, soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux espaces de Banach et $\Omega \subset E$ une partie non vide.

1.1.5 Opérateurs compacts

Définition 1.1.4. [12] Une application $f : \Omega \longrightarrow F$ est dite compacte si et seulement si

❶ f est continue.

❷ $f(\overline{\Omega})$ est un compact.

Définition 1.1.5. [12] Une application $f : \Omega \longrightarrow F$ est dite complètement continue si et seulement si

❶ f est continue

❷ pour tout $B \subset \Omega$ borné $\Rightarrow \overline{f(B)}$ est compact.

Critère de compacité dans $C([a,b];\mathbb{R})$

Définition 1.1.6. On dit que $M \subset C([a,b];\mathbb{R})$ est uniformément bornée, s'il existe une constante $c > 0$ tell que $\mid x(t) \mid \leq c$ pour tout x de M et quel que soit $t \in [a,b]$.

Définition 1.1.7. On dit que $M \subset C([a,b];\mathbb{R})$ est équicontinue, si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ dépendant uniquement de ε, tel que pour tous $t_1, t_2 \in [a,b]$ satisfaisant à l'inégalité $|t_1 - t_2| < \delta$ et pour toute fonction x de M l'on ait $|x(t_1) - x(t_2)| < \varepsilon$

Le Théorème suivant est généralement utilisé pour prouver la compacité d'un opérateur T

Théorème 1.1.1. *(Théorème d'Ascoli-Arsila) Soit $M \subset C([a,b];\mathbb{R})$, M est relativement compact si et seulement si :*

❶ *M est uniformément borné*

❷ *M est équicontinu*

1.2 Dérivation fractionnaire

1.2.1 Aperçu historique

Dans cette section, on introduit des notations, définitions et des propriétés concernant le calcul fractionnaire. Il existe plusieurs définitions mathématiques de l'intégration et de la dérivation d'ordre fractionnaire.

Le concept de calcul fractionnaire découle historiquement d'une question soulevée dans l'année 1695 par Marquis de L'Hôspital (1661-1704)à Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). Lorsque Leibniz a répondu par une lettre à L'Hôspital, il a désigné la $n^{ème}$ dérivée d'une fonction f par le symbole $\frac{d^n f}{dx^n}$ (apparemment avec l'hypothèse implicite que $n \in \mathbb{N}$), l'Hôspital

a répondu alors,"Que signifie $\frac{d^n f}{dx^n}$ si $n = \frac{1}{2}$? "Dans sa réponse, datée du 30 Septembre 1695, Leibniz écrit à L'Hôspital comme suit :
"... C'est un paradoxe apparent à partir duquel un jour, des conséquences utiles seront tirées... ". Plusieurs auteurs considèrent cette lettre datée en 30 septembre 1695, comme heure de naissance du calcul fractionnaire. Donc le calcul fractionnaire est un sujet mathématique datant de plus de 300 ans.
Par la suite plusieurs mathématiciens célèbres comme P. S. Laplace (1812), J. B. J. Fourier (1822), N. H. Abel (1823-1826), J. Liouville (1832-1873),B.Riemann (1847),A. K. Grunwald (1867-1872), A. V. Letnikov (1868-1872), H. Weyl (1917) et M. Riesz (1949)... ont contribué au développement de la théorie de base du calcul fractionnaire. Pour plus de détails sur les aspects historiques de la théorie du calcul fractionnaire le lecteur intéressé est invité *à* consulter les ouvrages[8, 9].
Il semble qu'une contradiction dans les définitions ait empêché un succès plus grand de la théorie, qui n'est certes pas encore unifiée ; de plus, l'absence au début d'une interprétation géométrique ou physique claire de la dérivée fractionnaire d'une fonction a largement contribué *à* ce que des champs de recherche intéressants restent dans l'ombre. L'incompatibilité des définitions distinctes fut résolue par la compréhension du caractère non local de l'opérateur de dérivation non entière. Ce n'est que récemment (2ème partie du XXème siècle) que son application, notamment en Sciences pour l'ingénieur, s'avère significative.
Pendant ces trois dernières décennies, le calcul fractionnaire a connu un énorme intérêt du fait des champs d'applications des dérivées fractionnaires diversifiés.
J. Liouville est le premier à étudier en détail le calcul fractionnaire, comme semblent l'attester les huit articles qu'il publia entre 1832 et 1837. Indépendamment, Riemann propose une approche qui s'est avérée celle de Liouville essentiellement. Depuis, cette théorie porte le nom de Riemann-Liouville.
La théorie du Calcul Fractionnaire connaît actuellement une grande popularité parmi les chercheurs dans les sciences fondamentales et en ingénierie,
Comme il est bien connu, l'extension de la notion de dérivée aux ordres non-entiers ne se fait pas de manière unique. Par conséquent, il en existe plusieurs variantes. Dans ce cadre et pour notre support bibliographique nous nous sommes appuyés principalement sur l'ouvrage clas-

sique d'Oldham et Spanier [9] et les ouvrages de Samko, Kilbas et Marichev (+ 1993), celui de Podlubny ([10], 1996) ainsi que Kilbas, Srivastava et Trujillo ([7], 2006)

1.2.2 Dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Il existe plusieurs définitions de dérivées fractionnaires, malheureusement elles ne sont pas toutes équivalentes. Nous présentons dans cette parties les définitions de Riemann-Liouville, Caputo qui sont les plus utilisées.

Intégrale de Riemann-Liouville :

L'approche de Riemann-Liouville relative à la définition de l'intégrale fractionnaire est inspirée de la formule de Cauchy qui donne les primitives successives (n fois) d'une fonction continue qui est donnée par l'équation :

$$(I_a^n f)(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1} f(t)dt \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

En généralisant cette formule à un ordre α réel positif et en remplaçant la fonction factorielle par la fonction Gamma on aura la définition suivante :

Définition 1.2.1. Soit$f : [a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. on appelle intégrale de Riemann-Liouville de f l'intégrale suivante

$$(I_a^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt$$

où α est un réel ou complexe convenablement choisi.

Proposition 1.2.1. *Soit $f \in C^0([a, b))$ pour α,β complexes tels que $Re(\alpha) > 0$ et $Re(\beta) > 0$ on a*

$$I_a^{\alpha}(I_a^{\beta} f) = I_a^{\alpha+\beta}(f) \tag{1.2.1}$$

et pour $Re(\alpha) > 1$ on a

$$\frac{d}{dx} I_a^{\alpha} f = I_a^{\alpha-1} f \tag{1.2.2}$$

Démonstration. Pour la relation (1.2.1) on a

$$\begin{aligned}
I_a^{\alpha}(I_a^{\beta} f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-s)^{\alpha-1} (I_a^{\beta} f)(s) ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-s)^{\alpha-1} \Big(\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^s (s-t)^{\beta-1} f(t) dt \Big) ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \int_a^s (x-s)^{\alpha-1} (s-t)^{\beta-1} f(t) dt ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(t) \Big[\int_a^s (x-s)^{\alpha-1} (s-t)^{\beta-1} ds \Big] dt
\end{aligned}$$

on pose $s = t + (x-t)\tau$ alors

$$ds = (x-t)d\tau$$

$$\begin{aligned}
s &= t \Longrightarrow t + (x-t)\tau = t \Longrightarrow \tau = 0 \\
s &= x \Longrightarrow t + (x-t)\tau = x \Longrightarrow \tau = 1
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
\int_t^x (x-s)^{\alpha-1} (s-t)^{\beta-1} ds &= \int_0^1 (x - (t + (x-t)\tau))^{\alpha-1} (t + (x-t)\tau - t)^{\beta-1} (x-t) d\tau \\
&= \int_0^1 [(x-t)(1-\tau)]^{\alpha-1} [(x-t)\tau]^{\beta-1} (x-t) d\tau \\
&= (x-t)^{\alpha+\beta-1} \int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1} \tau^{\beta-1} d\tau
\end{aligned}$$

sachant la définition de la fonction bêta

$$
\begin{aligned}
B(\beta, \alpha) &= \int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1}\tau^{\beta-1}d\tau \\
&= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}
\end{aligned}
$$

retournons à la formule(1.2.1), ce qui donne

$$
\begin{aligned}
I_a^{\alpha}(I_a^{\beta}f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x f(t)\Big[(x-t)^{\alpha+\beta-1}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\Big] \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_a^x (x-t)^{(\alpha+\beta)-1}f(t)dt \\
&= (I_a^{\alpha+\beta}f)(x)
\end{aligned}
$$

Pour la deuxième identité de la proposition on a

$$
\frac{d}{dx}(I_a^{\alpha}f)(x) = \frac{d}{dx}\Big(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-s)^{\alpha-1}f(t)dt\Big)
$$

□

Remarque 1.2.1. Selon l'équation fondamentale de la fonction Gamma d'Euler

$$
\begin{aligned}
\Gamma(\alpha) &= (\alpha-1)\Gamma(\alpha-1) \text{ et comme } Re(\alpha) > 1, \text{ alors on peut écrire} \\
\frac{d}{dx}(I_a^{\alpha}f)(x) &= \frac{1}{(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)}\int_a^x \frac{d}{dx}(x-s)^{\alpha-1}f(t)dt \\
&= \frac{1}{(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)}\int_a^x (\alpha-1)(x-s)^{(\alpha-1)-1}f(t)dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\int_a^x (x-s)^{(\alpha-1)-1}f(t)dt \\
&= (I_a^{\alpha-1}f)(x)
\end{aligned}
$$

Exemple 1.2.1. *On considère la fonction $f(x) = (x-a)^\beta$ et on va calculer leur intégrale d'ordre α (α réel)*

$$I_a^\alpha (x-a)^\beta = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1}(t-a)^\beta dt.$$

A l'aide de changement de variable $t = a + (x-a)\tau$, on trouve :

$$dt = (x-a)d\tau$$

$$t = a \Longrightarrow a + (x-a)\tau \Longrightarrow \tau = 0$$

$$t = x \Longrightarrow a + (x-a)\tau \Longrightarrow \tau = 1$$

Alors

$$\begin{aligned} I_a^\alpha (x-a)^\beta &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-(a+(x-a)\tau))^{\alpha-1}(a+(x-a)\tau-a)^\beta (x-a)dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (x-a)^{\alpha-1}(1-\tau)^{\alpha-1}(x-a)^\beta \tau^\beta (x-a)d\tau \\ &= \frac{(x-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1}\tau^\beta d\tau \\ &= \frac{(x-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} B(\alpha,\beta+1) \end{aligned}$$

$$I_a^\alpha (x-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}(x-a)^{\alpha+\beta} \tag{1.2.3}$$

Dérivée fractionnaire d'ordre α

Définition 1.2.2. Soit $m-1 < \alpha < m$ avec $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on appelle dérivée d'ordre α au sens de Riemann-Liouville la fonction définie par

$$({}^{RL}D_a^\alpha f)(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^m [(I^{m-\alpha} f)x] \tag{1.2.4}$$

Exemple 1.2.2. *On considère la même fonction de l'exemple précédent $f(x) = (x-a)^\beta$, et on calcule leur dérivées fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre α*

$${}^{RL}D_a^\alpha (x-a)^\beta = \left(\frac{d}{dx}\right)^m [I^{m-\alpha}(x-a)^\beta]$$

On a vu l'expression de l'intégrale d'ordre α de cette fonction, donc pour l'ordre $m-\alpha$ on obtient

$$I_a^{m-\alpha}(x-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+m-\alpha)}(x-a)^{\beta+m-\alpha}$$

alors

$$\begin{aligned}
{}^{RL}D_a^\alpha(x-a)^\beta &= \left(\frac{d}{dx}\right)^m\left[\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+m-\alpha)}(x-a)^{\beta+m-\alpha}\right] \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+m-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^m(x-a)^{\beta+m-\alpha} \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+m-\alpha)}\frac{\Gamma(\beta+1+m-\alpha)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(x-a)^{\beta-\alpha} \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(x-a)^{\beta-\alpha}
\end{aligned}$$

Lemme 1.2.1. *Soit $m-1<\alpha<m$ avec $m \in \mathbb{N}-\{0\}$*

$$[{}^{RL}D_a^\alpha f](x) = 0 \Longrightarrow f(x) = \sum_{j=0}^{m-1} c_j \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1+\alpha-m)}(x-a)^{j+\alpha-m} \tag{1.2.5}$$

où les c_j sont des constantes.

Proposition 1.2.2. *L'opérateur de dérivation de Riemann-Liouville possède les propriétés suivantes*

1. *C'est un opérateur linéaire*
2. $\lim\limits_{\alpha\longrightarrow(m-1)^+} D_a^\alpha f = f^{(m-1)} \quad , \lim\limits_{\alpha\longrightarrow m^-} D_a^\alpha f = f^{(m)}$
3. ${}^{RL}D_a^\alpha \circ I_a^\alpha = id$

1.2.3 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo

1.2.4 Dérivée d'ordre α

Définition 1.2.3. Soit $\alpha \in]m-1, m[$ et $f \in C^m([a,b))$. on appelle dérivée de f au sens de Caputo la fonction définie par

$$({}^cD_a^\alpha f)(x) = (I_a^{m-\alpha} f^{(m)})(x) \tag{1.2.6}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(t)dt \tag{1.2.7}$$

***Exemple* 1.2.3.** *Reprenons l'exemple de la fonction $f(x) = (x-a)^\beta$. Alors*

$$\begin{aligned}
{}^cD_a^{(\alpha)}(x-a)^\beta &= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^x (x-s)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(s)ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^x (x-s)^{m-\alpha-1} \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-m)}(s-a)^{\beta-m}ds \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(m-\alpha)\Gamma(\beta+1+m-\alpha)} \int_a^x (x-s)^{m-\alpha-1}(s-a)^{\beta-m}ds \\
&= \left(\frac{d}{dx}\right)^m \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+m-\alpha)}(x-a)^{\beta+m-\alpha} \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+m-\alpha)} \frac{\Gamma(\beta+1+m-\alpha)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)}(x-a)^{\beta-\alpha} \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)}(x-a)^{\beta-\alpha}
\end{aligned}$$

Remarque 1.2.2. la dérivée d'une fonction constante au sens de Caputo est nulle, d'après (1.2.6)

$${}^cD_a^{(\alpha)}C = I_a^{m-\alpha}(0) = 0$$

.

Proposition 1.2.3.

❶ ${}^CD_a^\alpha[I_a^\alpha f] = f$

❷ $I_a^\alpha[{}^C D_a^\alpha f](x) = f(x) + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(x-a)^j}{j!} f^{(j)}(a)$

❸ *Si* $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$ *avec* $\alpha + \beta \leq 1$ *et* f *de classe* C^1

$$({}^C D_a^\alpha \circ {}^C D_a^\beta) f = {}^C D_a^{\alpha+\beta} = ({}^C D_a^\beta \circ {}^C D_a^\alpha) f$$

La Relation avec la dérivée de Riemann-Liouville

$$({}^c D_a^\alpha f)(x) = ({}^{RL} D_a^\alpha f)(x) - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{f^{(j)}(a)(x-a)^{j-\alpha}}{\Gamma(j+1-\alpha)}$$

On déduit que si $f^{(k)}(a) = 0$ pour $k = 0, 1, 2, \ldots, m-1$ on aura ${}^c D_a^\alpha = {}^{RL} D_a^\alpha$

1.3 Les sous familles Résolvantes

Définition 1.3.1. [6] Soit $\alpha > 0$. une famille d'opérateur $T_\alpha(t) : \mathbb{R}_+ \longrightarrow B(X)$ est appelé α-résolvant opérateur($\alpha - ROF$) si les conditions suivantes sont satisfaites :

❶ $T_\alpha(.)$ et fortement continu sur $\mathbb{R}_+$ est $T_\alpha(0) = I$

❷ $T_\alpha(s)T_\alpha(t) = T_\alpha(t)T_\alpha(s)$ pour tous $s, t \geq 0$

❸ L'équation fonctionnelle

$$T_\alpha(s)I_t^\alpha T_\alpha(t) - I_s^\alpha T_\alpha(s)T_\alpha(t) = I_t^\alpha T_\alpha(t) - I_s^\alpha T_\alpha(s)$$

vérifier pour tous $s, t \geq 0$.

Le générateur A de T_α est défini par :

$$D(A) = \left\{ x \in X : \lim_{t \to 0^+} \frac{T_\alpha(t)x - x}{\psi_{\alpha+1}(t)} existe \right\}$$

et

$$Ax = \lim_{t \to 0^+} \frac{T_\alpha(t)x - x}{\psi_{\alpha+1}(t)}, x \in D(A)$$

où $\psi_\alpha(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ pour $t \ > 0$, $\psi_\alpha(t) = 0$ pour $\ t = 0$, $\psi_{\alpha+1}(t) = \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$

Définition 1.3.2. [4] Un α- résolvant T_α est dit analytique, si la fonction $T_\alpha(t) : \mathbb{R}_+ \longrightarrow B(X)$ admet une extension analytique à un secteur $\sum(0, \theta_0)$ pour certains $0 < \theta_0 \leq \frac{\pi}{2}$. Un opérateur de solution analytique T_α est dit de type analytique (ω_0, θ_0) si pour chaque $\theta < \theta_0$ est $\omega > \omega_0$ il existe $M_1 = M_1(\omega, \theta)$ tel que $||T(z)|| \leq M_1 e^{\omega Re(z)}$ pour $z \in \sum(0, \theta)$ où $Re(z)$ désigne la partie réelle de z

pour $\omega, \ \theta \ \in \mathbb{R}$, soient

$$\sum(\omega, \theta) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \arg|(\lambda - \omega)| \ < \theta\}$$

Définition 1.3.3. [6] la famille (T_α) est dite bornée de manière exponentielle s'il existe deux constantes

$M \geq 0, \omega \geq 0$ tel que :

$$||T_\alpha(t)|| \leq Me^{\omega t}, t \geq 0$$

Dans ce cas, nous écrivons $A \in C_\alpha(M, \omega)$.

Proposition 1.3.1. *soit $(T_\alpha(t))$ un $\alpha-ROF$ engendré par l'opérateur A . Les assertions suivant vérifies :*

❶ $T_\alpha(t)D(A) \subset D(A)$ *et* $AT_\alpha(t)x \ = \ T_\alpha(t)Ax \ \ \forall x \in D(A)$ *et* $t \geq 0$.

❷ $\forall x \in X, \ I_t^\alpha T_\alpha(t)x \in D(A)$ *et* $T_\alpha(t)x = x + AI_t^\alpha T_\alpha(t)x, t \geq 0$.

❸ $x \in D(A)$ *et* $Ax = y$ *si et seulement si* $T_\alpha(t)x \;=\; x + AI_t^\alpha T_\alpha(t)x,\ t \geq 0.$

❹ *A est fermée, et définie a domaine dense.*

Proposition 1.3.2. *soit* $\alpha > 0$. $A \in C_\alpha(M, \omega)$ *si et seulement si* $(\omega^\alpha, \infty) \subset \rho(A)$ *et il existe une fonction fortement continue* $T_\alpha(t) : \mathbb{R}_+ \longrightarrow B(X)$ *tell que* $\|T_\alpha(t)\| \leq Me^{\omega t}$ *est*

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} T_\alpha(t) x dt = \lambda^{\alpha-1} R(\lambda^\alpha, A)x \quad \lambda > \omega$$

pour tout $x \in X$. *En outre,* $T_\alpha(t)$ *est le* $\alpha - ROF$ *engendré par l'opérateur A.*

Lemme 1.3.1. *[5] Supposons que* $T_\alpha(t)$ *est une famille résolvant analytique compact* (ω_0, θ_0). *alors , les éléments suivants sont satisfaites :*

❶ $\lim_{h\to 0} \|T_\alpha(t+h) - T_\alpha(t)\| = 0$ *pour* $t > 0$ *;*

❷ $\lim_{h\to 0^+} \|T_\alpha(t+h) - T_\alpha(h)T_\alpha(t)\| = 0$ *pour* $t > 0$ *;*

❸ $\lim_{h\to 0^+} \|T_\alpha(t) - T_\alpha(h)T_\alpha(t-h)\| = 0$ *pour* $t > 0$.

Lemme 1.3.2. *[4] Soit* $T_\alpha(t)$ *une famille d'opérateur continu pour la topologie uniforme pour* $t > 0$. *On suppose que* $T_\alpha(t)$ *est compact pour* $t > 0$. *alors*

$$\lim_{h\to 0} \|T_\alpha(t+h) - T_\alpha(h)T_\alpha(t)\| = 0 \;\; \forall\, t > 0$$

Chapitre 2

Étude d'un équations différentielles fonctionnelle d'ordre fractionnaires

Les équations différentielles fractionnaires sont une généralisation naturelle des équations différentielles ordinaires. Elles peuvent décrire de nombreux phénomènes dans divers domaines de la science et de l'ingénierie tels que le contrôle, milieux poreux, électrochimie, ...etc Il a été prouvé que dans de nombreux cas, ces modèles fournissent des résultats plus appropriés que les modèles analogues avec des dérivées entières. En conséquence, l'étude des équations différentielles fractionnaires gagne beaucoup d'importance et d'attention.
Ce chapitre est consacré à l'existence de solutions d'une équation différentielle fonctionnelle d'ordre fractionnaire avec conditions non local Nous y abordons ces résultats en appliquant le théorème du point fixe dû a Burton et Kirk introduisant la somme des deux opérateurs l'un complètement continus et l'autre de contraction

2.1 Présentation du problème

Notre objectif dans ce travail est d'étudier l'existence de solutions faible pour l'équation différentielle fractionnaire semi-linéaire avec la condition non locale de la forme

$$^{c}D_t^{\alpha}y(t) - Ay(t) = f(t, y_t), t \in J = [0, b] \tag{2.1.1}$$

$$y(t) + h_t(y) = \phi(t), t \in [-r, 0] \tag{2.1.2}$$

O$\grave{u}$

•$h_t(y) : C([a, b], E) \longrightarrow E$

•$^{c}D_t^{\alpha}$ désigne la dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre α o$\grave{u}$ $0 < \alpha < 1$

•$B(E)$ désigne l'espace de Banach des opérateurs linéaires bornés de E dans E avec la norme $||N||_{B(E)} = \sup\{| N(y) |:| y |= 1\}$

• pour $\phi \in D$ la norme de ϕ et définie par $||\phi||_D = \sup\{| \phi(\theta) |: \theta \in [-r, b]\}$,

•$L^1(J, E)$ l'espace de Banach de fonctions mesurables $y : J \longrightarrow E$ qui sont Bochner intégrables normé par $||y||_{L^1} = \int_0^b | y(t) | \, dt$.

•$f : [0, b] \times D \longrightarrow E$ est une fonctions données

•$A : D(A) \subset E \longrightarrow E$ est Le générateur d'une famille α-résolvant $(T_\alpha(t))$

•$D = \{\phi : [-r, b] \longrightarrow E, \phi$ est continu$\}$

• Pour toute fonction continue y définie sur $[-r, b]$ et tout $t \in J = [0, b]$ on définit l'histoire de l'état de $t - r$ jusqu'à r par

$$y_t(\theta) = y(t + \theta), \theta \in [-r, 0]$$

•$C([a, b], E)$: espace des fonctions continues sur $[a, b]$ à valeurs dans un espace de Banach E

2.2 Existence de la solution faible

Dans cette section nous allons établir l'existence de la solution faible du problème (2.1.1)-(2.1.2), avant de commencer et de prouver les résultats, on donne la définition de la solution faible.

Définition 2.2.1. [1] Une fonction $y \in D$ est dite solution faible du problème (2.1.1)-(2.1.2) si

$y(t) = \phi(t) - h_t(y), \ \forall t \in [-r, 0]$ et

$$y(t) = T_\alpha(t)[\phi(0) - h_0(y)] + \int_0^t T_\alpha(t-s) f(s, y_s) ds, \ \forall t \in J$$

Notre résultat dans cette section est basé sur le théorème de point fixe dûe à Burton et Kirk.

Théorème 2.2.1. *[1] Soit X un espace de Banach, et $A, B : X \longrightarrow X$ deux opérateurs satisfaisants :*

❶ *A est une contraction, et*

❷ *B est complètement continue*

Alors on a

— *l'équation $y = A(y) + B(y)$ a une solution ou*

— *l'ensemble $\Gamma = \{u \in X : \lambda A(\frac{u}{\lambda}) + \lambda B(u) = u, \ \lambda \in (0, 1)\}$ est non borné.*

on propose les hypothèses suivantes :

(H1) supposons que A engendre un famille α-ROF $(T_\alpha(t))$ qui est compact pour $t \in J$ vérifiant

$M = \{\sup \|T_\alpha(t)\| < \infty : \ t \in J\}$

(H2) $f : J \times D \longrightarrow E$ est Carathéodory et $p \in L^1(J, \mathbb{R}_+)$ et une fonction continue croissante $\psi : [0, \infty) \longrightarrow (0, \infty)$ tell que :

$$|f(t, x)| \leq p(t)\psi(\|x\|_D), \ t \in J, \ \forall x \in D$$

(H3) $\exists\, \delta; \ 0 < \delta < 1, \ |h_t(x) - h_t(y)| \ \leq \delta |x - y| \ \ t \in [-r, b], \ x, \ y \in D$

avec

$$\|p\|_{L^1} < \int_{D_0}^{\infty} \frac{du}{\psi(u)}$$

O*ù*

$$D_0 = \frac{M(\|\phi\|_D + c)}{1 - \delta}, \ D_1 = \frac{M}{1 - \delta}$$

$$\|h_0(0)\| = c$$

Théorème 2.2.2. *Supposons que* **(H1) - (H3)** *sont satisfaites alors le problème (2.1.1)-(2.1.2) admet au moins une solution faible sur* $[-r, b]$.

Démonstration. On transforme le problème (2.1.1)-(2.1.2) à un problème de point fixe, considérons les deux opérateurs :

$$F, G : C([-r, b], E) \longrightarrow C([-r, b], E)$$

défini par

$$F(y)(t) = \begin{cases} \phi(t) - h_t(y) & \text{si } t \in [-r, 0] \\ 0, & \text{si } t \in J \end{cases}$$

$$G(y)(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t \in [-r, 0] \\ T_\alpha(t)[\phi(0) - h_0(y)] + \int_0^t T_\alpha(t-s) f(s, y_s) ds & \text{si } t \in J \end{cases}$$

Alors, Le problème de trouver la solution du problème (2.1.1)-(2.1.2) est réduit à trouver la solution de l'équation $F(y)(t) + G(y)(t) = y(t),\ t \in [-r, b]$. Nous montrerons que les opérateurs F et G satisfont tous les conditions du théorème (2.2.1)

Étape(1) :G est continue.

Soit y_n est une suite telle que $y_n \longrightarrow y$ dans D. alors pour $t \in J$

$$\begin{aligned}
|G(y_n)(t) - G(y)(t)| &= |T_\alpha(t)(h_0(y) - h_0(y_n)) + \int_0^t T_\alpha(t-s)[f(s, y_{n_s}) - f(s, y_s)]ds| \\
&\leq M \mid h_0(y) - h_0(y_n) \mid + M \int_0^b |f(s, y_{n_s}) - f(s, y_s)|ds \\
&\leq M(\mid h_0(y) - h_0(y_n) \mid + \int_0^b |f(s, y_{n_s}) - f(s, y_s)|ds)
\end{aligned}$$

comme $f(s, .)$ et h sont continue pour $s \in J$, on a par le théorème de la convergence dominé de Lebesgue

$|G(y_n)(t) - G(y)(t)| \longrightarrow 0$ comme $n \longrightarrow \infty$

ainsi G est continu.

Étape(2) :G transforme un borné en un borné dans D.

Il suffit de montrer que pour toute constante positive q, il existe une constante positive l telle que pour tout $y \in G_q = \{y \in D : ||y|| \leq q\}$ on a $||G(y)|| \leq l$.

$y \in G_q$, alors on a pour chaque $t \in J$,

$$\begin{aligned}
|G(y)(t)| &= |T_\alpha(t)[\phi(0) - h_0(y)] + \int_0^t T_\alpha(t-s)f(s, y_s)ds| \\
&\leq M||\phi(0) - h_0(y)|| + M\psi(q) \int_0^t p(s)ds
\end{aligned}$$

alors on a

$$||G(y)|| \leq M||\phi(0) - h_0(y)|| + M\psi(q)||p||_{L^1} = l$$

Étape(3) : G transforme un ensemble borné dans un ensemble équicontinu dans D :

on considère G_q Comme à l'étape 2 et soit $\tau_1, \tau_2 \in J$, $\tau_1 < \tau_2$. soit $\varepsilon > 0$ tell que $\varepsilon \leq \tau_1 < \tau_2$ on a

$$
\begin{aligned}
|G(y)(\tau_2)-G(y)(\tau_1)| &\leq |(T_\alpha(\tau_2)-T_\alpha(\tau_1))[\phi(0)-h_0(y)]| \\
&+ \psi(q)\int_0^{\tau_1-\varepsilon} \|T_\alpha(\tau_2-s)-T_\alpha(\tau_1-s)\|_{B(E)}p(s)ds \\
&+ \psi(q)\int_{\tau_1-\varepsilon}^{\tau_1} \|T_\alpha(\tau_2-s)-T_\alpha(\tau_1-s)\|_{B(E)}p(s)ds \\
&+ \psi(q)\int_{\tau_1}^{\tau_2} \|T_\alpha(\tau_2-s)\|_{B(E)}ds
\end{aligned}
$$

comme $\tau_1 \longrightarrow \tau_2$ est ε suffisamment petit, d'après le lemme (1.3.2) on obtient :

$$
\begin{aligned}
|G(y)(\tau_2)-G(y)(\tau_1)| &\leq |(T_\alpha(\tau_2)-T_\alpha(\tau_1))[\phi(0)-h_0(y)]| \\
&+ \psi(q)\int_0^{\tau_1-\varepsilon} |T_\alpha((\tau_2-\tau_1)+(\tau_1-s))-T_\alpha(\tau_1-s)|_{B(E)}p(s)ds \\
&+ \psi(q)\int_{\tau_1-\varepsilon}^{\tau_1} \|T_\alpha((\tau_2-\tau_1)+(\tau_1-s))-T_\alpha(\tau_1-s)\|_{B(E)}p(s)ds \\
&+ \psi(q)\int_{\tau_1}^{\tau_2} \|T_\alpha(\tau_2-s)\|_{B(E)}ds
\end{aligned}
$$

alors en posant $h=\tau_2-\tau_1$ donc

$$\lim_{h\to 0}\|T_\alpha((\tau_1-s)+h)-T_\alpha(\tau_1-s)\| = 0, \text{ pour } \tau_1-s>0$$

implique la continuité dans la topologie uniforme. c'est la preuve de l'equicontinuité.

comme conséquence des étapes 1,2,3 et d'après le théorème d' Arzelá-Ascoli il suffit de montrer que G est précompacte

Soit $0 < t < b$ est fixé et soit ε un nombre réel satisfaisant $0 < \varepsilon < t$.
pour $y \in G_q$ on définit :

$$G_\varepsilon(y)(t) = T_\alpha(t)[\phi(0) - h_0(y)] + T_\alpha(\varepsilon) \int_0^{t-\varepsilon} T_\alpha(t - s - \varepsilon) f(s, y_s) ds$$

.

puisque $T_\alpha(t)$ est un opérateur compact, l'ensemble

$$Y_\varepsilon(t) = \{G_\varepsilon(y)(t) : y \in G_q\}$$

est précompact dans E pour tout ε, $0 < \varepsilon < t$. De plus, pour $y \in G_q$ on a

$$\begin{aligned}
|G(y)(t) - G_\varepsilon(y)(t)| &= |\int_0^t T_\alpha(t-s) f(s, y_s) ds - T_\alpha(\varepsilon) \int_0^{t-\varepsilon} T_\alpha(t - s - \varepsilon) f(s, y_s) ds| \\
&\leq \psi(q) \int_0^{t-\varepsilon} \|T_\alpha(t-s) - T_\alpha(\varepsilon) T_\alpha(t - s - \varepsilon)\| p(s) ds \\
&\leq \|T_\alpha(t-s) - T_\alpha(\varepsilon) T_\alpha(t - s - \varepsilon)\| \int_0^{t-\varepsilon} \psi(q) p(s) ds
\end{aligned}$$

d'après le lemme (1.3.1)

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \|T_\alpha(t-s) - T_\alpha(\varepsilon) T_\alpha(t - s - \varepsilon)\| = 0$$

par conséquent l'opérateur G est complètement continu

Étape(4) : F est une contraction

soit $x, y \in D$. alors pour $t \in J$

$$\begin{aligned}
|F(y)(t) - F(x)(t)| &= |h_t(x) - h_t(y)| \\
&\leq \delta |x - y|,
\end{aligned}$$

Ce qui est une contraction, puisque $\delta < 1$

Étape(5) : estimations a priori

Maintenant, il reste à montrer que l'ensemble

$$\Gamma = \{y \in D; y = \lambda G(y) + \lambda F(\frac{y}{\lambda}) \text{ pour } 0 < \lambda < 1\}$$

est borné .

$$\Gamma = \{y \in D; y \quad = \quad \lambda G(y) + \lambda F(\frac{y}{\lambda}) \text{ pour } 0 < \lambda < 1\} \text{ pour } t \in [-r, 0]$$

Soit $y \in \Gamma$ alors, $\lambda G(y) + \lambda F(\frac{y}{\lambda}) = \lambda(\phi(t) - h_t(\frac{y}{\lambda})) = y(t)$ pour $t \in [-r, 0]$

$$\begin{aligned} |y(t)| &= |\lambda(\phi(t) - h_t(\frac{y}{\lambda}))| \\ &\leq ||\phi(t)|| + ||h_t(y)|| \\ &\leq ||\phi|| + C \end{aligned}$$

Γ est borné pour $t \in [-r, b]$

Pour $t \in [0, b]$

$$\begin{aligned}
y(t) &= \lambda G(y) + \lambda F(\frac{y}{\lambda}) \\
|y(t)| &= |\lambda(T_\alpha(t)[\phi(0) - h_0(y)]) + \lambda \int_0^t T_\alpha(t-s) f(s, y_s) ds| \\
&\leq \lambda M(||\phi(0)|| + ||h_0(y)||) + \lambda M \int_0^t p(s)\psi(||y_s||)ds) \\
&\leq M(||\phi(0)|| + ||h_0(y) - h_0(0) + h_0(0)||) + M \int_0^t p(s)\psi(||y_s||)ds) \\
&\leq M(||\phi|| + \delta||y|| + ||h_0(0)|| + \int_0^t p(s)\psi(||y_s||)ds)
\end{aligned}$$

$$|y(t)| \leq M(||\phi|| + ||h_0(0)||) + M\Big[\int_0^t p(s)\psi(||y_s||]ds + \delta||y||\Big]$$

On considère la fonction μ définie par :

$$\mu(t) = \sup\{|y_s| : 0 < s < t\},\ 0 < t < b.$$

alors $||y_s|| \leq \mu(t)$ pour tout $t \in J\ \exists\ t^* \in [0, b]$, $\mu(t) = |y(t^*)|$

pour $t \in [0, b]$, (on note $t^* \leq t$)

$$\begin{aligned}
\mu(t) &\leq M(||\phi|| + ||h_0(0)||) + M\Big[\int_0^t p(s)\psi(\mu(s))ds + \delta\mu(t))\Big] \\
\mu(t) &\leq M(||\phi|| + ||h_0(0)||) + M\Big[\int_0^t p(s)\psi(\mu(s))ds + \delta\mu(t))\Big] \\
(1-\delta)\mu(t) &\leq M(||\phi|| + ||h_0(0)||) + M\Big[\int_0^t p(s)\psi(\mu(s))ds\Big]
\end{aligned}$$

Nous avons donc

$$\mu(t) \leq D_0 + D_1 \int_0^t p(s)\psi(\mu(s))ds)$$

On Prend le côté droit de l'inégalité si dessus comme $v(t)$. alors on a

$$\mu(t) \leq v(t)\ t \in J = [0, b],$$

$$v(0) = D_0,$$

et

$$v'(t) = D_1 p(t)\psi(\mu(t)), \text{ pour } t \in J.$$

on utilise la croissance de ψ on obtient

$$v'(t) \leq D_1 p(t)\psi(v(t)), t \in J.$$

ce qui est

$$\frac{v'(t)}{\psi(v(t))} \leq D_1 p(t), \ t \in J.$$

Par intégration de 0 à t on obtient

$$\int_0^t \frac{v'(s)}{\psi(v(s))} ds \leq D_1 \int_0^t p(s) ds$$

.

Par un changement de variable on a

$$\int_{v(0)}^{v(t)} \frac{du}{\psi(u)} \leq D_1 \int_0^b p(s) ds = D_1 \|p\|_{L^1} < \int_{D(0)}^{\infty} \frac{du}{\psi(u)}$$

Par conséquent, il existe un constant N tel que (par application du lemme de Gronwall (1.1.1).

$$\mu(t) \leq v(t) \leq N \text{ pour tous } t \in J.$$

Maintenant à partir de la définition de μ, il s'ensuit que

$$\|y\| = \sup_{t \in [-r,b]} | y(t) | \leq \mu(b) \leq N, \forall\, y \in \Gamma.$$

Cela montre que l'ensemble Γ est borné, par conséquente d'après le théorème (2.2.1) On déduit que $F + G$ admet un point fixe qui est la solution faible du problème (2.1.1)-(2.1.2)

□

2.2.1 Exemple

Un exemple pour illustrer notre théorie, considérons le problème différentiel fractionnaire

$$^{c}D_t^{\alpha} z(t,x) = \frac{\partial^2 z(t,x)}{\partial x^2} + Q(t, z(t-r,x)), x \in [0,\pi],\ t \in [0,b] \tag{2.2.1}$$

$$z(t,0) = z(t,\pi) = 0, t \in [0,b] \tag{2.2.2}$$

$$z(t,x) + H(t-r, z(t,x)) = \phi(t,x),\ x \in [0,\pi], t \in [-r,0] \tag{2.2.3}$$

$E = L^2[0,\pi]$

Ce problème peut être écrit comme suit

$$^{c}D_t^{\alpha} y(t)(x) - Ay(t)(x) = F(t, y(t-r))(x), x \in [0,\pi],\ \ t \in [0,b] \tag{2.2.4}$$

$$y(t)(0) = y(t)(\pi) = 0,\ \ t \in [0,b] \tag{2.2.5}$$

$$y(t)(x) + h_t(y)(x) = \phi(t)(x), x \in [0,\pi],\ \ t \in [-r,0] \tag{2.2.6}$$

Et on a

$z(t,x) = y(t)(x),\ \ t \in J,\ \ x \in [0,\pi]$

$z(t,0) = y(t)(0)$

$z(t,\pi) = y(t)(\pi)$

$\phi(t,x) = \phi(t)(x),\ \ t \in [0,\pi], x \in [0,\pi]$

$Q(t, z(t-r,x)) = F(t, y(t-r))(x)$

$A : D(A) \subset E \longrightarrow E$ avec $A\omega = \omega''$ de domaine $D(A) = \{\omega \in E, \omega, \omega'$ est absolument continues, $\omega'' \ \in \ E, \ \omega(0) = \omega(\pi) = 0\}$
Il est clair que les hypothèses (H1)-(H3) sont satisfaites avec :

Si On suppose qu'il existe une fonction intégrable $\sigma : [0, b] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ tell que

$$| \ Q(t, \omega(t - r, x)) \ | \leq \sigma(t)\Omega(|\omega|)$$

o$\grave{u}$ $\Omega : [0, \infty) \longrightarrow (0, \infty)$ est continu et non décroissant avec

$$\int_1^{\infty} \frac{ds}{\Omega(s)} = +\infty$$

.

alors les hypothèses $(H_1 - H_3)$ sont satisfaites ; alors le problème (2.1.1)-(2.1.2)c admet au moins une solution $z \ \in \ [-r, b] \times [0, \pi]$

Conclusion

Dans ce travail nous avons étudié un problème d'évolution d'ordre fractionnaire non local avec retard finis. nous avons établie un résultat d'existence par la théorie du point fixe combinée avec la théorie des sous familles résolvante d'opérateur analytique.

Bibliographie

[1] N. Abada, M.Benchohra,H.Hammouche, Existence Results for Semilinear Differential Evolution Equations with Impulses and Delay, CUBO A Mathematical Journal Vol.12, No 02, (1–17), June 2010.

[2] A.Chadha, N.Pandey, Existence Of A SOlution For History Valued Neutral Fractional Differential Equation With A Nonlocal Condition , India, Pin-247667, 2014.

[3] A.Erdelyi, W.Magnus, Oberhettinger F and tricomi F, higher Transcendental Functions, Vol.III,Krieger Pub, Melbourne, florida,(1981)

[4] Z.Fan, Characterization of compactness for resolvents and its applications, Applied Mathematics and Computation,(323).pp 60-67 Suzhou, Jiangsu 215500, China.2014

[5] Z.Fan and G.Mophou, Nonlocal Problems for Fractional Differential Equations via Resolvent Operators, International Journal of Differential equations Volume 2013, Article ID 490673, 9 pages

[6] H.Hammouche, G.Kaddour, M.Benchohra, Existence Results For Impulsive Semilinear Fractional Differential Inclusions With Delay In Banach Space, Differential Inclusions, Control and Optimization 149–170 2013.

[7] A.Kilbas, H.M. Srivastava, J.J.Trujillo, Theory And AppLlications Of Fractional Differential Equations,Elsevier,Amsterdam,2006

[8] Miller, K. S. et Ross, B. An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations. New York : Wiley, 1993

[9] Oldham, K. B. and Spanier, J. The Fractional Calculus : Integrations and Differentiations of Arbitrary Order. New York : Academic Press, 1974

[10] I. Podlubny, Fractional Diffrential Equations, vol. 198 of Mathematics in Science and Engineering, Academic Press, San Diego, Calif, USA, 1999

[11] J. Pruss, Evolutionary Integral Equations and Applications, vol. 87 of Monographs in Mathematics, Birkhauser, Basel, Switzerland, 1993.

[12] A.Saadi, mémoir de doctorat : Existence de solutions positives pour certaines classes d'équations différentièlles d'ordre fractionnaire, université de Houari-Boumediène,(2016).

[13] M. Vidyasagar. Nonlinear Systems Analysis. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1993.

[14] J. Wang, Y. Zhou, and M. Feckan, Abstract Cauchy problem for fractional diffrential equations, Nonlinear Dynamics, vol. 71, no. 4, pp. 685–700, 2013.