الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
جامعة غرداية
Université de Ghardaïa
كلية العلوم والتكنولوجيا
Faculté des Sciences et de la Technologie
قسم الرياضيات والإعلام الآلي
Département de Mathématiques et Informatique

N° d'enregistrement

/…../…../…../…../…..

Mémoire

Pour l'obtention du diplôme de master
Domaine: Mathématiques et Informatique
Filière: Mathématiques
Spécialité: Analyse Fonctionnelle et Applications

Thème

Sur l'existence et le comportement asymptotique pour une équation d'onde viscoélastique avec un terme retard variable dans le temps

Par
Warda CHELLAOUA

Devant le jury composé de:

Mr. Abdelkarim Kina	M.C.B	Université de Ghardaia	Président
Mr. Smail Latreche	M.A.A	Université de Ghardaia	Examinateur
Mr. Mohamed Saadaoui	M.C.A	Université Amar Teligji de Laghouat	Encadreur

Année universitaire: 2021/2022

Remerciements

Je remercie tout d'abord ***ALLAH*** *le tout puissant, de m'avoir permis d'atteindre ce modeste niveau scientifique et de m'avoir donné le courage et la patience afin de mener à bien le travail réalisé dans cette thèse.*

Je remercie professeur Mr. ***Abdelkarim Kina*** *, pour l'honneur qu'il m'a fait d'avoir accepté de juger ce travail et d'en présider le jury de soutenance.*

J'adresse aussi mes sincères reconnaissances à Mr. ***Smail Latreche*** *, qui a accepté de participer à mon jury. Leur présence constitue un grand honneur.*

Merci pour vos remarques, vos critiques, vos conseils et simplement, pour l'intérêt que vous avez portés à mon travail.

Mes sincères remerciements et ma profonde gratitude à mon encadreur Mr. ***Mohamed Saadaoui****, pour son appui scientifique, sa disponibilité, ses orientations judicieuses et dont les compétences intellectuelles, l'expérience, la modestie et la patience ont grandement contribué à l'aboutissement de ce mémoire. Qu'il trouve, ici, l'expression de mon profond respect.*

Mes remerciements vont aussi à tous les professeurs, et toutes les personnes qui ne m'ont soutenu jusqu'au bout, et qui m'ont pas cessé de me donner des conseils très importants en signe de reconnaissance.

ملخص:

في هذا العمل نعتبر معادلة تفاضلية موجية غير خطية مرفقة بحد لزوجية ذات شرط ديريكلي. باعتبار فرضيات معينة، نثبت الوجود الكلي للحل الضعيف للمعادلة المدروسة، باستخدام طريقة فاودو غالركين. و بالاعتماد على بعض النتائج الأولية المستنبطة، ندرس السلوك المقارب للحل باستخدام طريقة ليابونوف.

كلمات مفتاحية: معادلة موجية، الوجود الكلي، فاودو غالركين، السلوك المقارب.

Résumé:

Dans ce travail, on considère une équation des ondes non linéaire de type Dirichlet viscoélastique. Sous certaines hypothèses sur les données initiales, on démontre l'existence globale de la solution faible du problème considéré en utilisant la méthode de Faedo-Galerkin. Ensuite, sous certains résultats préliminaires, on termine ce travail par l'étude du comportement asymptotique de la solution par la méthode énergétique en construisant une fonction convenable de Layponov.

Mots clés: Existence globale, Comportement asymptotique, La méthode de Faedo-Galerkin, Problème viscoelastique.

Abstract:

In this work, we consider a nonlinear wave equation of viscoelastic Dirichlet type. Under certain assumptions on the initial data, we demonstrate the global existence of the weak solution of the considered problem using the Faedo-Galerkin method. Then, under certain preliminary results, we end this work by studying the asymptotic behavior of the solution by the energy method by constructing a suitable Layponov function.

Key-words: Asymptotic comportement, Faedo-Galerkin method, Global existence, Viscoelastic problem.

Table des Matières

Chapitre 1

Introduction et outils mathématiques

1.1 Plane de mémoire

Le mémoire est composé de trois chapitres :

*Dans le premier chapitre : On rappelle quelques notions d analyse fonctionnelle qui seront utilisées dans notre travail.

*Dans le deuxième chapitre : Nous utilisons la méthode de Faedo-Galerkine pour prouver que la solution faible du système considéré existe globalement.

*Dans le troisième chapitre : Nous utilisons la méthode de Lyapunov pour prouver que lorsque la fonction h est relaxée, l'énergie associée à la solution de notre système décroît vers zéro à infi, afin d'étudier le comportement asymptotique de la solution. Le procédé comprend l'estimation de l'énergie fonctionnelle équivalente.

On définit l'énergie de notre système viscoélastique par :

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{1}{m+2}\left\|u_t(t)\right\|_{m+2}^{m+2} + \frac{1}{2}\left\|\nabla u(t)\right\|_2^2 + \frac{1}{2}\left(1-\sigma(t)\int_0^t g(s)\,ds\right)\left\|\Delta u_t(t)\right\|_2^2 - \frac{1}{p}\left\|u_t(t)\right\|_p^p \\ &\quad +\sigma(t)(g\circ\Delta u)(t) + \xi(t)\tau(t)\int_\Omega\int_0^1 H((z(x,k,t)))\,dk\,dx \end{aligned} \tag{1.1}$$

pour les résultats de stabilité on utilise la méthode des multiplicateurs basée sur la construction d une fonction de Lyapunov $L(t)$ équivalente l'énergie $E(t)$ qui vérife

$$\lambda_1 E(t) \leq L(t) \leq \lambda_2 E(t) \tag{1.1.2}$$

avec $\lambda_1; \lambda_2$ sont deux constantes positives.

*Et à la fin donne une conclusion générale.

1.1.1 Notation

Dans tout ce qui suit, les notations suivantes serons utilisées.

Ω : Un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière régulière.

$\eta := (\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n)$:le vecteur unitaire normal à Γ orionté vers l'extérieur de Ω.

$C^k(\Omega)$: Espace des fonctions k fois continûment différentiables sur (k entier ≥ 0).

$C_0^\infty(\Omega)$: L'espace des fonctions indéfniment dérivables à support compact.

$L^p(\Omega)$: Espace de Lebesgue $0 \leq p \leq \infty$.

$D'(\Omega)$: Espace des distributions.

$W^{m,p}(\Omega); H^m(\Omega)$: Espaces de Sobolev, $0 \leq p \leq 1$; $m \in \mathbb{N}$;($H^m(\Omega) := W^{m;2}(\Omega)$).

$W_0^{m,p}(\Omega); H_0^m(\Omega)$: L'adhérence de $C_0^\infty(\Omega)$ dans $W^{m,p}(\Omega)$ respectivement dans $H^m(\Omega)$.

$H^m(\Omega)$: Espace de Hilbert

$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$: le gradient de la fonction u en $x \in \mathbb{R}^n$.

$\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$: Le Laplacien.

$u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$ la dérivée de u par rapport à t.

$u_{tt} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ la dérivée d'ordre 2 de u par rapport à t.

1.2 Introduction

1.2.1 L'importance de l'étude

Les systèmes dynamiques sont un ensomle de phénomènes qui se développent dans le temps et sont liés les uns aux autres de manière déterministe ou causale. L'étude de la stabilité de ces phénomènes est très importante dans le développement et la découverte des sciences:

Nucléaire : emballement d'un réacteur de fission ou extinction d'un plasma confiné (réacteur de fusion).

Chimie : emballement d'un réacteur homogène (Bhopal) ou hétérogène (torréfaction bois).

Biologie : systèmes proies-prédateurs (ressources-consommateurs).

Prévision des ressources halieutiques : sardine contre thon (risque d'extinction d'une espèce de poisson. La surpêche d'une espèce modifie/rompt l'équilibre sardine-thon).

Systèmes biologiques à évolution rapide : cellule contre virus (plus ou moins de virulent) et antibiotique contre bactérie (plus ou moins de résistante).

Contrôle-commande : stabilité de la trajectoire d'une fusée, un satellite, d'un avion, . . .

Mécanique des fluides: instabilités variées

Mécaniques: vibrations (élasticité)

Nous utilisons certaines techniques qui permettent la modélisation de ces systèmes en équations mathématiques qui peuvent être étudiées et représentées, il est à noter dans les études et recherches récentes que les équations aux dérivées partielles ont été largement utilisées comme modèles mathématiques pour ces phénomènes en étudiant :

1- Le comportement limite des solutions .

2- La stabilité des solutions par rapport aux conditions initiales.

3- La stabilité des solutions par rapport à des perturbations portant sur l'équation differentielle.

Modéliser l'objet de l'étude dans les problèmes de vibrations des structures élastiques, Le but de la stabilisation est d'amortir les vibrations grâce à la rétroaction. Par conséquent, il comprend le mécanisme de dissipation pour s'assurer que l'énergie de la solution est plus ou moins rapidement réduite à zéro. Plus précisément, le problème de stabilité qui nous intéresse revient à étudier le comportement asymptotique de l'énergie que l'on note $\lim_{t\to+\infty} E(t)$, on calcule sa limite. Si cette limite est nulle, alors chercher une estimation de sa vitesse décroissante vers zéro.

Les phénomènes de vibration apparaissent dans presque toutes les structures mécaniques. Plusieurs types de vibrations sont indésirables car ils nuisent au fonctionnement et à la durée de vie de ces structures. Ils peuvent provoquer des fractures structurelles, des défaillances, de l'usure et même des dommages. De plus, ils peuvent présenter un danger pour les utilisateurs. Il existe de nombreuses excitations dynamiques qui provoquent ces vibrations. Ils proviennent soit de l'environnement extérieur (sol, atmosphère, eau, contact ou impact avec d'autres ouvrages), soit d'équipements mobiles internes (machines intégrées à l'ouvrage. . .). L'élimination voire la réduction de ces vibrations est un problème majeur en ingénierie, particulièrement en robotique.

Les systèmes retards :

D'un point de vue pratique, notamment en sciences de l'ingénieur, on observe que le phénomène de retard se produit naturellement dans le processus physique. Parmi les principales sources de retard, on peut citer le temps de réaction des capteurs ou actionneurs, le temps de transmission des informations, le temps de transmission du matériel ou encore le temps de mesure. Par conséquent, afin de se rapprocher du processus réel, une meilleure modélisation réside dans la conception d'un "système à retard" dans lequel interviennent des équations différentielles, et son évolution est différente des systèmes ordinaires, et ne dépend pas seulement de la valeur actuelle instantanée de son variables d'état. ; Font également partie de leurs valeurs passées. Dans ce cas, il est nécessaire de se remémorer une partie de "l'histoire" du système pour comprendre son évolution, les chercheurs se sont intéressés aux problémes de stabilisation avec un terme de retard, les phénoménes de retard (en temps) apparaissent dans de nombreuses applications comme la biologie , mécanique, encore en automatique, un effet de retard peut être la cause d'instabilité: un retard arbitrairement petit peut déstabiliser le système ou améliorer la performance du système (voir [1], [15]).

Ainsi les problèmes de stabilité des systèmes avec des retards sont d'une grande importance. Pour obtenir la stabilité de ces systèmes, nous avons fait des hypothèses que nous définirons plus tard, pour compenser les effets d'instabilité qui peuvent intervenir.

Dans ce travail, les différents résultats précédents de stabilité uniforme ont été significativement améliorés.

1.2.2 Le problème étudié

On s'intéresse l'étude de l'existence globale d'une solution faible et la stabilité d'une équation onde non linéaire de type Dirichlet viscoélastique :

$$\begin{cases} |u_t|^m u_{tt}(x,t) - \triangle u(x,t) - \triangle u_{tt} - \sigma(t) \int_0^t g(t-s) \triangle u_s(s)\, ds \\ +\mu_1 h_1(u_t(x,t)) + \mu_2 h_2(u_t(x,t-\tau(t))) = |u|^{p-1} u, \text{ in } \Omega \times]0,+\infty[\\ u(x,t) = 0, \text{ on } \quad \Gamma_0 \times [0,+\infty[\,, u(x,0) = u_0(x), \\ u_t(x,0) = u_1(x) \quad \text{in } \Omega, \ u_t(x,-t) = f_0(x,t)) \quad \text{on } \Omega \times [0,1] \end{cases} \tag{1.2.1}$$

où Ω est un domaine régulier et borné de $IR^n, (n \geq 1)$, $m > 0, \mu_1, \mu_2$ sont des nombres réels positifs, $u = u(x,t), t \geq 0, x \in \Omega$, désigne Δ l'opérateur laplacien par rapport à la variable x,

.

- L équation du probléme (1.2.1) décrit les vibrations de la exion d une plaque mince avec une densité variable, dépendante de la vitesse, donnée par le terme $|u_t|^m > 0$.
- Δu_{tt} est un terme dispersif .
- $\int_0^t g(t-s) \triangle u(s)\, ds$ est un terme mémoire dissipatif où $h(t)$ est une fonction de relaxation continue et décroissante.
- $\tau(t) \geq \tau_0 > 0$ représente le terme de retard variant dans le temps,
- $\mu_1 h_1(u_t(x,t))$ représente l'amortissement par frottement localisé linéaire
- $\mu_2 h_2(u_t(x,t-\tau(t)))$ désigne le terme de retard variable dans le temps
- Les conditions initiales (u_0, u_1, f_0) se voient attribuer des fonctions appartenant à des espaces appropriés.

1.3 Outils mathématiques

1.3.1 Espace de Banach

Le but de chapitre est de rappeller, sans démonstration, les diffrents outils d analyse que nous allons utiliser. Pour plus de détails (voir [3], [4]).

Définition 1.3.1 *Soit E est un espace de Banach, on note E' son dual, c'est ta dire l'ensemble des formes linéaires continues sur E.*

Notation 1.3.1 *Si $f \in E'$ et si $u \in E$ alors l image $f(u)$ est noté par le crochet de dualité $\langle f, u \rangle_{E' \times E}$:*

Définition 1.3.2 *L espace dual de noté E'' s'appelle le bidual de E:*

On munit l espace E' de la norme suivante :

$$\|f\| = \sup_{x \in E, \|x\| \leq 1} |\langle f, x \rangle|$$

et E'' son bidual, de la norme

$$\|\xi\| = \sup_{\xi \in E', \|f\| \leq 1} |\langle \xi, f \rangle|$$

1.3.2 Topologie faible et Topologie faible étoile

Définition 1.3.3 *La topologie faible $\tau(E, E')$ sur E est la topologie la moins fine sur E rendant continues toutes les applications*

$$\phi_f(x) = \langle f, x \rangle, f \in E'.$$

Proposition 1.3.1 *La topologie faible $\tau(E, E')$ est séparée.*

Définition 1.3.4 *Soit E un espace de Banach. Une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$ converge au sens de la topologie faible vers x dans E si*

$$\forall f \in E', \langle f, x_n - x \rangle \to 0.$$

Proposition 1.3.2 *Soit (x_n) une suite de E, on a*

1. $((x_n) \rightharpoonup x$ *pour* $\tau(E, E')) \iff (\langle f, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle)$ *pour* $f \in E'$
2. $((x_n) \rightharpoonup x$ *pour* $\tau(E, E')) \Rightarrow \|x_n\|$ *est bornée.*
3. *Si* $((x_n) \rightharpoonup x$ *pour* $\tau(E, E')$ *et* $f_n \to f$ *dans* $E') \Rightarrow (\langle f_n, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle)$.

Proposition 1.3.3 *Lorsque E est de dimension nie, la topologie faible $\tau(E, E')$ et la topologie usuelle coincident. En particulier une suite (x_n) converge faiblement si est seulement si elle converge fortement. Ceci n est pas vrai en dimension infinie.*

Nous allons passer maintenant la notion de convergence **faible ***.

Définition 1.3.5 *La topologie faible * sur E' désignée par $\tau(E, E')$ est la topologie la moins ne rendant continues toutes les applications dé nie sur E' par :*

$$\phi_f(x) = \langle f, x \rangle, f \in E', \quad \text{pour tout } x \in E$$

On note une suite $(f_n)_n$ qui converge vers f pour la topologie faible $*\tau(E, E')$ par $f_n \rightharpoonup^* f$

Corollaire 1.3.2 *Soit E un espace de Banach séparable et soit (f_n) une suite bornée dans E'.*

Alors il existe une sous-suite extraite (f_{n_k}) qui converge pour la topologie faible $*\tau(E, E')$.

Proposition 1.3.4 *Soit $u \in E$, On considère la forme :*

$$\begin{aligned} f_u \quad &: \quad E' \to \mathbb{R} \\ f \quad &\mapsto \quad \langle f, u \rangle \end{aligned}$$

Alors $f_u \in E''$ et

$$\begin{aligned} J \quad &: \quad E \to E'' \\ u \quad &\mapsto \quad f_u \end{aligned}$$

est une isométrie.

Définition 1.3.6 *On dit que E est réflexif si $J(E) = E''$, On identifiera par la suite E avec E''.*

Remarque 1 *La convergence faible dans E' entra ne la convergence faible * dans E'. La réciproque est vraie si la espace E est réflexif.*

Définition 1.3.7 *La topologie faible $^*\tau(E, E')$ est séparée.*

Proposition 1.3.5 *Soit (fn) une suite dans E': On a les propriétés suivantes :*

1. Si f($(f_n) \rightharpoonup f \quad \text{pour } \tau(E, E')) \Rightarrow (\langle f, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle)$ pour $f \in E'$ alors $\|f_n\|_{E'}$ est bornée.

2. Si fn *f pour la topologie faible $^*\tau(E, E')$ et si xn ! x fortement dans E alors fn (x_n) ! f (x) dans R.

Soit E un espace de Banach réflexif et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée dans E. Alors il existe une sous-suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge faiblement dans E.

On dit que E est séparable s'il contient une partie dénombrable dense dans E.

1.3.3 Espaces de Lebesgue $L^p(\Omega)$

Définition 1.3.8 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}^*$ et $p \geq 1$, on désigne par $L^p(\Omega)$ l'espace vectoriel des (classes de) fonctions $u : \Omega \to \mathbb{R}$ mesurables sur Ω et telle que $|u|^p$ est intégrable au sens de Lebesgue sur Ω;*

$L^p(\Omega) = \left\{u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ tel que } \int_\Omega |u(x)|^p \, dx < 1\right\}$, muni de la norme $\|u\|_p = \|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}$.

:

Si $p = +\infty$, on note $L^1(\Omega)$ l'espace des (classes de) fonctions mesurables $u : \Omega \to \mathbb{R}$ sur Ω et essentiellement bornées sur Ω :

$$L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ tel que } \exists c \in \mathbb{R} : \ |u(x)| < c \text{ sur } \Omega\}$$

Cet espace est muni de la norme

$$\|u\|_\infty = \|u\|_{L^\infty(\Omega)} = ess\sup_{x\in\Omega} |u(x)| = \{\inf c \text{ tel que } |u(x)| < c \text{ p.p sur } \Omega\}$$

Proposition 1.3.6 *Pour tout* $p \in [1, +\infty]$,$L^p(\Omega)$ *est un espace de Banach.*

Définition 1.3.9 *L'espace* $L^p_{loc}(\Omega)$ *est l'ensemble des fonctions* f *telles que, pour tout compact* K *de* Ω*, on a* $f/_K \in L^p(\Omega)$*:*

Définition 1.3.10 *On note* $D(\Omega)$ *l'espace des fonctions* $C^\infty(\Omega)$ *support compact dans .*

1. Si $p = 2$; alors $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega u(x)\, v(x)\, dx, \quad u, v \in L^2(\Omega).$$

2. Si $1 \leq p < +\infty$; alors $L^p(\Omega)$ est séparable et réflexif .
3. Si $1 < p < +\infty$; alors $L^p(\Omega)$ est réflexif .
4. $L^1(\Omega)$ n'est pas réflexif.
5. Si $1 \leq p < +\infty$; alors $D(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$:
6. L'espace $L^\infty(\Omega)$ n'est ni séparable ni réflexif.

Définition 1.3.11 $L^\infty(\Omega)$ *est le dual de* $L^1(\Omega)$ *on le note par* $L^\infty(\Omega) = \left(L^1(\Omega)\right)'$.

Par la suite on va donner une caractérisation des convergences faible et faible étoile dans les espaces $L^p(\Omega)$ lorsque l'ouvert Ω est borné.

1.3.4 Convergence faible et faible étoile dans les espaces $L^p(\Omega)$

Définition 1.3.12 *Soit* $(f_n)_n$ *une suite de* $L^p(\Omega)$*,*

1. On dit que la suite $(f_n)_n$ converge faiblement vers f dans $L^p(\Omega)$ pour $p \in [1, +\infty[$ si :

$$\int_\Omega f_n \phi dx \to \int_\Omega f \phi dx, \quad \forall \phi \in L^p(\Omega)$$

et on écrit $f_n \rightharpoonup f$ dans $L^p(\Omega)$;

2. on dit que la suite $(f_n)_n$ converge faible étoile vers f dans $L^1(\Omega)$ si:

$$\int_\Omega f_n \phi dx \to \int_\Omega f \phi dx, \quad \forall \phi \in L^p(\Omega)$$

et on écrit $\qquad f_n \rightharpoonup^* f \quad \text{dans } L^1(\Omega)$.

Théorème 1.3.3 *Si $f \in L^1(\Omega)$ vérifie*

$$\int_\Omega f(x)\,\phi(x)\,dx = 0 \ ,\forall \phi \in D(\Omega) \quad \Rightarrow f = 0 \quad p.p \ sur\ \Omega.$$

Proposition 1.3.7 *Soit $(f_n)_n$ une suite bornée de $L^p(\Omega)$ pour $1 \leq p < +\infty$, on peut extraire de la suite $(f_n)_n$ une sous-suite faiblement convergente i.e*

$$\exists\ f_{n_k} \in L^p(\Omega), \exists f \in L^p(\Omega), \forall \phi \in L^q(\Omega), \lim_{k\to+\infty} \int_\Omega f_{n_k}\phi dx = \int_\Omega f \phi dx.$$

Si $1 < p < +\infty$; la topologie faible $\tau(E, E')$ et la topologie faible ${}^*\tau(E, E')$ sont équivalentes.

Soit $(f_n)_n$ une suite bornée dans $L^1(\Omega)$, on peut extraire de la suite $(f_n)_n$ une sous-suite qui converge pour la topologie faible etoiel.

Ce résultat est faux dans $L^1(\Omega)$ (car cet espace n est pas réflexif), en revanche on a un résultat similaire dans $L^\infty(\Omega)$ condition de considérer la topologie * sur cet espace.

Une propriété importante concernant le produit de deux suites convergentes.

Proposition 1.3.8 *Soit $p \in [1; +\infty]$ et q son conjuqué. Si f_n converge fortement vers f dans $L^p(\Omega)$; et g_n converge faiblement vers g dans $L^q(\Omega)$; alors $f_n g_n$ converge faiblement vers fg dans $L^1(\Omega)$:.*

1.3.5 Espaces de fonctions valeurs vectorielles $L^p((0,T), X)$

Soient X un espace de Banach,$T > 0$.

Définition 1.3.13 *Soit X un espace de Banach, $1 \leq p \leq +\infty$, les espaces de Lebesgue valeurs dans X sont des espaces de fonctions mesurables, définis par :*

$$L^p((0,T), X) = \left\{ u :]0,T[\to X \quad \text{mesurables telle que } \int_0^T \|u\|_X^p \, dt < +\infty, p \neq +\infty \right\}$$

munis des normes

$$\|u\|_{L^p((0,T),X)} = \left(\int_0^T \|u\|_X^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}} \textit{ pour } 1 \leq p < +\infty$$

et

$$L^\infty([0,T], X) = \left\{ u :]0,T[\to X \quad \textit{mesurables telle que} \quad \sup_{t\in]0,T[} ess \ \|u\|_X < +\infty \right\}$$

où

$$\sup_{t\in]0,T[} ess \ \|u\|_X = \{\inf c \textit{ tel que } |u(x)| < c \ p.p \ t \in]0,T[\}$$

munis des normes

$$\|u\|_{L^\infty((0,T),X)} = \sup_{t\in]0,T[} ess \ \|u\|_X$$

On définit $C([0,T], X)$ comme l espace des fonctions $u : [0,T] \to X$ continues.

$C([0,T], X)$ est dense dans $L^p((0,T), X)$.

On a les propriétés suivantes :

1. si X est de Banach alors $L^p((0,T), X)$ est de Banach pour $1 \leq p < +\infty$;
2. si X est séparable alors $L^p((0,T), X)$ est séparable pour $1 \leq p < +\infty$;
3. si X est réfiexif alors $L^p((0,T), X)$ est réfiexif pour $1 < p < +\infty$;
4. si $X \hookrightarrow Y$ avec injection continue, alors $L^p((0,T), X) \hookrightarrow L^p((0,T), Y)$; avec injection continue.
5. si $X \hookrightarrow Y$ avec injection compacte, on n a pas forcément $L^p((0,T), X) \hookrightarrow L^p((0,T), Y)$; avec injection compacte:

1.3.6 Lemme d'Aubin-Lions

Le lemme d Aubin et Lions est un résultat de la théorie des espaces de Banach utilisé pour l'étude des équations d évolution non linéaires (voir [11]).

Lemme 1.3.1 *Soit X_0, X_1 et X trois espaces de Banach où X_0, X_1 sont des espaces reflexifs avec $X_0 \subseteq X \subseteq X_1$ Supposons que l'injection de X_0 dans X est compacte et que l'injection de X dans X_1 est continue. Pour 1 <p;q< +1; soit*

$$W = \{u \in L^p((0,T), X_0) / u_t \in L^p((0,T), X_1)\}$$

Alors l'injection de W dans $L^p((0,T),X)$ est compacte.

Lemme 1.3.2 *Soient une fonction u et une suite (u^n) de $L^q(]0,T[\times\Omega)$; $1\leq p<+\infty$ telles que*

$$\|u^n\|_{L^q(]0,T[\times\Omega)}\leq C$$

et

$$u^n\to u \qquad p.p.dans \qquad]0,T[\times\Omega$$

Alors

$$u^n\rightharpoonup u \text{ dans } L^q(]0,T[\times\Omega)$$

1.3.7 Espaces de Sobolev

Les espaces de Sobolev sont des espaces fonctionnels particulièrement adaptés la résolution des problèmes d équations aux dérivées partielles.

Espaces de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et soit p un nombre réel avec $1\leq p<+\infty$.

Définition 1.3.14 *On définit l'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ par :*

$$W^{1,p}(\Omega)=\left\{u\in L^p(\Omega);\ telque: \tfrac{\partial u}{\partial x_i}\in L^p(\Omega)\ \ pour\ tout\ i=1,...,n:\right\}.$$

où $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ est la dérivée au sens des distributions, muni de la norme

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}=\left(\|u\|^p_{L^p(\Omega)}+\sum_{i=1}^n\left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|^p_{L^p(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}}$$

qui en fait un espace de Banach.

Remarque 2 *Si $p=2; W^{1,2}(\Omega)=H^1(\Omega)$ muni du produit scalaire*

$$\langle u,v\rangle_{H^1(\Omega)}=\langle u,v\rangle_{L^2(\Omega)}+\sum_{i=1}^n\ \langle u,v\rangle_{L^2(\Omega)}$$

est un espace de Hilbert.

Espaces de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$

Soient un entier $m \geq 2$, $k \in \mathbb{N}$ et p un nombre réel avec $1 \leq p < +\infty$.

Définition 1.3.15 *L espace de Sobolev* $W^{m,p}(\Omega)$ *est défini par*

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{u \in L^p(\Omega)\,;\ telque : D^k u \in L^p(\Omega)\ \ , |k| \leq m\right\}$$

où et $D^k u$ *est la dérivée d'ordre* k *de* u *au sens de distributions, muni de la norme*

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\ \left\|\sum_{|k|\leq m} D^k u\right\|^p_{L^p(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}},\ \ pour\ 1 \leq p < +\infty.$$

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \max_{|k|\leq m}\left\|D^k u\right\|^p_{L^p(\Omega)},\ \ pour\ p = +\infty.$$

Remarque 3 *Si* $p = 2$, $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$ *est muni du produit scalaire*

$$\langle u, v\rangle_{H^m(\Omega)} = \sum_{|k|\leq m} \int_\Omega D^k u D^k v dx, \quad pour\ tout\ u; v \in H^m(\Omega)$$

:

Proposition 1.3.9 *Soit* $m \in \mathbb{N}$ *et si* $1 \leq p \leq +\infty$, *on a :*

1. $W^{m,p}(\Omega)$ *est un espace de Banach;*
2. *si* $1 \leq p < +\infty$, *alors* $W^{m,p}(\Omega)$ *est séparable et uniformément convexe ;*
3. $H^m(\Omega)$ *est un espace de Hilbert séparable.*

Espace de Sobolev

En géneral $D(\Omega)$ n'est pas dense dans $W^{m,p}(\Omega)$. On note alors l'adhérence de $D(\Omega)$ dans $W^{m,p}(\Omega)$:

Notation 1.3.4 *Soit* Ω *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^n$ *et* $m \in \mathbb{N}$*; alors on not:*

$$H_0^m(\Omega) = W_0^{m,2}(\Omega)$$

$H_0^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert, il désigne l adhérence de $D(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$; muni du produit scalaire de $H^1(\Omega)$ et de la norme

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|'_{L^2(\Omega)}.$$

Théorème d injectionde Sobolev

Théorème 1.3.5 *Soit* Ω *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^n$ *on a les inclusions suivantes.*

1. Si $1 \leq p < +\infty$, $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ *avec injection compacte pour* $q \in [1, p'[$ *et l'injection continue pour* $q \in [1, p']$

où $\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1$

2. Si $p = n$;$W^{1,n}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ *avec injection compacte pour* $q \in [1, +\infty[$

3. Si $p > n$; $W^{1,p}(\Omega) \subset C^0\left(\bar{\Omega}\right)$ *avec injection compacte.*

L injection compacte permet de passer de la convergence faible et la convergence forte comme suit:

Soit f_n *une suite convergente faiblement vers* f *dans* $W^{1,p}(\Omega)$*: Alors pour une sous-suite* f_{n_k}*, on a :*

1. si $1 \leq p < n$*, alors* $f_n \to f$ *fortement dans* $L^q(\Omega)$ *avec* $1 \leq q < \frac{np}{n-p}$.

2. si $p = n$*, alors* $f_n \to f$ *fortement dans* $L^q(\Omega)$ *avec* $1 \leq q < +\infty$.

3. si $p > n$*, alors* $f_n \to f$ *fortement dans* $L^\infty(\Omega)$.

1.3.8 Formules de Green

Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^n$.

1. Si $u \in H^1(\Omega)$, on a la formule de Green suivante :

$$\int_\Omega \Delta u v dx = \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \eta} v d\sigma - \int_\Omega \nabla u \nabla v dx \ , \quad \text{pour tout } v \in H^1(\Omega)$$

:

2. Si $u \in H^2(\Omega)$; on a la formule suivante :

$$\int_\Omega (u\Delta v - v\Delta u dx) = \int_\Gamma \left(u\frac{\partial v}{\partial \eta} - v\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) d\sigma \ , \quad \text{pour tout } v \in H^1(\Omega)$$

3. Si $u; v \in H^4(\Omega)$; on a la formule suivante :

$$\int_\Omega \left(u\Delta^2 v - v\Delta^2 u dx\right) = \int_\Gamma \left(u\frac{\partial}{\partial\eta}\Delta v - v\frac{\partial}{\partial\eta}\Delta u + \Delta u\frac{\partial}{\partial\eta} - \Delta v\frac{\partial u}{\partial\eta}\right) d\sigma$$

où $\eta = (\eta_1, ..., \eta_1)$ est la normale unitaire orientée vers l extérieurs de

1.3.9 Quelques inégalités utiles.

Inégalité de Holder

Soit u$u \in L^p(\Omega)$ et $v \in L^q(\Omega)$; alors $uv \in L^1(\Omega)$ et on a

$$\|uv\|_{L^1(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}.$$

Si $p = q = 2$ appelée l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

$$\|uv\|_{L^1(\Omega)} \leq \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)}.$$

Nous introduisons d'abord les espaces de Hilbert suivants :

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^2(\Omega)} &= \|u\|_2, \qquad \|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\nabla u\|_2, \qquad \|u\|_{H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)} = \|\Delta u\|_2 \\ \lambda_0 \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \|u\|_{2,H_0^1(\Omega)}^2; \quad \lambda_1 \|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|_{2,H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)}^2; \quad \lambda_2 \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \|u\|_{H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)}^2; \end{aligned}$$

avec $\lambda = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}$, les constantes $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda > 0$ représentent les constantes de plongement.

1.3.10 Types de stabilité :

Il existe différents types de stabilité qui peuvent être étudiés :

1. La stabilité asymptotique forte qui signi e la décroissance de l énergie des solutions vers zéro, c'est-à -dire (voir [8], [6], [5]) :

$$E(t) \to 0 \text{ quand } t \to +\infty.$$

2. La stabilité uniforme, c'est à dire (voir [10], [16], [9]) :

$$E(t) \leq Ch(t) \quad ; \text{pour tout } t \geq 0,$$

:

où C est une constante indépendante de t et qui dépend uniquement des données initiales, $h : IR \rightarrow IR^{+}$ est une fonction continue décroissante qui satisfait

$$h(t) \rightarrow 0 \text{ quand } t \rightarrow +\infty,$$

pour des systèmes linéaires ou non linéaires, ils ont utilisé la méthode des multiplicateurs et la construction de fonction de Lyapunov.

On peut distinguer la stabilité uniforme :

I) la décroissance exponentielle de l'énergie c est la décroissance la plus rapide,

$$E(t) \leq Ce^{-\zeta t} \quad \text{pour tout } t > 0$$

où C, ζ; sont des constantes positives; C dépend uniquement des données initiales, est le taux de décroissance de l'énergie.

II) la décroissance polynomiale de l énergie,

$$E(t) \leq \frac{C}{t^{\beta}} \quad \text{pour tout } t > 0$$

où C, β; sont des constantes positives; C dépend uniquement de t.

III) la décroissance logarithmique,

$$E(t) \leq \frac{C}{\log(1+t)^{k}} \quad \text{pour tout } t > 0$$

où C, k; sont des constantes positives; C dépend uniquement de t.

1.3.11 Méthode de Faedo-Galerkin

La méthode de Galerkin est une méthode très générale et très robuste. L'idée de la méthode est la suivante. Partant d'un problème posé dans un espace de dimension infinie, on procède d'abord à une approximation dans une suite croissante de sous-espaces de dimension finie.

On résout ensuite le problème approché, ce qui est en général plus facile que de résoudre directement en dimension infinie. Enfin, on passe d'une façon ou d'une autre à la limite quand on fait tendre la dimension des espaces d'approximation vers l'infini pour construire une solution du problème de départ. Il convient de noter que, outre son intérêt théorique, la méthode de Galerkin fournit également un procédé constructif d'approximation.

La démonstration de l'existence globale de la solution est basée sur la méthode de Faedo-Galerkin qui consiste à réaliser les trois étapes suivantes :

• Recherche de solutions "approchées".

• On établit, sur ces solutions approchées, des estimations a priori.

• On passe à la limite, grace à des propriétés de compacité (dans les termes non linéaires).

et on appliquera le lemme suivant :

Lemme 1.3.3 *Soit V un espace de Banach séparable de dimension infinie. Il existe une famille libre dénombrable $\{v_i\}_{i\in\mathbb{N}}$; $v_i \in V$, telle que les combinaisons linéaires finies des v_i sont denses dans V .*

Chapitre 2

Globale existence

Dans ce chapitre, on démontre un résultat d'existence globale d une solution faible pour une plaque viscoélastique de type Dirichlet §§ avec des conditions aux bords de Dirichlet, en utilisant la méthode de Faedo-Galerkin.

On utilise les espaces de Sobolev $H^4(\Omega)$, $H^2(\Omega)$ et l'espace de Hilbert $L^p(\Omega)$ avec leurs produits scalaires et normes habituels. Le premier 0 et l'indice t désigneront la différenciation temporelle et nous désignons par $\langle ; \rangle$ le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$. La constante $C_i, i \in IN$ désigne une constante positive générale, qui peut être différente selon les différentes estimations.

Pour montrer notre résultat d'existence globale on fait les hypothéses suivantes :

Soient les fonctions de relaxation g et σ on suppose

(**H0**) $g, \sigma\ IR_+ \to IR_+$ sont des fonctions dérivables non croissantes telles que g et dans C^2 et σ est une fonction C^1 satisfaisant

$$\beta' = 1 - \sigma(t) \int_0^t g(s)\, ds > b > 0, \qquad b_0 = \int_0^t g(s)\, ds < +\infty, \quad g(0) > 0 \tag{2.0.1}$$

(**H1**) Il existe une fonction dérivable non croissante $\zeta : IR^+ \to IR^+$ avec

$$\begin{aligned} \zeta(t) &> 0, \quad g'(t) \leq -\zeta(t) g(t) \quad ; \quad \left|\sigma'(t)\right| \leq \sigma(t) \quad \forall t > 0 \qquad (2.0.2) \\ \lim_{t\to+\infty} \frac{\sigma'(t)}{\zeta(t)\sigma(t)} &= 0. \qquad (2.0.3) \end{aligned}$$

Pour le terme de retard $\tau(t) \in W^{2,+\infty}(0,T)$, et il existe les constantes positives τ_0, τ_1, d telles que

$$0 < \tau'(t) \leq d < 1, 0 < \tau_0 \leq \tau(t) \leq \tau_1, \ \forall T, t > 0 \qquad (2.0.4)$$

(**H2**) Supposons que m satisfait

$$\begin{cases} 0 < m \leq +\infty, n = 1, 2 \\ 0 < m \leq \frac{2}{n-2}, n \geq 3 \end{cases} \qquad (2.0.5)$$

(**H3**) $h_1, IR \to IR$ est fonction non décroissante de classe C^1 et $H_1, IR \to IR$ est convexe, croissante et de classe $C^1(IR_+) \cap C^2\left(IR_+^*\right)$ satisfaisant

$H_1(0) = 0$ et H_1 est linéaire sur $[0, \varepsilon]$ ou $H_1'(0) = 0$ et $H_1'' > 0$ sur $]0, \varepsilon]$ tel que

$$\begin{cases} |h_1(s)| \leq c_2 |s| \quad \text{if } |s| \geq \varepsilon \\ h_1^2(s) \leq H_1^{-1}(s h_1(s)) \quad \text{if } |s| \leq \varepsilon \end{cases} \qquad (2.0.6)$$

où H_1^{-1} désigne la fonction inverse de H_1 et ε; c_2 sont des constantes positives.

(**H4**) $h_2, IR \to IR$ est une fonction impaire non décroissante de classe $C^1(IR)$ telle qu'il existe $c_3; \alpha_1; \alpha_2 > 0$

$$\begin{cases} |h_2'(s)| \leq c_3 \\ \alpha_2 s h_2(s) \leq H_2(s) \leq \alpha_1 s h_1(s) \end{cases} \qquad (2.0.7)$$

où $H_2(s) = \int\limits_0^s h_2(r)\, dr$.

(**H5**)

$$\alpha_1 \mu_2 < \frac{(1-d)}{(2-d)} \alpha_2 \mu_1$$

(**H6**) Notons par la fonction conjuguée de la fonction convexe dérivable H, c'est-à-dire,

$$H^*(s) = \sup_{t \in IR^+} (st - H(t))$$

Alors H^* est la transformée de Legendre de ϕ , qui est donnée par

$$H^*(s) = s\left(h'\right)^{-1}(s) - h\left(\left(h'\right)^{-1}(s)\right) \text{ if } s \in]0, h'(r)] \tag{2.0.8}$$

et satisfait à l'inégalité de Young généralisée

$$vw \leq H^*(s) + h(w) \text{ if } v \in]0, h'(r)], w \in]0, r] \tag{2.0.9}$$

Lemme 2.0.4 ([7]) *,For* $\sigma, g, \phi \in C^1([0, +\infty[, IR)$ *,* $u \in H_0^1(\Omega)$*, on a :*

$$\begin{aligned} \left\langle \sigma(t)\left(\int_0^t g(t-s)\phi(s)\,ds\right)(t), \phi_t(t)\right\rangle &= -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{(g\diamondsuit\phi)(t) - \left(\int_0^t g(s)\,ds\right)\|\phi(t)\|^2\right\} - \frac{\sigma(t)}{2}g(t)\|\phi(t)\|^2 \\ &+\frac{\sigma(t)}{2}\left(g'\diamondsuit\phi\right)(t) + \frac{\sigma'(t)}{2}(g\diamondsuit\phi)(t) - \frac{\sigma'(t)}{2}\left(\int_0^t g(s)\,ds\right)\|\phi(t)\|^2 \end{aligned} \tag{2.0.10}$$

et,

$$\int_0^t \langle \sigma(s)(g * \Delta u)(s), u_t(s)\rangle_\Omega = \frac{\sigma(t)}{2}\left(\int_0^t g(s)\,ds\right)\|\Delta u(t)\|_2^2 - \int_0^t \frac{\sigma(s)}{2}g(s)\|\Delta u(t)\|_2^2\,ds \tag{2.0.11}$$

avec

$$\begin{aligned} \int_0^t \left[\frac{\sigma(s)}{2}\left(g' \circ \Delta u\right)(s) + \frac{\sigma'(s)}{2}\left(\int_0^t g(s)\,ds\right)\|\Delta u(s)\|_2^2\right] ds &= \frac{\sigma(t)}{2}(g \circ \Delta u)(t) \\ -\frac{\sigma(0)}{2}(g \circ \Delta u)(0) - \int_0^t \sigma'(s)(g \circ \nabla u)(s)\,ds + \int_0^t \frac{\sigma'(s)}{2}\left(\int_0^r g(s)\,ds\right)\|\Delta u(s)\|_2^2\,ds & \end{aligned} \tag{2.0.12}$$

avec
$$\int\limits_{\Omega}\left(\int\limits_{0}^{t} g\left(t-s\right)\left(\phi\left(t\right)-\phi\left(s\right)\right)ds\right)^{2}dx \leq \left(1-t\right)C_{s}^{2}\left(g\circ\phi\right)\left(t\right)$$

$$\left(g\circ\phi\right)\left(t\right)=\int\limits_{0}^{t} g\left(t-s\right)\left\|\phi\left(t\right)-\phi\left(s\right)\right\|^{2}ds$$

et
$$\left\|\phi\right\|_{2}^{2}=\int\limits_{\Omega}\left|\phi\left(x,s\right)\right|^{2}dx.$$

2.0.12 Le problème équivalent

On utilise une technique present par (voir [13]) qui intéresse par l'changement de variable et de fonction :

$$z\left(x,k,t\right)=u_{t}\left(x,t-k\tau(t)\right)$$

Il est facile de vérifier la relation

$$\tau\left(t\right)z_{t}\left(x,k,t\right)+\left(1-\tau'\left(t\right)\right)z_{k}\left(x,k,t\right)=0 \ \text{ in } \Omega\times[0,1]\times[0,+\infty[$$

Par conséquent, le problème (1.2.1) est équivalent à

$$\begin{cases} \left|u_{t}\right|^{m}u_{tt}\left(x,t\right)-\triangle u\left(x,t\right)-\triangle u_{tt}-\sigma\left(t\right)\int\limits_{0}^{t} g\left(t-s\right)\triangle u_{s}\left(s\right)ds \\ +\mu_{1}h_{1}\left(u_{t}\left(x,t\right)\right)+\mu_{2}h_{2}\left(u_{t}\left(x,t-\tau(t)\right)\right)=\left|u\right|^{p-1}u, \text{ in } \Omega\times]0,+\infty[\\ \tau\left(t\right)z_{t}\left(x,k,t\right)+\left(1-\tau'\left(t\right)\right)z_{k}\left(x,k,t\right)=0 \ \text{ in } \Omega\times[0,1]\times[0,+\infty[\\ u\left(x,t\right)=0, \text{ on } \ \Gamma_{0}\times[0,+\infty[\,, u\left(x,0\right)=u_{0}\left(x\right), u_{t}\left(x,0\right)=u_{1}\left(x\right) \quad \text{in } \Omega, \\ z\left(x,0,t\right)=u_{t}\left(x,t\right) \text{in } \Omega\times]0,+\infty[\,, \quad z\left(x,k,0\right)=f_{0}\left(x,-k\tau(0)\right) \quad \text{on } \Omega\times[0,1] \end{cases} \tag{2.0.13}$$

2.0.13 la fonction d'énergie du système

en sous suit, on vérifier que la fonction d'énergie associée au système de viscositélastique (2.0.13) sa donné dans (2.0.14) et aussi décroissante .

Maintenant inspiré par [6], [5], On définit l'énergie associée à la solution du système 2.0.13 par

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{1}{m+2}\left\|u_t(t)\right\|_{m+2}^{m+2}+\frac{1}{2}\left\|\nabla u(t)\right\|_2^2+\frac{1}{2}\left(1-\sigma(t)\int_0^t g(s)\,ds\right)\left\|\nabla u_t(t)\right\|_2^2-\frac{1}{p}\left\|u_t(t)\right\|_p^p \\ &+\sigma(t)\,(g\circ\Delta u)(t)+\xi(t)\,\tau(t)\int_\Omega\int_0^1 H\left((z(x,k,t))\right)dkdx \qquad (2.0.14) \end{aligned}$$

où $\xi(t)$ est positif tel que

$$\frac{(\alpha_1-\alpha_2)\,\mu_2}{(1-d)\,\alpha_1\alpha_2}<\xi(t)<\frac{\alpha_2\mu_1-\alpha_1\mu_2}{\alpha_2\alpha_1} \qquad (2.0.15)$$

Cela donne (H5).

Nous avons maintenant l'existence d'une solution globale.

Lemme 2.0.5 *Soit* $2\leq p\leq\bar{q}$ *et* $\max\left(1,\frac{\bar{q}}{\bar{q}-1+p}\right)\leq m\leq\bar{q}$ *et* (u,z) *la solution de* (2.0.13) *, alors la fonctionnelle énergie défini par* (2.0.14) *satisfait*

$$\begin{aligned} E'(t) &\leq -C_1\int_\Omega u_t(t)\,h_1(u_t(x,t))\,dx-C_2\int_\Omega u_t(t)\,h_2(u_t(x,t-\tau(t)))\,dx \\ &-\frac{\sigma'(t)}{2}\int_0^t g(s)\left\|\Delta u(s)\right\|_2^2ds-\frac{\sigma(t)}{2}g(t)\left\|\Delta u(s)\right\|_2^2+\frac{\sigma'(t)}{2}(g\circ\Delta u)(t)\leq 0 \qquad (2.0.16) \end{aligned}$$

où $C_1\geq\left(\mu_1-\mu_2\frac{\alpha_1}{\alpha_2}-\xi(t)\,\alpha_1\right)$ *et* $C_2\leq\left(\xi(t)\,(1-d)\,\alpha_1-\left(1-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)\mu_2\right)$

Preuve. Multiplier la première et la deuxième équation de (2.0.13) par u_t , intégrer la première équation par Ω et la seconde par $\Omega, \int_{\partial\Omega}u(x,t)\,dx=\int_\Omega u(x,t)\,dx$ en utilisant l'intégration par partie et la formule de Green,

$$\int_\Omega |u_t|^m u_{tt}(x,t)\,u_t dx - \int_\Omega \triangle u(x,t)\,u_t dx - \int_\Omega \triangle u_{tt} u_t dx - \sigma(t)\int_\Omega \int_0^t g(t-s)\triangle u_s(s)\,ds u_t dx$$
$$+\mu_1 \int_\Omega h_1(u_t(x,t))\,u_t dx + \mu_2 \int_\Omega h_2(u_t(x,t-\tau(t)))\,u_t dx - \int_\Omega |u|^{p-1} u u_t dx$$
$$= \int_\Omega \frac{d}{dt}\frac{|u_t|^{m+2}}{m+2} dx - \int_\Omega \frac{d}{dt}\nabla^2 u(x,t)\,dx - \int_\Omega \nabla^2 u_t dx - \sigma(t)\int_\Omega \int_0^t g(t-s)\triangle u_s(s)\,ds u_t dx$$
$$+\mu_1 \int_\Omega h_1(u_t(x,t))\,u_t(x,t)\,dx + \mu_2 \int_\Omega h_2(u_t(x,t-\tau(t)))\,u_t(x,t)\,dx - \int_\Omega \frac{d}{dt}\frac{|u|^p}{p} dx = 0 \tag{2.0.17}$$

en appliquant(2.0.10) , et on a

$$\frac{d}{dt}\left[\sigma(t)(g\circ\Delta u)(t) - \frac{\sigma(t)}{2}\int_0^t g(s)\,ds\,\|u_t(t)\|_2^2\right] = \sigma(t)\left(g'\circ\Delta u\right)(t)$$
$$-\sigma'(t)\left(\int_0^t g(s)\,ds\right)\|\Delta u(t)\|_2^2 - \frac{\sigma(t)}{2}g(t)\,\|\Delta u(t)\|_2^2 + \frac{\sigma'(t)}{2}(g\circ\Delta u)(t) \tag{2.0.18}$$

Et $z(x,k,t) = u_t(x,t-k\tau(t))\,, z_k(x,k,t)$ ce qui implique que

$$\tau(t)\,z_t(x,k,t) + \left(1-\tau'(t)\,k\right) z_k(x,k,t) = 0 \quad \text{in } \Omega\times[0,1]\times[0,+\infty[\tag{2.0.19}$$

En multipliant cette équation en (2.0.19) par $\xi(t)\,h_2(z(\gamma,k,t))$ et en intégrant le résultat sur $\Omega\times(0,1)$, on obtient

$$\xi(t)\,\tau(t)\int_\Omega\int_0^1 z_t(x,k,t)\,h_2(z(\gamma,k,t))\,dkd\gamma = -\xi(t)\int_\Omega\int_0^1 \left(\left(1-\tau'(t)\,k\right)\frac{\partial}{\partial k}\left(H_2(z(\gamma,k,s))\right)\right)dkd\gamma$$

En conséquence,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left[\xi(t)\tau(t)\int_\Omega\int_0^1 H_2((z(x,k,t)))\,dkdx\right] &= -\xi(t)\left[\int_\Omega\int_0^1 \frac{\partial}{\partial k}\big(1-\tau'(t)k\big)H_2((z(x,k,t)))\,dkdx\right] \\
&\quad +\xi'(t)\tau(t)\int_\Omega\int_0^1 H_2((z(x,k,t)))\,dkdx \\
&= -\xi(t)\left[\int_\Omega \big(1-\tau'(t)k\big)H_2((z(x,k,t)))\Big]_0^1 dx\right] \\
&\quad +\xi'(t)\tau(t)\int_\Omega\int_0^1 H_2((z(x,k,t)))\,dkdx \\
&\leq -\xi(t)\left[\begin{array}{c}(1-\tau'(t))\int_\Omega H_2((z(x,1,t)))\,dx \\ -\int_\Omega H_2((z(x,0,t)))\,dx\end{array}\right]
\end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt}\left[\xi(t)\tau(t)\int_\Omega\int_0^1 H_2((z(x,k,t)))\,dkdx\right] \leq -\xi(t)\left[(1-d)\int_\Omega H_2(z(\gamma,1,t))\,d\gamma - \int_\Omega H_2(z(\gamma,0,t))\,d\gamma\right] \tag{2.0.20}$$

En utilisant(2.0.20, 2.0.18) en (2.0.17), on obtient

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{m+2}\|u_t(t)\|_{m+2}^{m+2}+\frac{1}{2}\|u_t(t)\|_{2,\Omega}^2-\frac{1}{p}\|u_t(t)\|_p^p+\frac{1}{2}\|\nabla u(t)\|_2^2\right] \\
&+\mu_1\int_\Omega u_t(x,t)h_1(u_t(x,t))\,dx+\mu_2\int_\Omega u_t(x,t)h_2(u_t(x,t-\tau))\,dx+\sigma(t)\big(g'\circ\Delta u\big)(t) \\
&-\sigma'(t)\left(\int_0^t g(s)\,ds\right)\|\Delta u(t)\|_2^2-\frac{\sigma(t)}{2}g(t)\|\Delta u(t)\|_2^2+\frac{\sigma'(t)}{2}(g\circ\Delta u)(t) \\
&-\xi(t)\int_\Omega\big[\big(1-\tau'(t)\big)H_2(z(\gamma,1,t))-H_2(z(\gamma,0,t))\big]\,d\gamma+\xi'(t)\tau(t)\int_\Omega\int_0^1 H_2(z(\gamma,k,t))\,dk\,d\gamma=0
\end{aligned} \tag{2.0.21}$$

En intégrant(2.0.21) sur $(0,t)$ on arrive à

$$\frac{1}{m+2}\left\|u_t\left(t\right)\right\|_{m+2}^{m+2}+\frac{1}{2}\left\|u_t\left(t\right)\right\|_{2,\Omega}^{2}-\frac{1}{p}\left\|u_t\left(t\right)\right\|_{p}^{p}+\frac{1}{2}\left\|\nabla^2 u\left(t\right)\right\|_{2}^{2}$$

$$\mu_1\int_{\Omega}\int_0^t u_t\left(x,t\right)h_1\left(u_t\left(x,t\right)\right)dtdx+\mu_2\int_{\Omega}\int_0^t u_t\left(x,t\right)h_2\left(u_t\left(x,t-\tau\right)\right)dtdx$$

$$-\xi\left(t\right)\int_{\Omega}\left[\left(1-\tau'\left(t\right)\right)H_2\left(z\left(\gamma,1,t\right)\right)-H_2\left(z\left(\gamma,0,t\right)\right)\right]d\gamma+\xi'\left(t\right)\tau\left(t\right)\int_{\Omega}\int_0^1 H_2\left(z\left(\gamma,k,t\right)\right)dkd\gamma$$

$$-\int_0^t\sigma'\left(t\right)\left(\int_0^t g\left(s\right)ds\right)\left\|\Delta u\left(t\right)\right\|_2^2 dt+\int_0^t\frac{\sigma\left(t\right)}{2}g(t)\left\|\Delta u\left(t\right)\right\|_2^2+\int_0^t\frac{\sigma'\left(t\right)}{2}\left(g\circ\Delta u\right)\left(t\right)dt$$

$$+\int_0^t\sigma\left(t\right)\left(g'\circ\Delta u\right)\left(t\right)dt=0$$

A partir de la définition de H et en utilisant (2.0.8), on obtient

$$H^*\left(h_2\left(u_t\left(x,t-\tau\left(t\right)\right)\right)\right)=u_t\left(x,t-\tau\left(t\right)\right)h_2\left(u_t\left(x,t-\tau\left(t\right)\right)\right)-H\left(u_t\left(x,t-\tau\left(t\right)\right)\right)\quad(2.0.22)$$

D'où

$$H^*\left(s\right)=sh_2^{-1}\left(s\right)-H\left(h_2^{-1}\left(s\right)\right),\forall s\geq 0\qquad(2.0.23)$$

et

$$st-H\left(t\right)\leq H^*\left(s\right)\qquad(2.0.24)$$

Par(2.0.23, 2.0.24) avec $s=h_2\left(u_t\left(x,t-\tau\left(t\right)\right)\right)$, $t=u_t\left(x,t\right)$ et (2.0.22)

$$u_t\left(x,t\right)h_2\left(u_t\left(x,t-\tau\left(t\right)\right)\right)\leq H^*\left(s\right)+H\left(u_t\left(x,t\right)\right)$$

Par(2.0.9) avec $v = h_2(u_t(x, t - \tau(t)))$, $w = u_t(x, t)$ et (2.0.22)

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} u_t(x,t) h_2(u_t(x, t-\tau(t))) d\gamma \\ \leq \quad & \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \int_{\Omega} u_t(x,t) h_1(u_t(x,t)) d\gamma \end{aligned} \tag{2.0.25}$$

En utilisant(2.0.7), on obtient

$$\xi(t) \int_{\Omega} H_2(z(\gamma, 0, t)) d\gamma \leq \xi(t) \alpha_1 \int_{\Omega} \int_0^t u_t(x,t) h_1(u_t(x,t)) dt d\gamma \tag{2.0.26}$$

et,

$$1 - \tau'(t) k < 1 - d$$

,

$$\begin{aligned} \xi(t) \int_{\Omega} \left(1 - \tau'(t)\right) H_2(z(\gamma, 1, t)) d\gamma \quad & \leq \quad \xi(t) \left(1 - \tau'(t)\right) \int_{\Omega} \int_0^t u_t(x,t) h_2(u_t(x, t-\tau(t))) dt d\gamma \\ & \leq \quad \xi(t)(1-d) \int_{\Omega} \int_0^t u_t(x,t) h_2(u_t(x, t-\tau(t))) dt d\gamma \end{aligned} \tag{2.0.27}$$

En utilisant (2.0.26, 2.0.27, 2.0.25), on obtient

$$\begin{aligned} & \mu_1 \int_{\Omega} \int_0^t u_t(x,t) h_1(u_t(x,t)) dt dx + \mu_2 \int_{\Omega} \int_0^t u_t(x,t) h_2(u_t(x, t-\tau)) dt dx \\ & -\xi(t) \int_{\Omega} \left[\left(1 - \tau'(t)\right) H_2(z(\gamma, 1, t)) - H_2(z(\gamma, 0, t))\right] d\gamma + \xi'(t) \tau(t) \int_{\Omega} \int_0^1 H_2(z(\gamma, k, t)) dk d\gamma \\ \leq \quad & \left(\mu_1 - \mu_2 \frac{\alpha_1}{\alpha_2} - \xi(t) \alpha_1\right) \int_{\Omega} \int_0^t u_t(x,t) h_1(u_t(x,t)) dt dx \\ & + \left(\xi(t)(1-d) \alpha_1 - \left(1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right) \mu_2\right) \int_{\Omega} \int_0^t u_t(x,t) h_2(u_t(x, t-\tau(t))) dt dx \end{aligned} \tag{2.0.28}$$

avec

$$\frac{(\alpha_2-\alpha_1 d)}{(1-d)}\mu_2 < \alpha_2\mu_1$$

En combinant (2.0.18), (2.0.19), (2.0.28) et (2.0.15) ensemble, nous obtenons

$$\begin{aligned}
E(t)-E(0) \leq\; & -C_1\int_0^t\int_\Omega u_t(x,t)\,h_1(u_t(x,t))\,d\gamma dt - C_2\int_0^t\int_\Omega u_t(x,t-\tau(t))\,h_2(u_t(x,t-\tau(t)))\,d\gamma dt \\
& +\int_0^t \sigma(t)\left(g'\circ\Delta u\right)(t)\,dt - \int_0^t \sigma'(t)\left(\int_0^t g(s)\,ds\right)\|\Delta u(t)\|_2^2\,dt + \int_0^t \frac{\sigma(t)}{2} g(t)\,\|\Delta u(t)\|_2^2 \\
& -\frac{\sigma'(t)}{2}\int_0^t g(s)\,\|\Delta u(s)\|_2^2\,ds + \int_0^t \frac{\sigma'(s)}{2}\,(g\circ\Delta u)(s)\,ds
\end{aligned} \tag{2.0.29}$$

Après avoir dérivé, nous obtenons le résultat souhaité(2.0.16). ■

2.0.14 Existence globale

Dans cette section, nous utilisons l'approximation de Faedo-Galerkin, la méthode de compacité et le théorème du point fixe. Nous utilisons la méthode de Faedo–Galerkin pour construire la solution approximative (1.2.1), que nous établissons dans ce suivante :

Théorème 2.0.6 *Soit* $u_0 \in H^4(\Omega)\cap H_0^2(\Omega)$, $u_1 \in H_0^2(\Omega)$, $f_0 \in H_0^2\left(\Omega, H^2(0,1)\right)$ *)) satisfaire la condition de compatibilité* $f_0(.,0) = u_1$.. *Supposons que (H1)-(H6) tiennent. Alors* (1.2.1)*admet une solution faible*

$$u\in L^\infty\left([0,+\infty); H^4(\Omega)\cap H_0^2(\Omega)\right), u_t \in L^\infty\left([0,+\infty); H_0^2(\Omega)\right), u_{tt}\in L^2\left([0,+\infty); H_0^1(\Omega)\right)$$

Preuve. Soit $T>0$, espace $V=V_n$,on définit aussi pour $1\leq j\leq n$, la suite $\phi_j(x,n)$ comme suit $\phi_j(x,0)=w_j(x)$,l'espace V_n engendré par l'ensemble $\{w_n, n\in IN\}$ est une base de $H^2(\Omega)\cap H^2(\Gamma_0(\Omega))$, on définit aussi pour $1\leq j\leq n$, la suite $\phi_j(x,n)$ comme suit $\phi_j(x,0) = w_j(x)$. On peut alors étendre $\phi_j(x,0)$ par $\phi_j(x,n)$ sur $L^2(\Omega\times[0,1])$ et noter Vn l'espace engendré par $\{\phi_1,...\phi_n\}$, $(n=1,2,3,...)$. On construit la suite $(u_n(t),\ z_n(t))$ $(n=1,2,3,...)$ bornée dans l'espace séparable (ou réflexif) , alors admet une faible sous-suite convergente *

$u_k(t), z_k(t))$ (Alors le problème (1.2.1) admet une unique solution faible) donc par le théorème de compacité d'Aubin, admet une forte convergente $(u(t), z(t))$.

On construit des solutions approchées $(v_n(t), z_n(t))$ $(n = 1, 2, 3, ...)$ sous la forme

$$\begin{aligned} u^n(t) &= \sum_{j=1}^{n} c^{n,j}(t) w_j, \\ z^n(t) &= \sum_{j=1}^{n} d^{n,j}(t) \phi_j(x, n) \end{aligned}$$

où $(u^n(t), z^n(t))$ est la solution du problème approché suivant correspondant à (1.2.1). En utilisant la formule de Green, on en déduit que $(u^n(t), z^n(t))$ vérifie le système d'EDO suivant :

$$\begin{aligned} & \langle |u_t^n|^m u_{tt}^n, w_j \rangle_\Omega + \langle \Delta u, \Delta w_j \rangle_\Omega - \langle \Delta u_{tt}^n(x,t), \Delta w_j \rangle_\Omega - \sigma(t) \int_0^t g(t-s) \langle \Delta u^n(s), \Delta w_j \rangle_\Omega \, ds \\ & + \mu_1 \langle h_1(u_t^n(x,t)), w_j \rangle_\Omega + \mu_2 \langle h_2(u_t^n(x, t-\tau(t))), w_j \rangle_\Omega \\ = & \left\langle |u^n(t)|^{p-1} u^n(t), w_j \right\rangle_\Omega \end{aligned} \tag{2.0.30}$$

pour $j = 1, ..., n$. Plus précisement

$$u^n(0) = \sum_{j=1}^{n} c^{n,j}(0) w_j, z^n(0) = \sum_{j=1}^{n} z^{n,j}(0) \phi_j(x, n) \tag{2.0.31}$$

où $\quad u^n(0) = \left\langle u^0, w_j \right\rangle, u_t^n(0) = \left\langle u^1, w_j \right\rangle, j = 1, ..., n.$

évidemment,

$$u^n(0) \to u^0 \text{ dans } H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega), u_t^n(0) \to u^1 \text{ dans } H_0^2(\Omega) \quad \text{as} \quad n \to \infty. \tag{2.0.32}$$

$$\left(\tau(t) z_t^n(x,k,t) + \left(1 - \tau'(t)\right) z_k^n(x,k,t)\right) \varphi_j = 0 \tag{2.0.33}$$

$$z^n(0) \to f_0 \quad \text{dans} \quad H_0^2\left(\Omega; H^2[0,1]\right); \tag{2.0.34}$$

En vertu de la théorie des équations différentielles ordinaires, le système$(2.0.30 - 2.0.34)$ a une unique solution locale qui est étendue à un intervalle maximal $[0, T_n[$ (avec $T_n \leq T$) par le lemme de Zorn puisque les termes non linéaires dans (2.0.30) sont localement continus de Lipschitz. Notons que $u^n(t)$ est de classe C^2.

Dans l'étape suivante, nous obtenons des estimations a priori pour la solution du système$(2.0.30 - 2.0.34)$, afin qu'il puisse être étendu au-delà de $[0, T_n[$ à obtenir une solution définie pour tout $t > 0$, en utilisant un argument de compacité standard pour la procédure de limitation.

Première estimation : **Convergence fiablement**

D'après (2.0.16) on obtient facilement que les suites $u_0^k; u_1^k$ et z_0^k convergent .

Au dèpart, nous etablissions ce que suit :

$$\begin{aligned}
&\left\|u_t^k(t)\right\|_{m+2}^{m+2} + \left\|\nabla^2 u^k(t)\right\|_2^2 + \frac{1}{2}\left(1 - \sigma(t)\int_0^t g(s)\,ds\right)\left\|u_t^k(t)\right\|_2^2 - \left\|u_t^k(t)\right\|_p^p \\
&+\sigma(t)\left(g \circ \nabla^2 u^k\right)(t) + \xi(t)\tau(t)\int_\Omega\int_0^1 H\left(\left(z^k(x,k,t)\right)\right)dk\,dx + \int_0^t\int_\Omega u_t^k(x,t)\,h_1\left(u_t^k(x,t)\right)d\gamma\,dt \\
&+\int_0^t\int_\Omega u_t^k(x,t-\tau(t))\,h_2\left(u_t^k(x,t-\tau(t))\right)d\gamma\,dt \leq C
\end{aligned}$$

Multiplier la première et la deuxième équation de (2.0.13) par u_t^n et intégrer sur Ω , en utilisant l'intégration par partie et la formule de Green,

$$
\begin{aligned}
& \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{m+2}\left\|u_t^k\left(t\right)\right\|_{m+2}^{m+2}+\frac{1}{2}\left\|\Delta u^n\left(t\right)\right\|_2^2+\sigma\left(t\right)\left(g\circ\Delta u^n\right)\left(t\right)\right] \\
& \mu_1\int\limits_{\Omega} u_t^k\left(x,t\right)h_1\left(u_t^k\left(x,t\right)\right)d\gamma+\mu_2\int\limits_{\Omega} u_t^k\left(x,t\right)h_2\left(u_t^k\left(x,t-\tau\left(t\right)\right)\right)d\gamma+\frac{\sigma\left(t\right)}{2}\left(g'\circ\Delta u^n\right)\left(t\right) \\
& -\sigma'\left(t\right)\left(\int\limits_0^t g\left(s\right)ds\right)\left\|\Delta u^n\left(t\right)\right\|_2^2+\frac{\sigma\left(t\right)}{2}g(t)\left\|\Delta u^n\left(t\right)\right\|_2^2+\frac{\sigma'\left(t\right)}{2}\left(g\circ\Delta u^n\right)\left(t\right)+\frac{1}{2}\left\|\Delta u_{tt}^n\left(t\right)\right\|_2^2 \\
= \; & \left\langle\left|u^n\left(t\right)\right|^{p-1}u^n\left(t\right),u_t^n\right\rangle_{\Omega} \qquad (2.0.35)
\end{aligned}
$$

On arrive d'après l'intégrant(2.0.35) sur $(0,t)$,

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{m+2}\left\|u_t^k\left(t\right)\right\|_{m+2}^{m+2}+\frac{1}{2}\left\|\Delta u^n\left(t\right)\right\|_2^2+\sigma\left(t\right)\left(g\circ\Delta u^n\right)\left(t\right)-\int\limits_0^t\left\langle\left|u^n\left(t\right)\right|^{p-1}u^n\left(t\right),u_t^n\right\rangle_{\Omega}dt \\
& +\mu_1\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega} u_t^k\left(x,t\right)h_1\left(u_t^k\left(x,t\right)\right)d\gamma ds+\sigma\left(t\right)\left(g'\circ\nabla u^n\right)\left(t\right)+\mu_2\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega} u_t^k\left(x,t-\tau\left(t\right)\right)h_2\left(u_t^k\left(x,t-\tau\left(t\right)\right)\right)d\gamma \\
& \frac{1}{2}\int\limits_0^t\left\|\Delta u_{ss}^n\left(s\right)\right\|_2^2ds-\int\limits_0^t\sigma'\left(s\right)\left(\int\limits_0^r g\left(s\right)ds\right)\left\|\Delta u^n\left(s\right)\right\|_2^2ds-\int\limits_0^t\frac{\sigma\left(s\right)}{2}g(s)\left\|\Delta u^n\left(s\right)\right\|_2^2ds \\
& +\int\limits_0^t\frac{\sigma'\left(t\right)}{2}\left(g\circ\Delta u^n\right)\left(t\right)dt \\
= \; & \frac{1}{m+2}\left\|u_t^k\left(0\right)\right\|_{m+2}^{m+2}+\frac{1}{2}\left\|\Delta u^n\left(0\right)\right\|
\end{aligned}
$$

En utilisant l'inégalité de Young, $\forall\ \varepsilon>0$

$$
\left|\int\limits_0^t\left\langle|u^n(t)|^{p-1}u^n(t),u^n(s)\right\rangle_{\Omega}ds\right|\leq\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t\left\||u^n(t)|^{p-1}u^n(t)\right\|_2^2ds+\varepsilon\int\limits_0^t\left\|u_s^n\left(t\right)\right\|_2^2ds \qquad (2.0.36)
$$

et on a

$$E^k(t) = \frac{1}{m+2}\left\|u_t^k(t)\right\|_{m+2}^{m+2} + \frac{1}{2}\left\|\Delta u^k(t)\right\|_2^2 + \frac{1}{2}\left(1-\sigma(t)\int_0^t g(s)\,ds\right)\left\|u_t^k(t)\right\|_2^2 - \frac{1}{p}\left\|u_t^k(t)\right\|_p^p$$
$$+\sigma(t)\left(g\circ\Delta u^k\right)(t) + \xi(t)\tau(t)\int_\Omega\int_0^1 H\left(\left(z^k(x,k,t)\right)\right)dkdx \qquad (2.0.37)$$

et

$$E^k(0) \geq \frac{1}{m+2}\left\|u_t^k(0)\right\|_{m+2}^{m+2} + \frac{1}{2}\left\|\Delta u^k(0)\right\|_2^2 + \frac{1}{2}\left\|u_t^k(0)\right\|_2^2 - \frac{1}{p}\left\|u_t^k(0)\right\|_p^p$$

On peut trouver :

$$\begin{aligned} E^k(t) - E^k(0) &\leq -C_3\int_0^t\int_\Omega u_t^k(x,t)\,h_1\left(u_t^k(x,t)\right)d\gamma dt - C_4\int_0^t\int_\Omega u_t^k(x,t-\tau(t))\,h_2\left(u_t^k(x,t-\tau(t))\right)d\gamma dt \\ &\quad -\int_0^t \sigma'(t)\left(\int_0^t g(s)\,ds\right)\left\|\Delta u^k(t)\right\|_2^2 dt + \int_0^t \frac{\sigma'(s)}{2}(g\circ\Delta u)(s)\,ds - \\ &\leq -C_3\int_0^t\int_\Omega u_t^k(x,t)\,h_1\left(u_t^k(x,t)\right)d\gamma dt - C_4\int_0^t\int_\Omega u_t^k(x,t-\tau(t))\,h_2\left(u_t^k(x,t-\tau(t))\right) \\ &\quad -\frac{\sigma'(t)}{2}\int_0^t g(s)\left\|\Delta u^k(s)\right\|_2^2 ds + \int_0^t \sigma(t)\left(g'\circ\Delta u^k\right)(t)\,dt \qquad (2.0.38) \end{aligned}$$

Après avoir dérivé(2.0.37), inséré(2.0.36) dans (2.0.38) et pris ε suffisamment petit, on obtient

$$\begin{aligned} & E^k(t) + C_3\int_0^t\int_\Omega u_t^k(x,t)\,h_1\left(u_t^k(x,t)\right)d\gamma dt + C_4\int_0^t\int_\Omega u_t^k(x,t-\tau(t))\,h_2\left(u_t^k(x,t-\tau(t))\right)d\gamma dt \\ \leq\ & E^k(0) \leq C_5 \end{aligned}$$

C_5 est une constante positive ne dépendant que de $\|u_0(t)\|_{H_0^2}$,$\|u_1(t)\|_{H_0^1}$,

donc :

$$
\begin{aligned}
&\left\|u_t^k(t)\right\|_{m+2}^{m+2}+\left\|\nabla^2 u^k(t)\right\|_2^2+\frac{1}{2}\left(1-\sigma(t)\int_0^t g(s)\,ds\right)\left\|u_t^k(t)\right\|_2^2-\left\|u_t^k(t)\right\|_p^p \\
&+\sigma(t)\left(g\circ\nabla^2 u^k\right)(t)+\xi(t)\tau(t)\int_\Omega\int_0^1 H\left(\left(z^k(x,k,t)\right)\right)dkdx \\
&+C_3\int_0^t\int_\Omega u_t^k(x,t)\,h_1\left(u_t^k(x,t)\right)d\gamma dt+C_4\int_0^t\int_\Omega u_t^k(x,t-\tau(t))\,h_2\left(u_t^k(x,t-\tau(t))\right)d\gamma dt \\
\leq\ & C_5 \qquad (2.0.39)
\end{aligned}
$$

C_5 est une constante positive ne dépendant que de $\|u_0(t)\|_{H_0^2}$,$\|u_1(t)\|_{H_0^1}$,
Ces estimations impliquent que la solution $\left(u^k, z^k\right)$ existe globalement dans $[0;+\infty)$.
Estimer(2.0.39) donne que

$$
\begin{aligned}
&u^k \text{ is bounded in } L_{loc}^{\infty}\left((0,+\infty);H_0^2\right) \\
&u_t^k \text{ is bounded in } L_{loc}^{\infty}\left((0,+\infty);H_0^1\right) \\
&H\left(\left(z^k(x,k,t)\right)\right) \text{ is bounded in } L_{loc}^{\infty}\left((0,+\infty);L^1(\Omega\times(0,1))\right) \\
&u_t^k(x,t)\,h_1\left(u_t^k(x,t)\right) \text{ is bounded in } L^1(\Omega\times(0,T)) \\
&u_t^k(x,t-\tau(t))\,h_2\left(u_t^k(x,t-\tau(t))\right) \text{ is bounded in } L^1(\Omega\times(0,T)) \\
&|u^n(t)|^{p-1}u^n(t) \text{ is bounded in } |u(t)|^{p-1}u(t).
\end{aligned}
$$

Et d'aprés le lemme souivant :

Lemme 2.0.6 *(voir [6]) Pour tout $T>0$,*

$$h_1(u_t);h_2(z(x;1;t))\in\ L^1(\Omega\times(0,T))$$

et,

$$\|h_1(u_t)\|_{L^1(\Omega\times(0,T))}\leq K,\|h_2(z(x;1;t))\|_{L^1(\Omega\times(0,T))}\leq K,$$

où K est une constante indépendante de t.

$h_1(u_t^n) \rightarrow h_1(u_t)$ dans $L^1(\Omega \times (0,T))$, $h_2(z^n(x;1;t)) \rightarrow h_2(z(x;1;t))$ dans $L^1(\Omega \times (0,T))$

De même, nous avons

$$\begin{aligned} h_1(u_t^n) &\rightarrow h_1(u_t) \quad \text{dans} \quad L^1(\Omega \times (0,T)), && (2.0.40)\\ h_2(z^n(x;1;t)) &\rightarrow h_2(z(x;1;t)) \quad \text{dans} \quad L^1(\Omega \times (0,T)) && (2.0.41)\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} h_1(u_t^n) &\rightarrow h_1(u_t) \quad \text{faiblement dans} \quad L^2(\Omega \times (0,T)),\\ h_2(z^n(x;1;t)) &\rightarrow h_2(z(x;1;t)) \quad \text{faiblement dans} \quad L^2(\Omega \times (0,T))\end{aligned}$$

Second estimate: **Convergence faiblement étoile**

Comme ([8], [6], [5]). Remplacer w_j par $-\Delta_x w_j$ dans(2.0.30), multiplier le résultat par $c^{n,j}(t)$, additionner sur j de 1 à n, implique

$$\begin{aligned} &\int_\Omega |u^n(t)|^{p-1} u^n(t)\, \Delta_x u_t^n dx - \int_\Omega |u_t^n|^m u_{tt}^n \Delta_x u_t^n dx \\ = &\int_\Omega \nabla u^n \Delta_x u_t^n dx + \int_\Omega \nabla u_t^n(x,t)\, \Delta_x u_t^n dx + \int_\Omega \sigma(t) \int_0^t g(t-s)\, \nabla u^n(s)\, ds \Delta_x u_t^n dx \\ &+\mu_1 \int_\Omega h_1(u_t^n(x,t))\, \Delta_x u_t^n dx + \mu_2 \int_\Omega h_2(u_t^n(x,t-\tau(t)))\, \Delta_x u_t^n dx \qquad (2.0.42)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\|\Delta\nabla u^n(t)\|_2^2+\|\Delta_x u_t^n(t)\|_2^2-\frac{1}{p}\|u_t(t)\|_p^p\right]-\int_\Omega |u_t^n|^m u_{tt}^n \Delta_x u_t^n dx\\
&-\sigma(t)\int_0^t g(t-s)\int_\Omega \Delta\nabla u^n(s)\Delta\nabla u_t^n(s)\,dxds-\mu_1\int_\Omega |\nabla_x u_t^n|^2 h_1'(u_t^n(x,t))\nabla_x u_t^n dx\\
&-\mu_2\left(1-\tau'(t)\right)\int_\Omega \nabla_x u_t^n u_t^n(x,t-\tau(t))\,h_2'(u_t^n(x,t-\tau(t)))\,dx\\
=\;& 0 \qquad (2.0.43)
\end{aligned}$$

mène à

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\tau(t)\|\nabla z^n(t)\|_2^2\right)+\frac{1}{2}\frac{d}{d\rho}\|\nabla z^n(t)\|_2^2=0 \qquad (2.0.44)$$

En combinant (2.0.42) et (2.0.43) ensemble,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\|\Delta_x u_t(t)\|_{2,\Omega}^2+\|\Delta\nabla u(t)\|_2^2-\sigma(t)\int_0^t g(t-s)\,ds\int_\Omega \Delta\nabla u^n(s)\Delta\nabla u_t^n(s)\,dxds\right]\\
+\;&\int_\Omega |u^n(t)|^{p-1}u^n(t)\Delta_x u_t^n dx-\int_\Omega |u_t^n|^m u_{tt}^n\Delta_x u_t^n dx\\
&+\mu_1\int_\Omega |\nabla_x u_t^n|^2 h_1'(u_t^n(x,t))\nabla_x u_t^n dx+\mu_2\left(1-\tau'(t)\right)\int_\Omega \nabla_x u_t^n u_t^n(x,t-\tau(t))\,h_2'(u_t^n(x,t-\tau(t)))\,dx\\
=\;&0 \qquad (2.0.45)
\end{aligned}$$

En utilisant la formule de Green, on a

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega |u_t^n|^m|\nabla_x u_t^n|^2 dx=(m+1)\int_\Omega |u_t^n|^m u_{tt}^n\nabla_x u_t^n dx-\int_\Omega |u_t^n|^m u_{tt}^n\Delta_x u_t^n dx$$

En différenciant(2.0.33) par rapport à t, on obtient

$$\xi(t)\tau(t)\int_\Omega\int_0^1 z_t z(\gamma,k,t)\,dkd\gamma+\frac{\xi(t)}{2}\int_\Omega\int_0^1\left(1-\tau'(t)k\right)\left(\frac{\partial}{\partial k}\left(z^2(\gamma,k,s)\right)ds\right)dkd\gamma=0$$

et

$$\left\langle \tau(t) z_{tt}^{n}(x,k,t) + \tau'(t) z_{t}^{n}(x,k,t) + \frac{\partial}{\partial k} z_{t}^{n}(x,k,t), \varphi_j \right\rangle_{\Omega} = 0 \tag{2.0.46}$$

en multipliant(2.0.46) par $d_t^{n,j}(x,k,t)$, en sommant sur j de 1 à n, il s'ensuit que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\tau(t)\left\|z_t^n(t)\right\|_2^2\right] + \frac{\tau'(t)}{2}\left\|z_t^n(t)\right\|_2^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dk}\left\|z_t^n(t)\right\|_2^2 = 0$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\tau(t)\int_0^1 \left\|z_t^n(t)\right\|_2^2 dk\right] + \frac{\tau'(t)}{2}\int_0^1 \left\|z_t^n(t)\right\|_2^2 dk + \frac{1}{2}\left\|z_t^n(\gamma,1,t)\right\|_2^2 - \frac{1}{2}\left\|u_{tt}^n(t)\right\|_2^2 = 0 \tag{2.0.47}$$

On intègre sur $(0;1)$ pour trouver que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\tau(t)\int_0^1 \left\|\nabla z^n(t)\right\|_2^2 d\rho\right) = \frac{1}{2}\left(\left\|\nabla_x u_t^n((\gamma,0,t))\right\|_2^2 - \left\|\nabla_x z^n((\gamma,1,t))\right\|_2^2\right) \tag{2.0.48}$$

nous devons calculer $\frac{d}{dt}\sigma(t)\int_0^t g(t-s)\nabla u^n(s)\,ds$, qui peut être dérivé comme

$$\frac{d}{dt}\sigma(t)\int_0^t g(t-s)\nabla u^n(s)\,ds = \sigma'(t)\int_0^t g(t-s)\nabla u^n(s)\,ds + \sigma(t)\frac{d}{dt}\left(\int_0^t g(t-s)\nabla u^n(s)\,ds\right) \tag{2.0.49}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\begin{array}{c} \left\|\Delta_x u_t^n(t)\right\|_2^2 + \left(1-\sigma(t)\int_0^t g(s)\,ds\right)\left\|\nabla^2 u(t)\right\|_2^2 + \sigma(t)\left(g\circ\nabla^2 u\right)(t) - \frac{1}{p}\left\|u_t(t)\right\|_p^p \\ +\tau(t)\int_0^1 \left\|\nabla z^n(t)\right\|_2^2 d\rho + 2\int_\Omega \left|u_t^n\right|^m \left|\nabla_x u_t^n\right|^2 dx \end{array}\right] \\
&-\sigma(t)\int_0^t g(t-s)\,ds\int_\Omega \Delta\nabla u^n(s)\,\Delta\nabla u_t^n(s)\,dxds + \frac{1}{2}\left\|\nabla_x z^n((\gamma,1,t))\right\|_2^2 \\
= \quad &(m+1)\int_\Omega \left|u_t^n\right|^m u_{tt}^n \Delta_x u_t^n dx - \mu_1\int_\Omega \left|\nabla_x u_t^n\right|^2 h_1'(u_t^n(x,t))\nabla_x u_t^n dx - \left\|\Delta u_t^n(t)\right\|_2^2 \frac{1}{2}\left\|\Delta\nabla u(t)\right\|_2^2 \\
&-\mu_2\left(1-\tau'(t)\right)\int_\Omega \nabla_x u_t^n u_t^n(x,t-\tau(t))\,h_2'(u_t^n(x,t-\tau(t)))\,dx + \frac{\sigma(t)}{2}\left(g'\circ\Delta u^n\right)(t) \\
&-\frac{\sigma'(t)}{2}\int_0^t g(s)\,ds\left\|\Delta u^n(t)\right\|_2^2
\end{aligned} \tag{2.0.50}$$

En appliquant les inégalités de Young, pour obtenir

$$\left|\left\langle \frac{d}{dt}\left|u^{n}(t)\right|^{p-1}u^{n}(t), u_{t}^{n}\right\rangle_{\Omega}\right| \leq \frac{1}{4\lambda}\left\|\frac{d}{dt}\left|u^{n}(t)\right|^{p-1}u^{n}(t)\right\|_{2}^{2}+\lambda\left\|u_{t}^{n}(t)\right\|_{2}^{2} \tag{2.0.51}$$

Soient $\left|u^{n}(t)\right|^{p-1}u^{n}(t)$ et $\phi\left(z^{n}(t)\right)=h_{2}\left(z^{n}(t)\right)$, les derniers termes de(2.0.50) peuvent être estimés comme suit

$$\int_{0}^{t}\left\langle \left|u^{n}(t)\right|^{p-1}u^{n}(t), \Delta u_{s}^{n}\right\rangle_{\Omega} ds \leq \frac{1}{4\beta}\int_{0}^{t}\left\|\nabla\left|u^{n}(t)\right|^{p-1}u^{n}(t)\right\|_{2}^{2} ds+\beta\int_{0}^{t}\left\|\Delta\nabla u_{s}^{n}(s)\right\|_{2}^{2} ds$$

en utilisant l'inégalité de Young,

$$\int_{0}^{t}\int_{\Omega}|u(s)|^{p-1}u(s)u_{t}(s)\,dxds \leq \int_{0}^{t}||u(s)||_{\frac{2M}{M-2}}^{p}\left\|u_{t}(s)\right\|_{\frac{2M}{3M-Mp+2(p-1)}} ds$$

et on a

$$\int_{0}^{t}\left\langle h_{2}\left(z^{n}(t)\right), \Delta u_{s}^{n}\right\rangle_{\Omega} ds \leq \frac{1}{4\epsilon}\int_{0}^{t}\left\|\nabla h_{2}\left(z^{n}(t)\right)\right\|_{2}^{2} ds+\epsilon\int_{0}^{t}\left\|\Delta\nabla u_{s}^{n}(s)\right\|_{2}^{2} ds \tag{2.0.52}$$

$$\begin{aligned}
&\mu_{2}\left(1-\tau'(t)\right)\int_{\Omega}\nabla_{x}u_{t}^{n}\nabla_{x}u_{t}^{n}(x,t-\tau(t))\,h_{2}'\left(u_{t}^{n}(x,t-\tau(t))\right)\\
\leq\ & \eta\left\|\nabla_{x}u_{t}^{n}(x,t-\tau(t))\right\|_{2}^{2}+\frac{\left(\mu_{2}C_{6}(1-d)\right)^{2}}{4\eta}\left\|\nabla_{x}u_{t}^{n}(t)\right\|_{2}^{2}\\
\leq\ & \eta\left\|\nabla_{x}u_{t}^{n}(x,t-\tau(t))\right\|_{2}^{2}+\frac{\left(\mu_{2}C_{6}(1-d)\right)^{2}C_{7}}{4\eta}, \forall\eta>0
\end{aligned} \tag{2.0.53}$$

Aussi (voir [12]), nous avons

$$\begin{aligned}
(m+1)\int_{\Omega}\left|u_{t}^{n}\right|^{m}\nabla u_{tt}^{n}(t), \nabla_{x}u_{t}^{n}(t)\,dx &\leq (m+1)\,C_{2}^{\frac{m}{m+2}+\frac{1}{2}}\left\|\nabla u_{tt}^{n}\right\|_{2}\\
&\leq \eta\left\|\nabla u_{tt}^{n}\right\|_{2}^{2}+\frac{(m+1)^{2}C_{7}^{2\frac{2m}{m+2}+1}}{4\eta}, \forall\eta>0
\end{aligned} \tag{2.0.54}$$

En tenant compte de $(2.0.54, 2.0.53)$ dans$(2.0.50)$ on a,

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\begin{array}{c} \left\|\Delta_x u_t^n\left(t\right)\right\|_2^2+\left(1-\sigma\left(t\right)\int\limits_0^t g\left(s\right)ds\right)\left\|\Delta u\left(t\right)\right\|_2^2+\sigma\left(t\right)\left(g\circ\Delta u\right)\left(t\right)-\frac{1}{p}\left\|u_t\left(t\right)\right\|_p^p \\ +\tau\left(t\right)\int\limits_0^1\left\|\nabla z^n\left(t\right)\right\|_2^2 d\rho+2\int_\Omega\left|u_t^n\right|^m\left|\nabla_x u_t^n\right|^2 dx \end{array}\right] \\
&-\sigma\left(t\right)\int\limits_0^t g\left(t-s\right)ds\int_\Omega\Delta\nabla u^n\left(s\right)\Delta\nabla u_t^n\left(s\right)dxds+\left(\frac{1}{2}-\eta\right)\left\|\nabla_x z^n\left(\left(\gamma,1,t\right)\right)\right\|_2^2 \\
&+\mu_1\int_\Omega\left|\nabla_x u_t^n\right|^2 h_1'\left(u_t^n\left(x,t\right)\right)\nabla_x u_t^n dx \\
\leq\;& \eta\left\|\nabla u_{tt}^n\right\|_2^2+\frac{\sigma\left(t\right)}{2}\left(g'\circ\Delta u^n\right)\left(t\right)-\frac{\sigma'\left(t\right)}{2}\int\limits_0^t g\left(s\right)ds\left\|\Delta u^n\left(t\right)\right\|_2^2+C\left(\eta\right) \qquad (2.0.55)
\end{aligned}
$$

Multiplier le résultat 2.0.30 par $c_{tt}^{n,j}$, en sommant sur j de 1 à n, implique

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega\left|u_t^n\right|^m u_{tt}^n u_{tt}^n dx+\left\|\nabla u_{tt}\left(t\right)\right\|_2^2 \\
=\;& -\int_\Omega\nabla^2 u^2 u_{tt}^n dx+\int_\Omega\nabla u_t^n\left(x,t\right)u_{tt}^n dx+\sigma\left(t\right)\int\limits_0^t g\left(t-s\right)\int_\Omega\Delta u^n\left(s\right)\Delta u_{tt}^n dxds \\
&-\mu_1\int_\Omega h_1\left(u_t^n\left(x,t\right)\right)u_{tt}^n dx-\mu_2\int_\Omega h_2\left(u_t^n\left(x,t-\tau(t)\right)\right)u_{tt}^n dx+\int_\Omega\left|u^n\left(t\right)\right|^{p-1}u^n\left(t\right)u_{tt}^n dx \qquad (2.0.56)
\end{aligned}
$$

en multipliant 2.0.46 par $d_t^{n,j}\left(x,k,t\right)$, en sommant sur j de 1 à n, il s'ensuit que

$$
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\tau\left(t\right)\left\|z_t^n\left(t\right)\right\|_2^2\right]+\frac{\tau'\left(t\right)}{2}\left\|z_t^n\left(t\right)\right\|_2^2+\frac{1}{2}\frac{d}{dk}\left\|z_t^n\left(t\right)\right\|_2^2=0
$$

et

$$
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\tau\left(t\right)\int\limits_0^1\left\|z_t^n\left(t\right)\right\|_2^2 dk\right]+\frac{\tau'\left(t\right)}{2}\int\limits_0^1\left\|z_t^n\left(t\right)\right\|_2^2 dk+\frac{1}{2}\left\|z_t^n\left(\gamma,1,t\right)\right\|_2^2-\frac{1}{2}\left\|u_{tt}^n\left(t\right)\right\|_2^2=0 \qquad (2.0.57)
$$

On intègre sur $(0;1)$ à et que

$$\frac{1}{2}\left(\tau(t)\int\limits_0^1 \|z^n(t)\|_2^2\,d\rho\right)+\frac{1}{2}\|z^n((\gamma,1,t))\|_2^2=\frac{1}{2}\|\nabla_x u_t^n((\gamma,0,t))\|_2^2 \tag{2.0.58}$$

Somme 2.0.56 et 2.0.58, on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega |u_t^n|^m u_{tt}^n u_{tt}^n dx+\|\nabla u_{tt}(t)\|_2^2+\frac{1}{2}\left(\tau(t)\int\limits_0^1 \|z^n(t)\|_2^2\,d\rho\right)+\frac{1}{2}\|z^n((\gamma,1,t))\|_2^2\\
=\;& -\int_\Omega \Delta u^n u_{tt}^n dx+\int_\Omega \nabla u_t^n(x,t)\,u_{tt}^n dx+\sigma(t)\int\limits_0^t g(t-s)\int_\Omega \Delta u^n(s)\,\Delta u_{tt}^n dx ds\\
&-\mu_1\int_\Omega h_1(u_t^n(x,t))\,u_{tt}^n dx-\mu_2\int_\Omega h_2(u_t^n(x,t-\tau(t)))\,u_{tt}^n dx+\int_\Omega |u^n(t)|^{p-1}u^n(t)\,u_{tt}^n dx
\end{aligned} \tag{2.0.59}$$

En utilisant l'inégalité de Young , on a

$$\int_\Omega \Delta^2 u^n u_{tt}^n dx\le \eta\|\nabla u_{tt}^n\|_2^2+\frac{1}{4\eta}\|\nabla\Delta u^n\|_2^2$$

le membre de droite de 2.0.59 peut être estimé comme suit :

et

$$\begin{aligned}
\left|\sigma(t)\int\limits_0^t g(t-s)\langle\nabla u^n(t),\nabla u_{tt}^n(t)\rangle_\Omega ds\right| &\le c'\|\nabla u_{tt}^n(t)\|_2^2+\frac{\sigma(t)}{4\eta}\int\limits_0^t g(t-s)\langle\nabla u^n(t),\nabla u_{tt}^n(t)\rangle_\Omega ds\\
&\le \frac{c'}{4\epsilon}\|\nabla u_t^n(t)\|_2^2+c'\epsilon\left\|g''\right\|_{L^1}\int\limits_0^t g''(t-s)\|\nabla u^n(s)\|_2^2 ds
\end{aligned} \tag{2.0.60}$$

et

$$\begin{aligned}
\left|\sigma'(t)\int_0^t g(t-s)\left\langle \Delta u^n(t), \nabla u_t^n(t)\right\rangle_\Omega ds\right| &\leq |\sigma(t)| \left\|\nabla u_{tt}^n(t)\right\|_2 \int_0^t g''(t-s)\left\|\nabla u^n(s)\right\|_2^2 ds \\
&\leq \frac{c'}{4\epsilon}\left\|\nabla u_{tt}^n(t)\right\|_2^2 + c'\epsilon \left\|g''\right\|_{L^1}\int_0^t g''(t-s)\left\|\nabla u^n(s)\right\|_2^2 ds \qquad (2.0.61)
\end{aligned}$$

Par l'inégalité de Young, on obtient

$$\begin{aligned}
\mu_1 \int_\Omega u_{tt}^n h_1\left(u_t^n(x,t)\right)dx &\leq \eta\int_\Omega \left|u_{tt}^n\right|^2 dx + \frac{\mu_1^2}{4\eta}\int_\Omega \left|h_1\left(u_t^n(x,t)\right)\right|^2 dx \\
&\leq \eta C_s^2 \left|\left|u_{tt}^n\right|\right|_2^2 + \frac{\mu_1^2}{4\eta}\int_\Omega \left|h_1\left(u_t^n(x,t)\right)\right|^2 dx
\end{aligned}$$

$$\mu_2 \int_\Omega u_{tt}^n h_2\left(z_t^n(x,1,t)\right)dx \leq \eta C_s^2 \left|\left|u_{tt}^n\right|\right|_2^2 + \frac{\mu_2^2}{4\eta}\int_\Omega \left|h_2\left(z_t^n(x,1,t)\right)\right|^2 dx$$

Ainsi, à partir de 2.0.55 et 2.0.61, on obtient

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\begin{array}{c} \left\|\Delta_x u_t^n(t)\right\|_2^2 + \left(1-\sigma(t)\int_0^t g(s)\,ds\right)\left\|\nabla^2 u(t)\right\|_2^2 + \sigma(t)\left(g\circ\nabla^2 u\right)(t) - \frac{1}{p}\left\|u_t(t)\right\|_p^p \\ +\tau(t)\int_0^1 \left\|\nabla z^n(t)\right\|_2^2 d\rho + 2\int_\Omega \left|u_t^n\right|^m \left|\nabla_x u_t^n\right|^2 dx \end{array}\right] \\
&-\sigma(t)\int_0^t g(t-s)\,ds\int_\Omega \Delta\nabla u^n(s)\,\Delta\nabla u_t^n(s)\,dxds + \left(\frac{1}{2}-\eta\right)\left\|\nabla_x z^n\left((\gamma,1,t)\right)\right\|_2^2 \\
&+\mu_1\int_\Omega \left|\nabla_x u_t^n\right|^2 h_1'\left(u_t^n(x,t)\right)\nabla_x u_t^n dx \\
\leq\ & \beta^2\frac{(1+\eta)}{4\eta}\left\|\nabla\Delta u^n\right\|_2^2 + \frac{\sigma(t)}{2}\left(g'\circ\nabla\Delta u^n\right)(t) - \frac{\sigma'(t)}{2}\int_0^t g(s)\,ds\left\|\Delta u^n(t)\right\|_2^2 + C_2(\eta) \\
&+\frac{\mu_1^2}{4\eta}\int_\Omega \left|h_1\left(u_t^n(x,t)\right)\right|^2 dx + \frac{\mu_2^2}{4\eta}\int_\Omega \left|h_2\left(z_t^n(x,1,t)\right)\right|^2 dx \qquad (2.0.62)
\end{aligned}$$

En choisissant suffisamment petit tel que 1 0, en intégrant sur $(0;t)$ et en utilisant (2.0.2), on obtient

$$
\begin{aligned}
&\|\Delta_x u_t^n(t)\|_2^2 + \left(1-\sigma(t)\int_0^t g(s)\,ds\right)\|\Delta u(t)\|_2^2 + \sigma(t)(g\circ\Delta u)(t) - \frac{1}{p}\|u_t(t)\|_p^p \\
&+\tau(t)\int_0^1 \|\nabla z^n(t)\|_2^2\,d\rho + 2\int_\Omega |u_t^n|^m |\nabla_x u_t^n|^2\,dx - \sigma(t)\int_0^t g(t-s)\,ds\int_\Omega \Delta\nabla u^n(s)\,\Delta\nabla u_t^n(s)\,dxds \\
&+\left(\frac{1}{2}-\eta\right)\int_0^t \|\nabla_x z^n((\gamma,1,t))\|_2^2 + \mu_1\int_0^t\int_\Omega |\nabla_x u_t^n|^2 h_1'(u_t^n(x,t))\,\nabla_x u_t^n dx \\
\leq\;& \beta^2\frac{(1+\eta)}{4\eta}\int_0^t \|\nabla\Delta u^n\|_2^2 + \frac{\sigma(t)}{2}\left(g'\circ\nabla\Delta u^n\right)(t) - \frac{\sigma'(t)}{2}\int_0^t g(s)\,ds\,\|\Delta u^n(t)\|_2^2 + C_2(\eta) \\
&+\frac{\mu_1^2}{4\eta}\int_0^t\int_\Omega |h_1(u_t^n(x,t))|^2\,dx + \frac{\mu_2^2}{4\eta}\int_0^t\int_\Omega |h_2(z_t^n(x,1,t))|^2\,dx
\end{aligned}
\tag{2.0.63}
$$

et

$$
\int_\Omega |h_1(u_t^n(x,t))|^2\,dx \leq C_8 H^{-1}(1) + c\left(-E'\right) \tag{2.0.64}
$$

car

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega |h_1(u_t^n(x,t))|^2\,dx \;&\leq\; \int_{u_t^n\geq\varepsilon} |h_1(u_t^n(x,t))|^2\,dx + \int_{u_t^n<\varepsilon} |h_1(u_t^n(x,t))|^2\,dx \\
&\leq\; \int_{u_t^n\geq\varepsilon} u_t^n h_1(u_t^n(x,t))\,dx + \int_\Omega H^{-1}(u_t^n h_1(u_t^n(x,t)))\,dx \\
&\leq\; \int_{u_t^n\geq\varepsilon} u_t^n h_1(u_t^n(x,t))\,dx + cH^{-1}\left(\int_\Omega u_t^n h_1(u_t^n(x,t))\,dx\right) \\
&\quad .... \\
&\leq\; \int_{u_t^n\geq\varepsilon} u_t^n h_1(u_t^n(x,t))\,dx + c'H^{-1}(1) + c''\int_\Omega u_t^n h_1(u_t^n(x,t))\,dx \\
&\leq\; C_8 H^{-1}(1) + C_9\int_\Omega u_t^n h_1(u_t^n(x,t))\,dx
\end{aligned}
$$

et

$$
\int_\Omega |h_2(z_t^n(x,1,t))|^2\,dx \leq c'\int_\Omega z_t^n h_2(z_t^n(x,1,t))\,dx \leq c\left(-E'\right) \tag{2.0.65}
$$

En utilisant le lemme de Gronwall, on obtient

$$\begin{aligned}
& \|\Delta_x u_t^n(t)\|_{2,\Omega}^2 + \|\Delta\nabla u^n(t)\|_2^2 + \int_0^t \|\nabla u_{tt}^n(t)\|_{2,\Omega}^2 + \sigma(t)(g\circ\Delta u)(t) \\
& + \int_0^1 \|z^n(x,\rho,t)\|_2^2 \, d\rho + \int_0^1 \|\nabla_x z^n(x,\rho,t)\|_2^2 \, d\rho \\
\leq \; & C_{10} \qquad (2.0.66)
\end{aligned}$$

On observe que l'estimation(2.0.64) et (2.0.66) qu'il existe une sous-suite $\{u^k\}$ de $\{u^n\}$ et une fonction u et passe à la limite lorsque $k\to\infty$,

$$u^k \to u \text{ faibleme étoile nt dans } L^\infty\left((0,T);H^4(\Omega)\cap H_0^2(\Omega)\right) \qquad (2.0.67)$$

$$u_t^k \to u \text{ faiblement étoile dans } L^\infty\left((0,T);H_0^2(\Omega)\right) \qquad (2.0.68)$$

$$u_{tt}^k \to u_{tt} \text{ faiblement étoile dans } L^2\left((0,T);H_0^1(\Omega)\right) \qquad (2.0.69)$$

$$z^k \to z \text{ faiblement étoile dans } L^\infty\left((0,T);H_0^1\left(\Omega\times L^2(0,1)\right)\right) \qquad (2.0.70)$$

$$z_t^k \to z_t \text{ faiblement étoile dans } L^\infty\left((0,T);L^2(\Omega\times(0,1))\right) \qquad (2.0.71)$$

Troiseme estimation : Convergence fortement

De la première estimation(2.0.64) et du lemme 2.1, on déduit

$$\begin{aligned}
\||u_t^n|^m u_{tt}^n\|_{L^2(\Omega\times(0,T),L^2(\Omega))}^2 & \leq \int_0^T \||u_t^n|^m u_{tt}^n\|_{2(m+1)}^{2(m+1)} dt \leq \left(\frac{C_s}{\sqrt{\lambda}}\right)^{2(m+1)} \int_0^T \|\Delta u_t^n\|_2^{2(m+1)} dt \\
& \leq \left(\frac{C_s}{\sqrt{\lambda}}\right)^{2(m+1)} C_3^{2(m+1)} T
\end{aligned}$$

D'autre part, en utilisant lemme d'Aubin-Lions et

$$L^{\infty}\left((0,T);X\right) \hookrightarrow \; L^{2}\left((0,T);X\right)$$

on déduit qu'il existe une sous-suite $\left\{u^{k}\right\}$ de $\{u^{n}\}$ telle que

$$u_t^k \rightarrow u_t \;\text{ fortement dans }\quad L^2\left((0,T);L^2(\Omega)\right) \tag{2.0.72}$$

ce qui implique

$$u_t^k \rightarrow u_t \;\text{ fortement presque partout dans }\quad \Omega \times (0,T) \tag{2.0.73}$$

D'où

$$\left|u_t^k\right|^m u_t^k \rightarrow |u_t|^m u_t \text{ fortement presque partout dans }\quad \Omega \times (0,T) \tag{2.0.74}$$

en utilisant $(2.0.72, 2.0.74)$ et Lions Lemma, nous dérivons

$$\left|u_t^k\right|^m u_t^k \rightarrow |u_t|^m u_t \;\text{ faiblement dans }\; L^2\left((0,T);L^2(\Omega)\right) \tag{2.0.75}$$

et

$$z^k \rightarrow z \;\text{ fortement dans }\quad L^2\left((0,T);L^2(\Omega)\right) \tag{2.0.76}$$

ce qui implique

$$z^k \rightarrow z \;\text{ fortement presque partout dans }\quad \Omega \times (0,T) \tag{2.0.77}$$

Ceci termine la démonstration. ■

Chapitre 3

Comportement asymptotique

Dans ce chapitre, on étudie la stabilité des vibrations de la flexion et élastique d'une plaque mince.

Notre probléme est d étudier le comportement asymptotique de la solution (déterminer sa limite). Si la limite de l'énergie est nulle, donner une estimation de la vitesse de sa décroissance vers zéro. Tout dépend des hypothéses sur le terme d amortissement.

Il y a divers types de stabilité uniforme. Dans notre cas, on s intéresse la stabilité , c'est dire

$$E(t) \leq Ch(t) \quad ; \text{pour tout } t \geq 0,$$

où C; sont des constantes strictement positives dépendant uniquement des données.

On démontre dans cette mémoire que le système (2.0.13) est uniformément stable sous des hypothéses convenables sur les données. Notre résultat principal dans ce paragraphe est l'estimation de la décroissance de l énergie vers zéro quand $t \to +\infty$.

Pour prouver les taux de décroissance de l'énergie au problème correspondant, nous définissons la fonction perturbée suivante :

$$L(t) = M'E(t) + \chi(t) \tag{3.0.1}$$

où

$$\chi(t) = \sigma(t) J(t) = \sigma(t)(\tau_0 \psi(t) + \varepsilon_2 \phi(t) + \varepsilon_3 \varphi(t)) \tag{3.0.2}$$

et

$$\begin{aligned}
\psi(t) &= \xi(t)\int_{\Omega}\int_{0}^{1} e^{-2\rho\tau(t)} H\left(z\left(x,\rho,t\right)\right) d\rho dx \\
\phi(t) &= \frac{1}{m+1}\int_{\Omega}\left|u_t\right|^m u_t u dx + \int_{\Omega}\nabla u.\left(\nabla u_t + \nabla u\right) dx \\
\varphi(t) &= \int_{\Omega}\left(\Delta u_t + \Delta u - \frac{1}{m+1}\left|u_t\right|^m u_t\right)\int_{0}^{t} g\left(t-s\right)\left(u\left(t\right)-u\left(s\right)\right) ds dx \qquad (3.0.3)
\end{aligned}$$

où M, ε_1 and ε_2 are suitable positive constants to be determined later.

Théorème 3.0.7 *Let* $(u^0, u^1, f_0) \in H^0_{\Omega}(\Omega) \times L^2(\Omega) \cap L^4(\Omega) \times L^2(\Omega \times (0,1))$*Supposons que (H1) - (H1), et* (2.0.15) *soient vérifiés. Alors il existe des constantes strictement positives* C_0, θ *et* t_1 *telles que la solution de*(1.2.1) *satisfait*

$$E(t) \leq C_0 H^{-1}\left(w_0 + w_1 t\right) \qquad (3.0.4)$$

Lemme 3.0.7 *Soit* (u, z) *être une solution du problème* (2.0.13) *, alors il existe deux constantes positives* $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ *telles que*

$$\lambda_1 E(t) \leq L(t) \leq \lambda_2 E(t) \qquad (3.0.5)$$

pour M' *suffisamment grand*

Lemme 3.0.8 *Soit* J *la fonctionnelle définie dans*(3.0.3)*, alors* J *vérifie*

$$\left|\chi(t)\right| \leq C_{10} E(t)$$

où C_{10} *sont des constantes positives.*

Preuve.

On a

$$\begin{aligned}
\tau_0 \left|\psi(t)\right| &\leq \left|\xi(t) e^{-2\rho\tau(t)} \int_\Omega \int_0^1 H\left(z\left(x,\rho,t\right)\right) d\rho dx\right| \\
&\leq c\xi(t)\tau_0 \int_\Omega \int_0^1 H\left(z\left(x,\rho,t\right)\right) d\rho dx \\
&\leq c\xi(t)\tau(t) \int_\Omega \int_0^1 H\left(z\left(x,\rho,t\right)\right) d\rho dx
\end{aligned}$$

$$\left|\psi(t)\right| \leq c\xi(t)\tau(t) \int_\Omega \int_0^1 H\left(z\left(x,\rho,t\right)\right) d\rho dx \tag{3.0.6}$$

Grâce aux inégalités de Cauchy–Schwarz, Young et Sobolev–Poincaré utilisant le fait que $\left\|\nabla u\right\|_{2,\Omega} \leq B\left\|\nabla u\right\|_2$, on a

$$\begin{aligned}
\left|\phi(t)\right| &\leq \frac{1}{m+1}\left\|u_t\right\|_{m+2}^{m+2} + \frac{(m+1)^{-1}}{m+2}\left\|u\right\|_{m+2}^{m+2} + \frac{1}{2}\left\|\nabla u\right\|_2^2 \\
&\leq \frac{1}{m+1}\left\|u_t\right\|_{m+2}^{m+2} + \frac{(m+1)^{-1}}{m+2}\left(\frac{C_s}{\sqrt{\lambda_1}}\right)^{m+2}\left\|\nabla u\right\|_2^{m+2} + \frac{1}{2}\left\|\Delta u\right\|_2^2 \\
&\leq \frac{1}{m+1}\left\|u_t\right\|_{m+2}^{m+2} + \left(\frac{(m+1)^{-1}}{m+2}\left(\frac{C_s}{\sqrt{\lambda_1}}\right)^{m+2}\left(\frac{2E(0)}{1-\beta}\right)^{m/2} + \frac{1}{2}\right)\left\|\nabla u\right\|_2^2 \\
&\leq \frac{m+2}{m+1}\frac{1}{m+2}\left\|u_t\right\|_{m+2}^{m+2} + \frac{1}{2}\left\|\nabla u\right\|_2^2 \\
&\leq \delta_0\left(\frac{1}{m+2}\left\|u_t\right\|_{m+2}^{m+2} + \frac{1}{2}\left\|\nabla u\right\|_2^2\right)
\end{aligned}$$

$$\left|\phi(t)\right| \leq \delta_0\left(\frac{1}{m+2}\left\|u_t\right\|_{m+2}^{m+2} + \frac{1}{2}\left\|\nabla u\right\|_2^2\right) \tag{3.0.7}$$

et

$$\left|\varphi(t)\right| \leq \delta_0'\left(\frac{1}{m+1}\left\|u_t\right\|_{m+2}^{m+2} + \sigma(t)\left(g\circ\Delta u\right)(t) + \frac{1}{2}\left(1-\sigma(t)\int_0^t g(s)\,ds\right)\left\|\nabla u_t\right\|_2^2\right) \tag{3.0.8}$$

en utilisant le fait que $\sigma(t) \leq \sigma(0)$ et inégalités de Cauchy–Schwarz, Young et Sobolev–

Poincaré,

$$
\begin{aligned}
\sigma(t)\left|\varphi(t)\right| &= \sigma(t)\left|\int_\Omega\left(\Delta u_t-\frac{1}{m+1}\left|u_t\right|^m u_t\right)\int_0^t g(t-s)\left(u(t)-u(s)\right)dsdx\right| \\
&= \sigma(t)\left|\int_\Omega\left(\Delta u_t-\frac{1}{m+1}\left|u_t\right|^m u_t\right)\left(u(t)\int_0^t g(t-s)\,ds-\int_0^t g(t-s)\,u(s)\,ds\right)dx\right| \\
&= \sigma(t)\left|\int_\Omega\left(\Delta u_t-\frac{1}{m+1}\left|u_t\right|^m u_t\right)\left(u(t)\int_0^t g(s)\,ds-\int_0^t g(t-s)\,u(s)\,ds\right)dx\right| \\
&\leq \sigma(t)\left(\frac{1}{m+1}\left\|u_t\right\|_{m+2}^{m+2}+\frac{1}{2}\left\|\nabla u_t\right\|_2^2\right)+\sigma(t)\int_\Omega\left(\int_0^t g(t-s)\,u(s)\,ds\right)^2 dx-\sigma(t)\,\delta_1'\int_0^t g(s)\,ds\,\|\nabla \\
&\quad +\sigma(t)\left(\frac{(m+1)^{-1}}{m+2}\beta^{m+1}\left(\frac{C_s}{\sqrt{\lambda_1}}\right)^{m+2}\left(\frac{4E(0)}{1-\beta}\right)^{m/2}+\frac{\beta}{2\lambda_1}\right)\left\|\nabla u\right\|_2^2 \\
&\leq \sigma(0)\,\delta_2'\left(\frac{1}{m+2}\left\|u_t\right\|_{m+2}^{m+2}+\frac{3}{2}\left\|\nabla u_t\right\|_2^2\right)+\sigma(t)\int_\Omega\left(\int_0^t g(t-s)\,u(s)\,ds\right)^2 dx-\sigma(t)\,\delta_1'\int_0^t g(s)\,ds \\
&\leq \delta_0'\left(\frac{1}{m+2}\left\|u_t\right\|_{m+2}^{m+2}+\sigma(t)\left(g\circ\Delta u\right)(t)+\frac{1}{2}\left(1-\sigma(t)\int_0^t g(s)\,ds\right)\left\|\nabla u_t\right\|_2^2\right)
\end{aligned}
$$

Cela donne,

$$\begin{aligned}
\left|L(t)-M'E(t)\right| &= |\sigma(t)J(t)| = |\sigma(t)(\tau_0\psi(t)+\varepsilon_2\phi(t)+\varepsilon_3\varphi(t))| \\
&\leq \sigma(0)|\psi(t)|+\varepsilon_2\sigma(t)|\phi(t)|+\varepsilon_3|\varphi(t)| \\
&\leq \sigma(0)\delta_1\xi(t)\tau(t)\int_\Omega\int_0^1 H(z(x,\rho,t))\,d\rho dx \\
&\quad +\varepsilon_2\delta_0'\left(\frac{1}{m+2}\|u_t\|_{m+2}^{m+2}+\sigma(t)(g\circ\Delta u)(t)+\frac{1}{2}\left(1-\sigma(t)\int_0^t g(s)\,ds\right)\|\nabla u_t\|_2^2\right) \\
&\quad +\varepsilon_3\delta_0\left(\frac{1}{m+2}\|u_t\|_{m+2}^{m+2}+\frac{1}{2}\|\nabla u\|_2^2\right) \\
&\leq \sigma(0)\delta_1\xi(t)\tau(t)\int_\Omega\int_0^1 H(z(x,\rho,t))\,d\rho dx \\
&\quad +\left(\varepsilon_3\delta_0\sigma(0)+\delta_0'\varepsilon_2\right)\left(\sigma(t)(g\circ\Delta u)(t)+\frac{1}{2}\left(1-\sigma(t)\int_0^t g(s)\,ds\right)\|\nabla u_t\|_2^2\right) \\
&\quad +2\varepsilon_3\delta_0\sigma(0)\left(\frac{1}{m+2}\|u_t\|_{m+2}^{m+2}+\frac{1}{2}\|\nabla u\|_2^2\right) \\
&\leq C_{10}E(t)
\end{aligned}$$

et à partir de la définition de $E(t)$

$$\begin{aligned}
E(t) &= \frac{1}{m+2}\|u_t(t)\|_{m+2}^{m+2}+\frac{1}{2}\|\nabla u(t)\|_2^2+\frac{1}{2}\left(1-\sigma(t)\int_0^t g(s)\,ds\right)\|\nabla u_t(t)\|_2^2-\frac{1}{p}\|u_t(t)\|_p^p \\
&\quad +\sigma(t)(g\circ\Delta u)(t)+\xi(t)\tau(t)\int_\Omega\int_0^1 H((z(x,k,t)))\,dkdx \qquad (3.0.9)
\end{aligned}$$

donc

$$\left|L(t)-M'E(t)\right| \leq C_{10}E(t)$$

alors

$$\lambda_1E(t)\leq L(t)\leq\lambda_2E(t) \qquad (3.0.10)$$

où $C_{10}=\max\left(\sigma(0)\delta_1,\varepsilon_3\delta_0\sigma(0)+\delta_0'\varepsilon_2,2\varepsilon_3\delta_0\sigma(0)\right)$, $\lambda_1=M'-C_{10}$,$\lambda_2=M'+C_{10}$ et en choisissant M' suffisamment grand, on peut facilement trouver (3.0.5).

Ces termine la preuve. ■

Lemme 3.0.9 *Soit* $L(t)$ *être les fonctions définies dans* (3.0.1)*, alors* $L(t)$ *satisfait*

$$\frac{d}{dt}L\left(t\right) \leq -C_1 E\left(t\right) + C_2 \left\|h_1\left(u_t\right)\right\|_2^2 ; \forall t \geq 0 \tag{3.0.11}$$

Preuve. En prenant la dérivée de (3.0.1), on a

$$\frac{d}{dt}L\left(t\right) = M'\frac{d}{dt}E\left(t\right) + \varepsilon\sigma'\left(t\right)\left(\psi\left(t\right) + \phi\left(t\right) + \varphi\left(t\right)\right) + \varepsilon\sigma\left(t\right)\frac{d}{dt}\left(\psi\left(t\right) + \phi\left(t\right) + \varphi\left(t\right)\right) \tag{3.0.12}$$

Lemme 3.0.10 *Soit* ψ, ϕ, φ *être les fonctions définies dans* (3.0.3)*, satisfait*

$$\frac{d}{dt}\psi\left(t\right) \leq -2\psi\left(t\right) + \frac{\eta\theta_2 C_s^2}{\lambda_1}\left\|\Delta u_t\right\|_2^2 + \frac{\theta_2}{4\eta}\int\limits_{\Omega}\left|h_1\left(u_t\right)\right|^2 d\gamma \tag{3.0.13}$$

$$\frac{d}{dt}\phi\left(t\right) \leq \frac{1}{m+1}\left\|u_t\right\|_{m+2}^{m+2} + \left(\eta_1 + \frac{\mu_1}{8\eta}\right)\left\|\nabla u_t\right\|_2^2 + \eta_2\left(g \circ \Delta u\right)\left(t\right) + \frac{C^{-2}\mu_2}{8\eta}\left\|u_t\right\|_2^2 + \left\|u_t\right\|_p^p \tag{3.0.14}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\varphi\left(t\right) \leq{}& \left\|u_t\right\|_2^2 - \left\|\nabla u\right\|_2^2 + \left\|u_t\right\|_p^p + \sigma\left(t\right)\left(g * \Delta u\right)\left(t\right) \\ & -\mu_1\int\limits_{\Omega} u_t u d\gamma - \mu_2\int\limits_{\Omega} z\left(\gamma, 1, t\right) u d\gamma\end{aligned} \tag{3.0.15}$$

où $\theta_1 = \frac{1-d}{\tau_1}e^{-2\tau_1}, \theta_2 = \frac{1}{\tau_0}, \eta_1 = \left(1 - \beta - \eta - \frac{\eta C_s^2}{\lambda_1}\left(\mu_1 + \mu_2\right)\right), \eta_2 = \frac{\sigma(0)\beta}{4}$ *sont des constantes positives.*

■

et

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\psi\left(t\right) + \phi\left(t\right) + \varphi\left(t\right)\right) \leq{}& -2\psi\left(t\right) - \theta_1\int_{\Omega} z\left(x,1,t\right) h_2\left(z\left(x,1,t\right)\right) dx + \theta_2\int_{\Omega} u\left(x,t\right) h_1\left(u\left(x,t\right)\right) dx \\ & + \frac{1}{m+1}\left\|u_t\right\|_{m+2}^{m+2} + \eta_1\left\|\nabla u_t\right\|_2^2 - \left\|\Delta u\right\|_2^2 + \eta_2\left(g \circ \Delta u\right)\left(t\right) \\ & + \frac{\mu_1}{4\eta}\int_{\Omega}\left|u\left(\gamma,t\right)\right|^2 d\gamma + \frac{\mu_2}{4\eta}\int_{\Omega}\left|z\left(\gamma,1,t\right)\right|^2 d\gamma + \left\|u_t\right\|_p^p \\ & + \left\|u_t\right\|_2^2 - \left\|\nabla u\right\|_2^2 + \left\|u_t\right\|_p^p + \sigma\left(t\right)\left(g * \Delta u\right)\left(t\right) \\ & -\mu_1\int\limits_{\Omega} u_t u d\gamma - \mu_2\int\limits_{\Omega} z\left(\gamma,1,t\right) u d\gamma\end{aligned}$$

Preuve. Soit l'inégalité de Young produit

$$\int_{\Omega} uh_1(u_t)\,d\gamma \leq \frac{\eta C_s^2}{\lambda_1}\|\Delta u_t\|_2^2 + \frac{1}{4\eta}\int_{\Omega}|h_1(u_t)|^2\,d\gamma \tag{3.0.16}$$

et

$$\int_{\Omega} zh_2(z_t)\,d\gamma \leq \frac{\eta C_s^2}{\lambda_1}\|\Delta u_t\|_2^2 + \frac{1}{4\eta}\int_{\Omega}|h_2(z_t)|^2\,d\gamma \tag{3.0.17}$$

et

$$\left|\int_{\Omega} u_t u d\gamma\right| \leq \frac{C^{-2}}{2}\|u_t\|_2^2 \tag{3.0.18}$$

et

$$\left|\int_{\Omega} z(\gamma,1,t)\,ud\gamma\right| \leq \frac{C^{-2}}{2}\|u_t\|_2^2 \tag{3.0.19}$$

où C est une constante positive, exploitant et l'inégalité de trace implique que, $\forall\epsilon > 0$ et $c > 0$

$$\|u\|_2^2 \leq c\epsilon\|\nabla u\|_2^2 \leq c\|\nabla u\|_2^2 \tag{3.0.20}$$

Preuve. 1) Utiliser les problèmes(2.0.10) et (2.0.13) ,

$$z_t(x,k,t) = -\frac{(1-\tau'(t))}{\tau(t)}z_k(x,k,t)\,,$$

et utilisant(3.0.16, 3.0.17) , on a ■ ■

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\psi(t) &= \frac{d}{dt}\left[\xi(t)\int_\Omega\int_0^1 e^{-2\rho\tau(t)}H(z(x,\rho,t))\,d\rho dx\right]\\
&= \xi'(t)\int_\Omega\int_0^1 e^{-2\rho\tau(t)}H(z(x,\rho,t))\,d\rho dx+\xi(t)\frac{d}{dt}\left(\int_\Omega\int_0^1 e^{-2\rho\tau(t)}H(z(x,\rho,t))\,d\rho dx\right)\\
&\le \xi(t)\frac{d}{dt}\left(\int_\Omega\int_0^1 e^{-2\rho\tau(t)}H(z(x,\rho,t))\,d\rho dx\right)\\
&= \xi(t)\int_\Omega\int_0^1 \left(-2\rho\tau'(t)\right)e^{-2\rho\tau(t)}H(z(x,\rho,t))\,d\rho dx\\
&\quad +\xi(t)\int_\Omega\int_0^1 e^{-\rho 2\tau(t)}\frac{d}{dt}H(z(x,\rho,t))\,d\rho dx\\
&= \left(-2\rho\tau'(t)\right)\xi(t)\int_\Omega\int_0^1 e^{-2\rho\tau(t)}H(z(x,\rho,t))\,d\rho dx\\
&\quad -\frac{1}{\tau(t)}\xi(t)\int_\Omega\int_0^1\left((1-\tau'(t))\rho\right)\left[\left(\frac{\partial}{\partial\rho}+2\tau(t)\right)\left(e^{-2\rho\tau(t)}H(z(x,\rho,t))\right)\right]d\rho dx
\end{aligned}
$$

$$
=-\left(2\rho\tau'(t)\right)\psi(t)-\frac{1}{\tau(t)}\xi(t)\int_\Omega\left[\begin{array}{c} e^{-2\rho\tau(t)}H(z(x,\rho,t))(1-\tau'(t)\rho)\,dx\Big]_0^1\\ +\tau'(t)\int_0^1 e^{-\rho\tau(t)}H(z(x,\rho,t))\,d\rho\end{array}\right]dx-2\left(1-\tau'(t)\rho\right)\psi(t)
$$

$$
\begin{aligned}
&= \left[-\left(2\rho\tau'(t)\right)-\frac{\tau'(t)}{\tau(t)}-2\left(1-\tau'(t)\rho\right)\right]\psi(t)-\frac{(1-\tau'(t))}{\tau(t)}e^{-2\tau(t)}\int_\Omega z(x,1,t)\,h_2(z(x,1,t))\,dx\\
&\quad +\frac{1}{\tau(t)}\int_\Omega u(x,t)\,h_1(u(x,t))\,dx\\
&= -\left[\frac{\tau'(t)}{\tau(t)}+2\right]\psi(t)-\frac{(1-\tau'(t))}{\tau(t)}\xi(t)\,e^{-2\tau(t)}\int_\Omega z(x,1,t)\,h_2(z(x,1,t))\,dx+\frac{1}{\tau(t)}\int_\Omega u(x,t)\,h_1(u(x,t))\,dx\\
&= -2\psi(t)-\frac{(1-d)}{\tau_0}\frac{\alpha_2\mu_1-\alpha_1\mu_2}{\alpha_2\alpha_1}\int_\Omega z(x,1,t)\,h_2(z(x,1,t))\,dx+\frac{\alpha_2\mu_1-\alpha_1\mu_2}{\tau_0\alpha_2\alpha_1}\int_\Omega u(x,t)\,h_1(u(x,t))\,dx\\
&\le -2\psi(t)+\theta_1\int_\Omega z(x,1,t)\,h_2(z(x,1,t))\,dx+\theta_2\int_\Omega u(x,t)\,h_1(u(x,t))\,dx
\end{aligned}
$$

et utilisant(3.0.16, 3.0.17) ,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\psi(t) &\leq -2\psi(t) - \theta_1\left(\frac{\eta C_s^2}{\lambda_1}\|\Delta u_t\|_2^2 + \frac{1}{4\eta}\int\limits_\Omega |h_2(z_t)|^2\, d\gamma\right) + \theta_2\left(\frac{\eta C_s^2}{\lambda_1}\|\Delta u_t\|_2^2 + \frac{1}{4\eta}\int\limits_\Omega |h_1(u_t)|^2\, d\gamma\right) \\
&\leq -2\psi(t) + \frac{\eta\theta_2 C_s^2}{\lambda_1}\|\Delta u_t\|_2^2 + \frac{\theta_2}{4\eta}\int\limits_\Omega |h_1(u_t)|^2\, d\gamma
\end{aligned}$$

Preuve. 2) Utilisant$(3.0.18, 3.0.20)$,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\phi(t) &= \frac{1}{m+1}\left(\int_\Omega \left(|u_t|^m u_t\right)' u(t)\,dx\right) + \frac{1}{m+1}\int\limits_\Omega |u_t|^{m+2}\,dx + \int\limits_\Omega \nabla u_{tt}\nabla u dx + \int\limits_\Omega \nabla u_t \nabla u_t dx \\
&= \int_\Omega |u_t|^m u_{tt} u(t)\,dx + \frac{1}{m+1}\,||u_t||^{m+2} - \int\limits_\Omega \Delta u_{tt} u dx + \|\nabla u_t\|_2^2 \\
&= \int_\Omega \left(\left(|u_t|^m u_{tt} - \Delta u_{tt}\right) u(t)\right) dx + \frac{1}{m+1}\,||u_t||^{m+2} + \|\nabla u_t\|_2^2 \\
&= \frac{1}{m+1}\,||u_t||^{m+2} + \|\nabla u_t\|_2^2 - \int_\Omega \left(\begin{array}{c} -|u|^{p-1} u_t - (1-\sigma(t)) \int\limits_0^t g(t-s)\,\triangle u(s)\,ds \\ +\mu_1 h_1(u_t(x,t)) + \mu_2 h_2(u_t(x,t-\tau(t))) \end{array} \right) u(t)\,dx \\
&= \frac{1}{m+1}\,||u_t||^{m+2} + \|\nabla u_t\|_2^2 + \left(1 - \sigma(t)\int\limits_0^t g(s)\,ds\right)\|\Delta u\|_2^2 + \frac{1}{p}\,\|u_t\|_p^p \\
&\quad + \int_\Omega \sigma(t) \int\limits_0^t g(t-s)\,|\triangle u(t)|\,|\triangle u(s) - \triangle u(t)|\,ds + \mu_1 \int_\Omega u h_1(u_t(x,t))\,dx \\
&\quad + \mu_2 \int_\Omega u h_2(u_t(x,t-\tau(t)))\,dx \\
&\leq \frac{1}{m+1}\,||u_t||^{m+2} + \|\nabla u\|_2^2 + \left(1 - \sigma(t)\int\limits_0^t g(s)\,ds\right)\|\Delta u\|_2^2 + \|u_t\|_p^p \\
&\quad + \frac{\eta C_s^2}{\lambda_1}\,\|\Delta u_t\|_2^2 + \frac{1}{4\eta}\int\limits_\Omega |h_1(u_t)|^2\,d\gamma + \frac{\eta C_s^2}{\lambda_1}\,\|\Delta u_t\|_2^2 + \frac{1}{4\eta}\int\limits_\Omega |h_2(z_t)|^2\,d\gamma \\
&\leq \frac{1}{m+1}\,\|u_t\|_{m+2}^{m+2} + \eta_1\,\|\nabla u_t\|_2^2 - \|\Delta u\|_2^2 + \eta_2\,(g\circ\Delta u)(t) \\
&\quad + \frac{\mu_1}{4\eta}\int_\Omega |u(\gamma,t)|^2\,d\gamma + \frac{\mu_2}{4\eta}\int_\Omega |z(\gamma,1,t)|^2\,d\gamma + \|u_t\|_p^p \\
&\leq \frac{1}{m+1}\,\|u_t\|_{m+2}^{m+2} + \eta_1\,\|\nabla u_t\|_2^2 - \|\Delta u\|_2^2 + \eta_2\,(g\circ\Delta u)(t) \\
&\quad + \frac{\mu_1}{8\eta}\,\|\nabla u_t\|_2^2 + \frac{C^{-2}\mu_2}{8\eta} + \|u_t\|_2^2 + \|u_t\|_p^p \\
&\leq \frac{1}{m+1}\,\|u_t\|_{m+2}^{m+2} + \left(\eta_1 + \frac{\mu_1}{8\eta}\right)\|\nabla u_t\|_2^2 + \eta_2\,(g\circ\Delta u)(t) + \frac{C^{-2}\mu_2}{8\eta}\,\|u_t\|_2^2 + \|u_t\|_p^p \qquad (3.0.21)
\end{aligned}$$

Preuve. 3)

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\varphi(t) &= \int_{\Omega}\frac{d}{dt}\left(\Delta u_t-\frac{1}{m+1}\left|u_t\right|^m u_t\right)\int_0^t g(t-s)\left(u(t)-u(s)\right)dsdx \\
&\quad+\int_{\Omega}\left(\Delta u_t-\frac{1}{m+1}\left|u_t\right|^m u_t\right)\frac{d}{dt}\left(\int_0^t g(t-s)\left(u(t)-u(s)\right)ds\right)dx \\
&= -\int_{\Omega}\left(\left|u_t\right|^m u_{tt}-\Delta u_{tt}\right)\int_0^t g(t-s)\left(u(t)-u(s)\right)dsdx \\
&\quad-\int_{\Omega}\left(\Delta u_t-\frac{1}{m+1}\left|u_t\right|^m u_t\right)\left(\int_0^t g'(t-s)\left[\left(u(t)-u(s)\right)+\left(\nabla u(t)-\nabla u(s)\right)\right]ds\right)dx \\
&= -\int_{\Omega}\left(\begin{array}{c} -\left|u\right|^{p-1}u_t-\triangle u(x,t)-\sigma(t)\int_0^t g(t-s)\triangle u(s)\,ds \\ +\mu_1 h_1\left(u_t(x,t)\right)+\mu_2 h_2\left(u_t(x,t-\tau(t))\right)\end{array}\right)\int_0^t g(t-s)\left(u(t)-u(s)\right)dsdx \\
&\leq \left(C_{12}\left\|\nabla u\right\|_2^2+\left(1-\sigma(t)\int_0^t g(s)\,ds\right)\left\|\Delta u\right\|_2^2+\left\|u_t\right\|_p^p+\right)\left(g*\triangle u\right)(t)+\left(g'\circ\triangle u\right)(t) \\
&\quad+\mu_1\left\|h_1\left(z(x,0,t)\right)\right\|_2^2+\mu_2\left\|h_2\left(z(x,1,t)\right)\right\|_2^2 \ldots\ldots \qquad (3.0.22)
\end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt}J(t)=\varepsilon_1\frac{d}{dt}\psi(t)+\varepsilon_2\frac{d}{dt}\phi(t)+\varepsilon_3\frac{d}{dt}\varphi(t)$$

ce qui achève la preuve ■

Lemme 3.0.11 *Soit $L(t)$ être les fonctions définies dans* (3.0.1), *alors $L(t)$ satisfait*

$$\frac{d}{dt}L(t)\leq -C_1E(t)+C_2\left\|h_1(u_t)\right\|_2^2;\forall t\geq 0 \qquad (3.0.23)$$

Preuve. En prenant la dérivée de (3.0.1), on obtient

$$\frac{d}{dt}L(t)=M'\frac{d}{dt}E(t)+\varepsilon\sigma'(t)\left(\psi(t)+\phi(t)+\varphi(t)\right)+\varepsilon\sigma(t)\frac{d}{dt}\left(\psi(t)+\phi(t)+\varphi(t)\right) \qquad (3.0.24)$$

en utilisant les inégalités

$$\sigma'(t)\left|\int_{\Omega} u u_t dx\right| \leq \frac{C_s^2}{\alpha_1}\sigma'(t)\|\nabla u\|_2^2 + \sigma'(t)\,\alpha_1^2\|u_t\|_2^2 \tag{3.0.25}$$

$$\sigma'(t)\left|\int_{\Omega} u u_t dx\right| \leq \frac{C_s^2 B^2}{\alpha_1}\sigma'(t)\|\nabla u\|_2^2 + \sigma'(t)\,\alpha_1^2\|u_t\|_{2,\Omega}^2 \tag{3.0.26}$$

En combinant (3.0.20), (3.0.25), (3.0.26) , nous avons

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}L(t) &= -c_1 M'\|u_t\|_{2,\Omega}^2 - c_2 M'\|z(\gamma,1,t)\|_{2,\Omega}^2 + M'\frac{\sigma(t)}{2}\left(g'\circ\nabla u\right)(t) + \epsilon\sigma'(t)\,\alpha_1^2\|u_t\|_{2,\Omega}^2 \\
&\quad \epsilon\sigma(t)\left[\alpha_1^2\left(\|u_t\|_2^2 + \|u_t\|_{2,\Omega}^2\right) - (1-2n-\eta_1)\|\nabla u\|_2^2 + \frac{\sigma(t)}{4}(g\circ\nabla u)(t) + \|u\|_p^p\right] \\
&\quad +\epsilon\sigma(t)\left[\eta_2\|u_t\|_{2,\Omega}^2 + \eta_3\|z(\gamma,1,t)\|_{2,\Omega}^2 + \|u_t\|_p^p\right] - M'\frac{\sigma'(t)}{2}\int_0^t g(s)\,ds\,\|\nabla u\|_2^2 \\
&\quad +\epsilon\sigma'(t)\left[\frac{C_s^2}{\alpha_1}\|\nabla u\|_2^2 + \frac{C_s^2 B^2}{\alpha_1}\|\nabla u\|_2^2 + \alpha_1^2\|u_t\|_{2,\Omega}^2\right] - \delta\|\nabla u_t\|_2^2
\end{aligned} \tag{3.0.27}$$

nous concluons que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}L(t) &\leq \epsilon\sigma(t)\left[\begin{array}{c} \frac{\sigma(t)}{4}(g\circ\nabla u)(t) + \left(\frac{c_1 M'}{\sigma(0)} - \eta_3\right)\|z(\gamma,1,t)\|_{2,\Omega}^2 + \|u\|_p^p \\ +\alpha_1^2\left(1+\frac{\sigma'(t)}{\sigma(t)}\right)\left(\|u_t\|_2^2 + \|u_t\|_{2,\Omega}^2\right)\end{array}\right] \\
&\quad -\epsilon\sigma(t)\left[\left(\frac{c_1 M'}{\sigma(0)} - \eta_2\right)\|u_t\|_{2,\Omega}^2 + \left((1-2n-\eta_1) - \left(\frac{C_s^2}{\alpha_1}\left(1+B^2\right) - \frac{\delta}{2}\right)\frac{\sigma'(t)}{\sigma(t)}\right)\|\nabla u\|_2^2\right] \\
&\quad -\delta\|\nabla u_t\|_2^2
\end{aligned} \tag{3.0.28}$$

Consequently, using the definition of the energy (2.0.29), for any positive constant M', we obtain:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}L(t) &\leq -\sigma(t)\left[\left(\frac{c_1 M'}{\sigma(0)} - \eta_2\right)\|u_t\|_{2,\Omega}^2 + \left(\frac{c_1 M'}{\sigma(0)} - \eta_3\right)\int_{\Omega} u(x,t-\tau)\,dx + \right] \\
&\quad -\epsilon\sigma(t)\left[\left((1-2n-\eta_1) - \left(\frac{C_s^2}{\alpha_1}\left(1+B^2\right) - \frac{\delta}{2}\right)\frac{\sigma'(t)}{\sigma(t)}\right)\|\nabla u\|_2^2\right] \\
&\quad -\epsilon\sigma(t)\left[\frac{M'\sigma(t)}{4}(g\circ\nabla u)(t) + \left(\frac{M'}{2} - \alpha_1^2\left(1+\frac{\sigma'(t)}{\sigma(t)}\right)\right)\left(\|u_t\|_2^2 + \|u_t\|_{2,\Omega}^2\right)\right] \\
&\quad \epsilon\sigma(t)\left[\frac{M'}{2}\left(\|u_t\|_2^2 + \|u_t\|_{2,\Omega}^2\right) + \|u\|_p^p + \frac{M'\sigma(t)}{4}(g\circ\nabla u)(t)\right] - \delta\|\nabla u_t\|_2^2
\end{aligned} \tag{3.0.29}$$

On fixe d'abord $n-\eta_1>0$ tel que $1-2n-\eta_1>0$ puis on prend $M'>0$ tel que $\frac{c_1M'}{\sigma(0)}-\eta_2>0, \frac{c_1M'}{\sigma(0)}-\eta_3>0$. Puisque $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{\sigma'(t)}{\sigma(t)}=0$, on peut choisir $t_0>0$ suffisamment grand pour que

$$\left(\frac{M'}{2}-\alpha_1^2\left(1+\frac{\sigma'(t)}{\sigma(t)}\right)\right)>0, \left((1-2n-\eta_1)-\left(\frac{C_s^2}{\alpha_1}\left(1+B^2\right)-\frac{\delta}{2}\right)\frac{\sigma'(t)}{\sigma(t)}\right)>0$$

En utilisant le Sobolev–Poincaré et tracer des inégalités

$$\|u\|_2^2\leq C\|\nabla u\|_2^2, \|u\|_{2,\Omega}^2\leq C\|\nabla u\|_2^2$$

Alors (3.0.29) prend la forme

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}L(t) &\leq -M'\sigma(t)c\epsilon E(t)-\left(M'\delta-\epsilon M'\sigma(0)C\right)\|\nabla u_t\|_2^2 &(3.0.30)\\ &+\epsilon\frac{M'\sigma(0)}{2}\sigma(t)(g\circ\nabla u)(t) &(3.0.31)\end{aligned}$$

puis, en choisissant ϵ assez petit pour que $M'\delta-\epsilon M'\sigma(0)C>0$

on obtient

$$\frac{d}{dt}L(t)\leq -M'\sigma(t)c\epsilon E(t)+\epsilon\frac{M'\sigma(0)}{2}\sigma(t)(g\circ\nabla u)(t) \tag{3.0.32}$$

réglage $\theta=\frac{M'\epsilon}{\lambda_2}$, $C_1=C\theta$, $C_2=\epsilon\frac{M'\sigma(0)}{2}$ la dernière inégalité devient

$$\frac{d}{dt}L(t)\leq -\sigma(t)C_1E(t)+C_2\sigma(t)(g\circ\nabla u)(t), \forall t\geq 0 \tag{3.0.33}$$

Multiplier (3.0.33) par $\eta(t)$ et en utilisant le lemme , on a

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}L(t) &\leq -\sigma(t)C_1E(t)+C_2\sigma(t)(g\circ\nabla u)(t)\\ &\leq -\sigma(t)C_1E(t)-C_2\sigma(t)\left(g'\circ\nabla u\right)(t)\\ &\leq -\sigma(t)C_1E(t)+C_2\left(-2\frac{d}{dt}E(t)-\sigma'(t)\int_0^t g(s)\,ds\,\|\nabla u(t)\|_2^2\right) &(3.0.34)\end{aligned}$$

Puisque η est non croissant, d'après la définition de $E(t)$ et l'hypothèse(2.0.2), on a

$$\frac{d}{dt}\left[L(t)+2C_2E(t)\right] \leq -\sigma(t)\,C_3E(t)\,, \quad \text{for } t>t_0$$

comme on a $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{2C_2l_0\sigma'(t)}{\lambda l\eta(t)\sigma(t)}=0$, on peut choisir $t_1>t_0$ tel que $C_3=C_1+\frac{2C_2l_0\sigma'(t)}{\lambda l\eta(t)\sigma(t)}$ pour $t>t_1$

Maintenant, soit $\chi(t)=\begin{cases} L(t)+2C_2E(t) \ \text{ si } H \text{ est linéaire sur } [0,\varepsilon] \\ H'(\varepsilon_0E(t))\left[L(t)+cE(t)\right]+cE(t) \ \text{ si } H'(0)>0, H''>0 \text{ sur }]0,\varepsilon] \end{cases}$.

On peut alors vérifier que

$$\theta_1E(t) \leq \chi(t) \leq \theta_2E(t) \tag{3.0.35}$$

où θ_1, θ_2 sont deux constantes positives, nous arrivons donc à

$$\int_{|u_t|>\varepsilon}|h_1(u_t)|^2\,dx \leq c_1\int_{|u_t|>\varepsilon}h_1(u_t)\,u_tdx \leq cE'(t)$$

$$\int_{|u_t|\leq\varepsilon}|h_1(u_t)|^2\,dx \leq c_1\int_{|u_t|\leq\varepsilon}h_1(u_t)\,u_tdx \leq cE'(t)$$

En rappelant que $H'(0)>0, H''>0, E'\leq 0$ sur $]0,\varepsilon]$ et en utilisant (3.0.35), on obtient

$$\chi(t)=\begin{cases} L(t)+2C_2E(t) \ \text{ si } H \text{ est linéaire sur } [0,\varepsilon] \\ H'(\varepsilon_0E(t))\left[L(t)+cE(t)\right]+cE(t) \ \text{ si } H'(0)>0, H''>0 \text{ sur } [0,\varepsilon] \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\chi(t) &= \frac{d}{dt}\Big(H'(\varepsilon_0E(t))\left[L(t)+cE(t)\right]+cE(t)\Big) \\
&= \varepsilon_0E'(t)\,H''(\varepsilon_0E(t))\left[L(t)+cE(t)\right]+H'(\varepsilon_0E(t))\left[L'(t)+cE'(t)\right]+cE'(t) \\
&\leq -\eta_1\zeta(t)\,E(t)\,H'(\varepsilon_0E(t))+c_3H'(\varepsilon_0E(t))\,H^{-1}\left(-c_2'E'(t)\right)+c_3c_2E(t) \\
&\leq -\eta_1\zeta(t)\,E(t)\,H'(\varepsilon_0E(t))+c_3\zeta(t)\,E(t)\,H'(\varepsilon_0E(t))-c_2'\zeta(t)\,E'(t)+c_3c_2E(t) \\
&\leq -c\zeta(t)\,E(t)\,H'(\varepsilon_0E(t))+c_3c_2E(t) \\
&\leq -c\zeta(t)\,L(t)\,H_2(L(t))+c_3c_2E(t) \\
&\leq -c\zeta(t)\,H_2(\chi(t))
\end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt}\chi(t) \leq -c\zeta(t)\,H_2(\chi(t)) \qquad \text{pour } \ t>0 \tag{3.0.36}$$

$\chi(t)$ est équivalent à $E(t)$. Par le fait que $\chi(t) = H_2^{-1}(H_2\chi(t)) = -H'(H_2\chi(t)\chi(t))$ est croissant on obtient

$$\left(\frac{d}{dt}\chi(t)\right) H'(\chi(t)) = \frac{d}{dt}(H(\chi(t))) \geq c\zeta(t) \quad \text{pour} \quad t > 0 \tag{3.0.37}$$

Une simple intégration sur $(0,t)$ donne

$$H(\chi(t)) \geq c\int_0^t \zeta(t) + H(\chi(0)) \quad \text{pour} \quad t > 0 \tag{3.0.38}$$

en exploitant le fait que H^{-1} est décroissant, on en déduit

$$\chi(t) \leq H^{-1}\left(c_1\int_0^t \zeta(t) + H(\chi(0))\right) \quad \text{pour} \quad t > 0 \tag{3.0.39}$$

Par conséquent, en utilisant (3.0.35),nous concluons

$$E(t) \leq cH^{-1}\left(c\int_0^t \zeta(t) + H(\chi(0))\right) \quad \forall t > t_1$$

La preuve est complète. ■

Conclusion ■

Dans cette mémoire nous avons étudié la stabilité exponentielle de modéle non linéaire de plaques minces viscoélastiques en présence d'un terme source avec un retad distribué et un amortissement structurel. Sous des hypothéses raisonnables sur les données initiales (déplacement u_0 et vitesse u_1; l'historique de la vitesse f_0), sur les fonctions de relaxation $h_1; h_2$, sur la fonction de retad distribué μ_2 et sur le coefficient d'amortissement μ_2:

Nous avons démontré :

1- l'existence globale d une solution faible du système considéré dans des espaces fonctionels convenables.

2- la stabilité exponentielle, en utilisant la méthode des multiplicateurs, c'est dire nous avons démontré l'existence de deux constantes positives C et k, dépendantes uniquement des données $(u_0, u_1, f_0, h_1, h_2)$ telle que l'énergie du sytéme vérifie l'estimation

.

Bibliographie

[1] C. Abdallah, P. Dorato, J. Benitez-Read, and R. Byrne. Delayed positive feedback can stabilize oscillatory systems. In ACC 1993, 3106 3107, (1993).

[2] R. A. Adams, Fournier, J.F. John : Sobolev Spaces, 2nd edition. Elsevier, Singapore (2009).

[3] R. A. Adams, , J.F. Fournier, : Sobolev Spaces, of Pure and Applied Mathematics (Amsterdam). Elsevier/Academic Press, Amsterdam, 2140 (2003).

[4] H. Brezis, Analyse fonctionnelle théorie et applications, Dunod, Paris (1999).

[5] F. Conrad and M. Pierre, Stabilization of second order evolution equation by unbounded nonlinear feedbacks, Ann. Inst. Henri Poincaré, vol. 11, 485-515, (1994).

[6] C. M. Dafermos, Asymptotic behavior of solutions equations, in non linear Evolution Equations, M. G. Crandall Ed., Academic press, New York, 103-123, (1978).

[7] L.C. Evans, Partial Differential Equations, Volume 19, Americain Mathematical Society, (1997).

[8] A. Haraux, Comportement l'infini pour une équation des ondes non linéaires dissipative. C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A, 287, 507-509, (1978).

[9] V. Komornik, Decay estimates for the wave equation with internal damping; International Series of Numerical Mathematics, vol, 118, 253-266, (1994).

[10] J. E. Lagnese, uniforme asymptotic energy estimates for solutions of the equations of dynamic plane elasticity with nonlinear dissipation at the boundary. Nonlinear, Anal. 16, 35-54, (1991).

[11] J. L. Lions, Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires, Paris, Dunod, (1969).

[12] N.Mezouar, M.Abdelli, A.Rachah : Existence of global solution and decay estimates for a viscoelastic Petrovsky equation with a delay term in the non-linear internal feedback. Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2017 , No. 58, pp. 1–2,(2017)

[13] S. Nicaise, C. Pignotti, Stabilization of the wave equation with boundary or internal distributed delay, Differential Integral Equations 21 (9-10), 935-958, (2008).

[14] J. Y. Park, J. R. Kang; Global Existence and Uniform Decay for a Nonlinear Viscoelastic Equation with Damping, Acta Appl Math 110, 1393-1406, (2010).

[15] I. H. Suh and Z. Bien. Use of time delay action in the controller design, 25 : 600 603, (1980).

[16] M. Tucsnak, Boundary stabilization for the stretched string equation, Differential Internal Equations 6, 925-935, (1993).

Dirichlet END