الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

جامعة غرداية

Université de Ghardaïa

N° d'enregistrement

/…../…../…../…../…..

كلية العلوم والتكنولوجيا

Faculté des Sciences et de la Technologie

قسم الرياضيات والإعلام الآلي

Département des Mathématiques et de l'informatique

Laboratoire des Mathématiques et Applications

Mémoire de fin d'étude, en vue de l'obtention du diplôme

Master

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Spécialité : Analyse Fonctionnelle et Applications

Mémoire

Stabilité Exponentielle Globale des Réseaux de Neurones Récurrents Généralisés à Retards Discrets et Distribués

Présenté par :

Youcef KECHAR

Soutenue publiquement le…….. /……… /2023

Devant le jury composé de :

Chikh Salah Abdoulouahab	**MCB**	**Université de Ghardaïa**	**Président**
Merabet Brahim	**MCB**	**Université de Ghardaïa**	**Encadreur**
Kina Abdekrim	**MCB**	**Université de Ghardaïa**	**Examinateur**

Année universitaire 2022 / 2023

Dédicace

Je dédie ce travail :
À mes parents.
À mes Frères
À mes Soeurs
À mes grand-parents
À toute ma famille.
À tous ceux qui m'ont enseigné
À tous mes amis.

Kechar Youcef
9 juillet 2025

Remerciement

Je remercie mon encadreur Monsieur **Dr.Brahim Merabet** pour le sujet qu'il m'a proposé et la disponibilité dont il a su faire preuve au long de la préparation de ce mémoire.

Merci à tous ceux qui m'ont enseigné en primaire, collège, lycée, université et aussi ailleurs,sans eux je suis rien. Merci à tous les mathématiciens...

Merci mes amis, merci à tout ceux qui ont contribué de prés ou de loin dans ce travail

Et enfin dois-je dire quel point mes parents sont aujourd'hui dans mes pensées ! mes parents qui m'ont toujours soutenu dans mes épreuves aussi bien au niveau moral, que matériel. Je leur adresse aujourd'hui un témoignage d'amour, et de reconnaissance

Kechar Youcef
Ghardaia 9 juillet 2025

ملخص

في هذه المذكرة ، نتعامل مع مشكلة تحليل الاستقرار الأسي الكلي لفئة من الشبكات العصبية المتكررة مع تأخيرات مختلطة منفصلة وموزعة ، نثبت أولا وجود وتفرّد نقاط التوازن، ثم نستخدم دالة ليابونوف ـ كراسوفسكي الجديدة وتطوير نهج عدم مساواة المصفوفة الخطية لجعل الشبكات العصبية المتكررة مستقرة كليا بشكل كبير.
الكلمات المفتاحية: الشبكات العصبية المتكررة المعممة ؛ تأخيرات منفصلة وموزعة؛ دالة ليابونوف ـ كراسوفسكي ؛ استقرار أسي كلي ؛ الاستقرار المقارب العام.

Abstract

In this memoir, we deal with the problem of analyzing the global exponential stability of a class of recurrent neural networks (RNNs) with discrete and distributed mixed delays, let us consider the existence and uniqueness of équilibriste points. use a new Lyapunov-krasvsckii functional and develop a linear matrix inequality (LMI) approach to make RNNs exponentially global stable.
keywords :Generalized recurrent neural networks; Discrete and distributed delays; Lyapunov-Krasovskii functional; Global exponential stability; Global asymptotic stability.

Résumé

Dans ce mémoire en traite le problème d'analyse de la stabilité exponentielle globale d'une classe de réseaux de neurons récurrents (RNNs) avec des retards mixtes discrets et distribués, considérons l'existence et l'unicité de point d'équilibre.On utilise une nouvelle fonctionelle de Lyapunov-krasvsckii on développe une approche d'inégalité matricielle linéaire (LMI) pour que les RNNs soient globalement exponentiellement stables.
Mots Clé :Réseaux de neurones récurrents généralisés ; Retards discrets et distribués ;fonctionnelle Lyapunov-Krasovskii ; Stabilité exponentielle globale ; Stabilité asymptotique globale.

Table des matières

Introduction

Les réseaux de neurones récurrents (RNN) sont des modèles de traitement de l'information qui ont été largement utilisés dans divers domaines tels que la reconnaissance de la parole, la vision par ordinateur et la modélisation du langage naturel. Les RNN peuvent être utilisés pour traiter des données séquentielles telles que des séquences temporelles ou des séquences de mots.

Cependant, les RNN traditionnels ne prennent pas en compte les retards discrets et distribués qui peuvent être présents dans les données séquentielles. Les retards discrets se produisent lorsque l'information est retardée d'un certain nombre d'étapes de temps, tandis que les retards distribués se produisent lorsque l'information est retardée d'un temps variable.

Pour résoudre ce problème, des RNN généralisés avec des retards discrets et distribués ont été proposés. Ces modèles prennent en compte les retards discrets et distribués en introduisant des variables supplémentaires dans le modèle.

Cependant, ces modèles peuvent être instables et conduire à une divergence du système. Pour résoudre ce problème, une méthode basée sur la théorie du contrôle a été proposée pour analyser la stabilité exponentielle globale des RNN généralisés avec des retards discrets et distribués.

Cette méthode utilise une fonction de Lyapunov pour prouver que le système est exponentiellement stable. La fonction de Lyapunov mesure l'énergie du système et montre comment elle décroît au fil du temps. Si cette énergie décroît exponentiellement, alors le système est exponentiellement stable.

En utilisant cette méthode, il a été démontré que les RNN généralisés avec des retards discrets et distribués peuvent être exponentiellement stables. Cette méthode peut être utilisée pour concevoir des RNN plus stables et pour améliorer leur performance dans diverses applications.

Dans ce mémoire, on essaye de reprendre plus en détails les travaux de l'article [10] en clarifiant la notion et l'étude de stabilité des RNN avec retards.

Chapitre 1

Notions Préliminaires sur la Stabilité des EDO

Le comportement asymptotique est un aspect qualitatif le plus important des systèmes dynamiques, c'est-à-dire le comportement des solutions lorsque le temps tend vers l'infini ; ce concept qui est directement lié à la stabilité, a fait l'objet d'une recherche abondante depuis la fin du XIX'eme siècle. Son importance réside dans le fait que la notion de la stabilité est commune à plusieurs domaines, d'une part, et d'un point de vue général, l'analyse de la stabilité est une étape nécessaire pour l'étude du fonctionnement des systèmes (physiques, mécaniques, électroniques...etc.). Pour cette raison il est indispensable d' introduire dans la première partie de ce chapitre les concepts de base de la notion de stabilité ainsi que le critère très important pour l'analyse de la stabilité.

1.1 Généralités

Définitions

Définition 1.1 *[4] On appelle équation différentielle résolue d'ordre p une équation de la forme* $\forall t \in I, X^{(p)}(t) = f\left(t, X(t), X'(t), \cdots, X^{(p-1)}(t)\right)$ *d'inconnue* $X \in \mathcal{C}^p\left(I, \mathbb{R}^n\right)$ *où* $n \in \mathbb{N}^*, I$ *intervalle de* $\mathbb{R}, f \in \mathcal{C}\left(I \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\right)$. *L'équation est dite linéaire si* f *est linéaire en ses* $p-1$ *dernières variables. Elle est dite autonome si* f *ne dépend pas de* t.

Remarque 1.1 *[4] En posant* $Y = {}^t\left(X, X', \cdots, X^{(p-1)}\right)$, *on se ramène à une équation d'ordre 1 de taille np :* $Y_1' = Y_2, \cdots, Y_{p-1}' = Y_p, Y_p' = f\left(t, Y_1, \cdots, Y_{p-1}\right)$. *On ne considérera done plus que des systèmes d'ordre* $1 X' = f(t, X)$.

Définition 1.2 *[4] On appellera problème de Cauchy associé à ce système la recherche d'une solution vérifiant* $X\left(t_0\right) = X_0$ *où* $t_0 \in I, X_0 \in \mathbb{R}^n$ *sont donnés.*

Définition 1.3 *[4] On appellera solution la donnée d'un intervalle* $J \subseteq I$ *et d'une fonction* ε *vérifiant* $\forall t \in J, \varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$.

Existence et unicité de solutions

Définition 1.4 *[4] On appelle solution maximale la donnée d'une solution* $\left(J_0, \varphi_0\right)$ *telle qu'il n'existe pas d'autre solution* (J, ψ) *vérifiant* $J_0 \subseteq J$ *et* $\varphi = \psi$ *sur* J_0.

Définition 1.5 *[4] On dit que* f *est localement lipschitzienne en la seconde variable si pour tout* $\left(t_0, x_0\right) \in I \times \mathbb{R}^n$, *il existe* V *voisinage de* $\left(t_0, x_0\right)$ *et* $k > 0$ *tels que pour tous* $(t, x), (t, x') \in V, \|f(t, x) - f\left(t, x'\right)\| \leq k\left\|x - x'\right\|$.

Remarque 1.2 *[4] Si* f *est de classe* $\mathcal{C}^1$, *alors elle est localement lipschitzienne.*

Théorème 1.1 (Cauchy-Lipschitz) *[4] Si f est localement lipschitzienne en la seconde variable, alors pour tous $t_0 \in I, x_0 \in \mathbb{R}^n$, il existe une unique solution maximale X vérifiant $X(t_0) = x_0$.*

Théorème 1.2 (Cauchy-Peano) *[4] Si f est seulement supposée continue, alors pour tous $t_0 \in I, x_0 \in \mathbb{R}^n$, il existe au moins une solution maximale X vérifiant $X(t_0) = x_0$.*

Le problème de la globalité

Définition 1.6 *[4] Une solution maximale est dite globale si elle est définie sur I entier.*

Contre-Exemple 1.1 *[4] Le problème de Cauchy $x' = x^2, x(0) = 1$ n'admet pas de solution définie sur $\mathbb{R}$ entier.*

Théorème 1.3 (Cauchy-Lipschitz global) *[4] On suppose que $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est continue et vérifie $\forall K$ compact de $I, \exists k > 0, \forall y, z \in \mathbb{R}^n, \|f(t,z) - f(t,y)\| \leq k\|z - y\|$ Alors il y a une solution unique, qui est de plus définie sur I entier.*

Exemple 1.1 *[4] Si $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), B : I \to \mathbb{R}^n$ sont continues, alors les solutions de $X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$ sont globales.*

Proposition 1.1 (Gronwall) *[4] Soient $\varphi, \psi \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R}_+), c \geq 0$ tels que $\forall t \in [a,b], y(t) \leq c\int_a^t \psi(s)y(s)\mathrm{d}s$. Alors $\forall t \in [a,b], y(t) \leq \exp\left(\int_a^t \psi(s)\mathrm{d}s\right)$.*

Théorème 1.4 (des bouts) *[4] On note $I =]a,b[$ et on suppose f localement lipschitzienne en X. Soit $\varphi :]\alpha, \beta[\to \mathbb{R}^n$ une solution maximale de $X' = f(t,X)$. Si $\beta < b$ (resp. si $\alpha > a$), alors pour tout K compact de $\mathbb{R}^n$, il existe V voisinage de β (resp. de α) dans $]\alpha, \beta[$ tel que pour tout $t \in V, \varphi(t) \notin K$*

Corollaire 1.1 *[4] Si f est bornée, alors les solutions maximales sont globales.*

1.2 Stabilité et théorie de Lyapunov

On présente dans cette partie les notions de la stabilité. Considérons le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x), \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{1.1}$$

Avec $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ On suppose que les conditions d'existence et d'unicité des solutions de (1.1) sont vérifiées de sorte que le système (1.1) admette une unique solution $x(t, x_0)$ définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$.

Notions de stabilité

S'il est possible que la trajectoire d'un système corresponde, à partir d'un certain moment, uniquement à un point, un tel point est appelé point d'équilibre. Nous allons voir que les problèmes de stabilité sont naturellement formulés par rapport aux points d'équilibre.

Définition 1.7 *[8, 1] Le point $x(0) = x_0$ est dit point d'équilibre du système (1.1) si $f(x(0) = x_0) = 0$ autrement dit $x(0) = x_0$ est une solution constante du systéme $\frac{dx}{dt} = f(x)$*

Remarque 1.3 *[8, 1] On peut toujours se ramener au cas où le point d'équilibre x_e est dit point d'équilibre du système libre est l'origine 0 puisque si x_e vérifie $f(x_e) = 0$, il suffit de considérer le changement de coordonnées $z = x - x_e$ la dérivée de z est donnée par :*

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dx}{dt} = f(x) = f(z + x_e) = g(z), \text{ et } g(z) = 0$$

l'origine est bien un point d'équilibre du système $\frac{dz}{dt} = g(z)$.

Définition 1.8 *[8, 1] Le point d'équilibre $x(0) = x_0$ est dit stable si $\forall \rho > 0$, il existe $r(\rho) > 0$ tel que*

$$\text{si } \|x_0 - x_e\| \leq r \text{ alors } \|x(t) - x_e\| \leq \rho, \forall t \geq 0$$

Sinon le point d'équilibre est dit instable.

Cette définition signifie que, quelle que soit la boule d'exigence de rayon ρ, il est toujours possible de choisir une certaine sous-boule de rayon r telle que pour toute condition initiale comprise dans cette sous-boule, la trajectoire résultante sera, en tout temps, comprise dans la boule d'exigence de rayon ρ. Dans un langage plus imagé, un petit déséquilibre initiale n'entraine qu'un petit déséquilibre au cours du temps, déséquilibre qui peut très bien être permanent. Il existe plusieurs types de stabilité :

— Stabilité asymptotique.

— Stabilité exponentielle.

— Stabilité uniforme.

Types de stabilité

Définition 1.9 (Stabilité asymptotique globale) *Un point d'équilibre x_e est globallement asymptotiquement stable si :*

— *Il est stable.*

— *Toute solution $X(.)$ converge vers x_e :*

$$\lim_{t \to +\infty} x(t) = x_e$$

Définition 1.10 (Stabilité asymptotique locale) *[8, 1] Le point d'équilibre x_e est localement asymptotiquement stable si :*

— *Il est stable.*

— *Il existe $r > 0$ tel que : Si $\|x(0) - x_e\| < r$, nous avons :*

$$\lim_{t \to +\infty} x(t) = x_e$$

Définition 1.11 (Stabilité exponentielle globale) *[8, 1] Le point d'équilibre x_e est globallement exponentiellement stable avec taux de convergence $\alpha > 0$, s'il existe $\beta > 0$ telle que toute solution $x(t)$ vérifie :*

$$\|x(t) - x_e\| \leq \beta \|x(0) - x_e\| \exp(-\alpha t) \text{ pour tout } t > 0.$$

Définition 1.12 (Stabilité exponentielle locale) *[8, 1] Le point d'équilibre est localement exponentiellement stable de taux de convergence $\alpha > 0$, s'il existe $r > 0$ et $\beta > 0$ telle que $\|x(0) - x_e\| < r$, nous avons :*

$$\|x(t) - x_e\| \leq \beta \|x(0) - x_e\| \exp(-\alpha t) \text{ pour tout } t \geq 0.$$

Définition 1.13 (Stabilité uniforme locale) *[8, 1] Le point d'équilibre x_e est localement uniformément stable si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(s) > 0 : \|x(0) - x_e\| < \delta \Longrightarrow \|x(t) - x_e\| < \varepsilon, \forall t \geq 0$$

Définition 1.14 (Stabilité uniforme globale) *[8, 1] Le point d'équilibre x_e est globalement uniformément stable s'il est uniformément stable et les solutions du système sont globalement uniformément bornées.*

Remarque 1.4 *[8, 1] Si x_e est exponentiellement stable alors x_e est asymptotiquement stable et ça implique que x_e est atable.*

Remarque 1.5 *[8, 1] Pour un système linéaire $\frac{dx}{dt} = Ax(t)$, où $A \in M_n(\mathbb{R})$, on rappelle que l'origine est un point d'équilibre et la stabilité locale est équivalente à la stabilité globale. C'est une conséquence directe du théorème ci-dessous caractérisant la stabilité des systèmes linéaires autonomes.*

Proposition 1.2 *[8, 1] S'il existe une valeur propre λ de A telle que $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$, alors le point d'équilibre 0 est instable.*

— Si toutes les valeurs propres de A sont à partie réelle strictement négative, alors le point d'équilibre 0 est asymptotiquement stable.

— Le point d'équilibre 0 est stable si et seulement si toute valeur propre de A est à partie réelle négative ou nulle, et si toute valeur propre à partie réelle nulle est simple.

Méthode indirecte de Lyapunov

La première méthode de Lyapunov est basée sur l'examen de la linéarisation du système $\dot{x} = f(x, \bar{u})$ autour de l'équilibre $(\bar{x}, \bar{u})$. Plus précisément, on examine les valeurs propres $\lambda_i(A)$ de la matrice Jacobienne évaluée à l'équilibre :

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{u}).$$

Selon cette méthode, les propriétés de stabilité de $(\bar{x}, \bar{u})$ s'expriment comme suit.

Théorème 1.5 *[8, 1]*

1. *Si toutes les valeurs propres de la matrice Jacobienne ont une partie réelle strictement négative $(\forall i, \mathrm{Re}\,(\lambda_i(A)) < 0)$, l'équilibre $(\bar{x}, \bar{u})$ est exponentiellement stable.*
2. *Si la matrice Jacobienne possède au moins une valeur propre à partie réelle strictement positive $(\exists i, \mathrm{Re}\,(\lambda_i(A)) > 0)$, l'équilibre $(\bar{x}, \bar{u})$ est instable.*

Le théorème ne permet pas de dire si l'équilibre est stable ou instable quand la matrice Jacobienne comporte au moins une valeur propre nulle et aucune valeur propre à partie réelle strictement positive. Dans ce cas, les trajectoires du système convergent vers un sous-espace (une variété) dont la dimension est le nombre de valeurs propres nulles de la matrice Jacobienne et la stabilité de l'équilibre peut être étudiée dans ce sous-espace par la seconde méthode.

Méthode directe de Lyapunov

La méthode directe de Lyapunov, dite aussi 2ieme méthode de Lyapunov, consiste à étudier la stabilité du système sans avoir recours à la solution explicite des équations différentielles non linéaires.

Définition 1.15 *[8, 1]*

1. *Soit* $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *une fonction continue telle que* $V(0) = 0$.
   — *On dit que la fonction* V *définie positive si* $V(x) > 0$ *pour tout* $x \neq 0$.
   — *On dit que la fonction* V *est semi-définie positive si* $V(x) \geq 0$ *pour tout* $x \in B_\rho$ *pour un* $\rho > 0$.
   — *La fonction* V *est dite définie négative (resp. semi-définie négative) si* $-V$ *est une fonction définie positive (resp. semi-définie positive).*
   — V *est non définie si :* $V(0) = 0$ *et* $V(x)$ *change de signe dans tout voisinage de 0 .*
2. *Soit* $g : [0, a] \to [0, +\infty[$ *une fonction continue.*
   — *La fonction* g *est dite* K*-fonction (ou bien de classe* K *) si elle est strictement croissante et* $g(0) = 0$.
   — *Si de plus* $a = +\infty$ *et* $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$, *alors* g *est dite* $K_\infty-$ *fonction (ou bien de classe* K_∞ *).*

On appelle dérivée temporelle le long de la trajectoire, la fonction $\dot{V}$ *définie par :*

$$\dot{V}(t) = \frac{d}{dt}(V \circ x)(t) = \left\langle \nabla V(x), \frac{dx}{dt} \right\rangle = \langle \nabla V(x), f(x) \rangle$$

D'où les théorèmes de stabilité de Lyapunov suivants :

Fonction de lyapunov

Définition 1.16 *[8, 1] Une fonction de Lyapunov est une fonction continue* $W : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$*telle que* $W(x) \geq 1$ *et* $\lim W(x)_{|x| \to \infty} = +\infty$. *En particulier les ensembles de niveau* $\{x : W(x) \leq a\}$ *sont compacts.*

Théorème 1.6 *[8, 1] L'origine du système (1.1) est stable s'il existe une fonction de Lyaponov et un candidat de Lyapunov* $V \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ *avec* $V(0) = 0$ *et telle que :*

1. V *est définie positive.*
2. $\dot{V}(t) = \langle \nabla V(x), f(x) \rangle$ *est semi-définie négative.*

Stabilité Asymptotique

Définition 1.17 *[8, 1] L'origine du système (1.1) est asymptotiquement stable s'il existe une fonction* $V(x) \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ *avec* $V(0) = 0$ *et telle que :*

1. V *est définie positive.*
2. $\dot{V}(x) = \langle \nabla V(x), f(x) \rangle$ *est définie négative.*

Théorème 1.7 *[8, 1] S'il existe une fonction* V *définie positive de* $C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ *avec* $V(0) = 0$ *et telle que, pour* $k \geq 0$

$$\langle \nabla V(x), f(x) \rangle + kV(x) \leq 0$$

Alors, le point d'équilibre $x = 0$ *est stable et si* $k > 0$ *il est asymptotiquement stable.*

Stabilité Exponentielle

Théorème 1.8 *[8, 1] Soit* $V(x)$ *une fonction définie positive de classe* C^1 *sur un domaine* $D \subset \mathbb{R}^n$ *si :*

1. $\dot{V}$ *est définies négative.*
2. $\exists k_1, k_2, k_3, p : k_1, k_2, k_3 \neq 0$ *et* $\frac{k_3}{k_2} > 0$ *telle que*

$$k_1 \|x(t)\|^p \leq V(x) \leq k_2 \|x(t)\|^p \text{ et } \dot{V}(x) \leq -k_3 \|x(t)\|^p.$$

Alors, $x_e = 0$ *est exponentiellement stable. Si la condition est verifié globalement, alors* $x_e = 0$ *est globalement exponentiellement stable.*

Démonstration 1.1 *[8, 1] D'après lee hypothèses du théorème nous avons :*

$$k_1\|x(t)\|^p \leq V(x) \leq k_2\|x(t)\|^p$$

Donc

$$-V(x) \geq -k_2\|x(t)\|^p \Longrightarrow -\|x(t)\|^p \leq -\frac{1}{k_2}V(x)$$

Nous avons aussi que

$$\dot{V}(x) \leq -k_3\|x(t)\|^p$$

C'est-à-dire

$$\dot{V}(x) \leq -k_3\|x(t)\|^p$$

Par intégration on obtient

$$V(x) \leq V\left(x_0\right) \exp\left(-\frac{k_3}{k_2}\right) t$$

Finalement, on a

$$\begin{aligned} k_1\|x(t)\|^p &\leq V\left(x_0\right) \exp\left(-\frac{k_3}{k_2}\right) t \\ &\leq k_2\|x(0)\|^p \exp\left(-\frac{k_3}{k_2}\right) t \end{aligned}$$

Alors

$$\|x(t)\| \leq \left(\frac{k_2}{k_1}\right)^{\frac{1}{p}} \|x(0)\| \exp\left(-\frac{k_3}{pk_2}\right) t$$

D'où le résultat.

1.3 Réseaux de neurones récurrents

Dans cette partie, on présente quelques types de réseaux de neurones récurrents,on trouve :

1.3.1 Réseau de neurones de Hopfield

Les réseaux de neurones de Hopfield sont modélisés par l'équation différentielle suivante :

$$x_i'(t) = -c_i x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} g_j\left(x_j(t)\right) + I_i, \quad i = \overline{1..n}$$

où

- $n \geq 2$ est le nombre de neurones dans le réseau ;
- $x_i(t)$ est l'état du i^{me} neurone à l'instant t ;
- c_i est une constante strictement positive ;
- a_{ij} poids de connexion entre le neurone j et le neurone i ;
- $g_j(.)$ sont les fonctions d'activation du système ;
- I_i est l'entrée extérieure du neurone i.

1.3.2 Réseau de neurones de type Hopfield d'ordre élevé

La forme mathématique d'un réseau de neurones de Hopfield d'ordre élevé, est donnée par l'équation :

$$\begin{aligned} x_i'(t) = -c_i x_i(t) &+ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} g_j\left(x_j(t)\right) \\ &+ \sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} b_{ijl} g_j\left(x_j(t)\right) g_l\left(x_l(t)\right) + I_i, \quad i = \overline{1..n} \end{aligned}$$

dans lequel

- $n \geq 2$ est le nombre de neurones dans le réseau ;
- $x_i(t)$ est l'état du i^{me} neurone à l'instant t ;
- c_i est une constante strictement positive ;
- a_{ij} poids de connexions entre le neurone j et le neurone i ;
- b_{ijl} poids du second degré ;
- $g_j(.)$ fonctions d'activation (bornées) ;
- I_i est l'entrée extérieure du neurone i.

1.3.3 Réseaux de neurones BAM (Hopfield / Hopfield d'ordre élevé)

Le principe d'un réseau de neurones BAM est de combiner deux reseaux simples(Hopfield / Hopfield d'ordre élevé) à la fois, par exemple on trouve :

Réseaux de neurones BAM de Hopfield

Ce type combine deux réseaux de neurones Hopfield et il est donné par le systéme d'équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} x_i'(t) = -a_i x_i(t) + \sum_{j=1}^{m} p_{ji} f_j\left(y_j(t)\right) + I_i, i = 1, \ldots, n \\ y_j'(t) = -b_j x_j(t) + \sum_{i=1}^{n} q_{ij} g_i\left(x_i(t)\right) + J_j, j = 1, \ldots, m \end{cases}$$

Où

- $n, m \geq 2$ et $n + m$ nombre de neurones dans le réseau ;
- $x_i(t)$ et $y_j(t)$ l'évolution du neurone i et j à l'instant t ;
- $a_i > 0$ et $b_j > 0$;
- p_{ji} et q_{ij} poids de connexions ;
- $f_j(.)et g_i\ (.)$ sont les fonctions d'activation du système ;
- I_i et J_j sont les entrées externes.

Réseaux de Neurones BAM de Hopfield d'ordre élevé (BAM-HOHNN)

Ce type combine deux réseaux de neurones Hopfield d'ordre élevé et il estdonné par le systéme d'équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} x_i'(t) = -a_i x_i(t) + \sum_{j=1}^{m} p_{ji} f_j\left(y_j(t)\right) + \sum_{j=1}^{m} \widehat{p}_{jil} \sum_{l=1}^{n} f_j\left(y_j(t)\right) f_l\left(y_l(t)\right) + I_i, i = 1, \ldots, n \\ y_j'(t) = -b_j x_j(t) + \sum_{i=1}^{n} q_{ij} g_i\left(x_i(t)\right) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} \widehat{q}_{ijl} g_i\left(x_i(t)\right) g_l\left(x_l(t)\right) + J_j, j = 1, \ldots, m \end{cases}$$

Où

- $n, m \geq 2$ et $n + m$ nombre de neurones dans le réseau ;
- $x_i(t)$ et $y_j(t)$ l'évolution du neurone i et j à l'instant t ;

— $a_i > 0$ et $b_j > 0$;
— p_{ji} et q_{ij} poids de connexions ;
— $f_j(.) et g_i(.)$ sont les fonctions d'activation du système ;
— I_i et J_i sont les entrées externes.

1.4 Équations différentielles à retards

Soit $\tau \geq 0$. On note $\mathcal{C}\left([-\tau, 0], \mathbb{R}_{+}\right)$l'espace de Banach des fonctions continues définies sur $[-\tau, 0]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_{+}$muni de la topologie de la convergence uniforme

$$\|\phi\| = \sup\{\phi(\theta); -\tau \leq \theta \leq 0\}$$

Soit $\phi \in \mathcal{C}\left([-\tau, 0], \mathbb{R}_{+}\right)$et $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée, soit le problème à valeur initiale suivant

$$\begin{cases} y'(t) = f\left(, y(t), y_{t-\tau}\right), t > 0 \\ y(t) = \phi(t), t \in [-\tau, 0] \end{cases} \tag{1.2}$$

Cette dernière (1.2) est une équations différentielles à retard.

1.5 RNNs retardés : différents types de retards

Un réseau de neurones récurrents à retard est modélisé par une équation différentielle dépendant d'un paramètre nommé retard, et on trouve plusieurs formes,par exemple :

Modèle de Hopfield avec retard constant :

Ce type de réseau de neurones est décrit par une équation différentielle avec retard constant, dans le modéle suivant le retardest noté $\tau > 0$

$$\left\{ x_i'(t) = -c_i x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} g_j\left(x_j(t-\tau)\right) + I_i \right.$$

Modèle de Hopfield avec retard variable dans le temps :

Il est décrit par une équation différentielle avec retard variable dans le temps, dans le modéle suivant le retard est noté $\tau(t) > 0$

$$\left\{ x_i'(t) = -c_i x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} g_j\left(x_j(t-\tau(t))\right) + I_i \right.$$

Modèle de Hopfield avec retard proportionnel

Ce type de réseau de neurones est décrit par une équation différentielle avec retard proportionnel, donné comme suit

$$\left\{ x_i'(t) = -c_i x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} g_j\left(x_j(qt)\right) + I_i \right.$$

dans le dernier modéle le retard est noté "qt" avec $0 < q < 1$ terme de retard proportionel

Modèle de Hopfield avec retard distribué continu

Un retard distribué continu est appelé aussi retard de type noyau (intégral).On distingue deux formes :

1. **Modèle de Hopfield avec retard distribué continu (fini)**

   Le modéle de réseau de neurones est donné par l'équation différentielleavec retard distribué continu (fini) suivante :

$$x_i'(t) = -c_i x_i(t) + \sum_{j=1} a_{ij} \int_{t-\tau(t)}^{i} g_j\left(x_j(s)\right) ds + I_i \tag{1.3}$$

2. **Modèle de Hopfield avec retard distribué continu (infini)**

   C'est un retard où l'une des bornes est infini (∞), de plus suivant la composition par la fonction d'activation (g_j), on a :

$$x_i'(t) = -c_i x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \int_{-\infty}^{t} K(t-s) g_j\left(x_j(s)\right) ds + I_i \tag{1.4}$$

$$x_i'(t) = -c_i x_i(t) + \sum_{i=1}^{n} a_{ij} g_j \left(\int_{-\infty}^{t} K(t-s) x_j(s) ds \right) + I_i \tag{1.5}$$

Modèle de Hopfield avec retard

A l'origine ce type de retard est un noyau (comme le retard dans le modèle précédent : modèle de Hopfield avec retard distribué continu fini (1.3), autremment dit, après quelques transformations dans le modèle (1.6), on a (1.7) :

$$x_i'(t) = -c_i x_i(t-\tau(t)) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} g_j\left(x_j(t)\right) + I_i \tag{1.6}$$

On a

$$\begin{aligned} x_i'(t) &= -c_i x_i(t-\tau(t)) + c_i x_i(t) - c_i x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} g_j\left(x_j(t)\right) + I_i \\ &= -c_i x_i(t) + c_i \int_{t-\tau(t)}^{t} x_i'(s) ds + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} g_j\left(x_j(t)\right) + I_i \end{aligned} \tag{1.7}$$

Modèle de Hopfield avec retard mixte

Ce réseau de neurones est composé de deux types de retards : un retard constant ou variable dans le temps et un retard distribué continu (fini ou infini). Comme exemple : un réseau de neurones de Hopfield avec retard mixte est donné par l'équation différentielle suivante :

$$x_i'(t) = -c_i x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} g_j\left(x_j(t-\tau(t))\right) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij} \int_{-\infty}^{t} K(t-s) g_j\left(x_j(s)\right) ds + I_i \tag{1.8}$$

1.6 Réseaux de Neurones récurrents

Nous traitons dans cette partie le problème d'analyse de la stabilité exponentielle globale d'une classe de réseaux de neurones récurrents (RNN) avec des retards mixtes discrets et distribués . Nous prouvons d'abord l'existence et l'unicité du point d'équilibre dans des conditions douces, en supposant ni dérivabilité ni monotonie stricte pour la fonction d'activation. Ensuite , en employant une nouvelle fonctionnelle de Lyapunov - Krasovskii , une approche d'inégalité matricielle linéaire (LMI) est développée pour établir des conditions suffisantes pour que les

RNN soient globalement exponentiellement stables . Par conséquent , la stabilité exponentielle globale des RNN retardés peut être facilement vérifiée en utilisant la boîte à outils numériquement efficace Matlab LMI , et aucun réglage des paramètres n'est requis . Un exemple de simulation est exploité pour montrer l'utilité des conditions de stabilité dérivées basées sur le LMI.

Chapitre 2

Stabilité Exponentielle Globale du Système

Considérons le réseau récurrent suivant avec des retards discrets et distribué

$$\frac{du_i(t)}{dt} = -d_i u_i(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} f_j\left(u_j(t)\right) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij} g_j\left(u_j\left(t-\tau_1\right)\right) + \int_{t-\tau_2}^{t} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} h_j\left(u_j(s)\right) ds + I_i, \quad i = 1, \ldots, n \tag{2.1}$$

où n est le nombre de neurones dans le réseau neuronal, $u_i(t)$ indique l'état du i ème neurone neuronal au temps $t, f_j\left(u_j(t)\right), g_j\left(u_j(t)\right)$ et $h_j\left(u_j(t)\right)$ sont les fonctions d'activation du j ème neurone au temps t. Les constantes a_{ij}, b_{ij} et c_{ij} dénotent, respectivement, les poids de connexion, les poids de connexion discrètement retardés et les poids de connexion distributivement retardés, du j ème neurone sur le i neurone. I_i est la polarisation externe sur le ième neurone, d_i indique la vitesse à laquelle le ième neurone réinitialisera son potentiel à l'état de repos de manière isolée lorsqu'il est déconnecté du réseau et des entrées externes. τ_1 est le retard discrète constante, tandis que τ_2 décrit le retard distribuée. Le réseau de neurones (2.1) peut être réécrit sous la forme matrice-vecteur suivante :

$$\frac{du(t)}{dt} = -Du(t) + AF(u(t)) + BG\left(u\left(t-\tau_1\right)\right) + C\int_{t-\tau_2}^{t} H(u(s))ds + I \tag{2.2}$$

Où

- $u(t) = \left[u_1(t), u_2(t), \cdots, u_n(t)\right]^T$
- $D = \operatorname{diag}\left(d_1, \ldots, d_n\right)$
- $A = \left(a_{ij}\right)_{n\times n}$
- $B = \left(b_{ij}\right)_{n\times n}$
- $C = \left(c_{ij}\right)_{n\times n}$
- $I = \left[I_1, \ldots, I_n\right]^T$
- $F(u(t)) = \left(f_1\left(u_1(t)\right), \ldots, f_n\left(u_n(t)\right)\right)$
- $G\left(u\left(t-\tau_1\right)\right) = \left(g_1\left(u_1\left(t-\tau_1\right)\right), \ldots, g_n\left(u_n\left(t-\tau_1\right)\right)\right)$
- $H(u(s)) = \left(h_1\left(u_1(s)\right), \ldots, h_n\left(u_n(s)\right)\right)$

Hypothèse 2.1 *Pour $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, les fonctions d'activation des neurones dans (2.2) satisfont*

$$l_i^- \leq \frac{f_i\left(s_1\right) - f_i\left(s_2\right)}{s_1 - s_2} \leq l_i^+, \tag{2.3}$$

$$\sigma_i^- \leq \frac{g_i\left(s_1\right) - g_i\left(s_2\right)}{s_1 - s_2} \leq \sigma_i^+, \tag{2.4}$$

$$v_i^- \leq \frac{h_i(s_1) - h_i(s_2)}{s_1 - s_2} \leq v_i^+, \tag{2.5}$$

où $l_i^-, l_i^+, \sigma_i^-, \sigma_i^+, v_i^-, v_i^+$ sont des constantes

Hypothèse 2.2 *Les fonctions d'activation des neurones dans (2.2) sont bornées.*

Remarque 2.1 *Les constantes $l_i^-, l_i^+, \sigma_i^-, \sigma_i^+, v_i^-, v_i^+$ dans Hypothèse 1 peuvent être positifs, négatifs ou nuls. Par conséquent, les fonctions d'activation résultantes pourraient être non monotones et plus générales que les fonctions sigmoïdes habituelles.*

Définition 2.1 (Fonction Sigmoid) *[7] la fonction sigmoïde est définie par :*

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-\lambda x}}$$

Elle est symétrique par rapport au point $(0; 1/2)$: c'est son point d'inflexion, qui vérifie

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} = f''(x) = 0$$

Elle tend vers 0 quand x *tend vers $-\infty$ et vers 1 quand* x *tend vers $+\infty$.*

Théorème 2.1 *[2][Théorème de Point Fixe de Brouwer] Soient $\bar{B}$ la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$, et $f \in \mathcal{C}^0(\bar{B}, \bar{B})$ Alors f admet un point fixe.*

Théorème 2.2 *[2][Théorème du Point Fixe de Schauder] Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace vectoriel normé et $C \subset E$ un convexe compact non vide. Alors toute application continue $f : C \to C$ possède un point fixe.*

Remarque 2.2 *Habituellement, divers théorèmes de point fixe tels que le théorème de point fixe de Brouwer, le théorème de point fixe de Schauder et le principe de cartographie de contraction peuvent être exploités pour prouver l'existence de points d'équilibre des réseaux de neurones. Par exemple, sous l'hypothèse 2, il n'est pas difficile d'assurer l'existence du point d'équilibre du système (2.2) en utilisant le théorème du point fixe de Brouwer. Dans la suite, nous analyserons la stabilité exponentielle globale du point d'équilibre, qui à son tour implique l'unicité du point d'équilibre.*

2.1 Existence et Unicité de point d'équilibre

Définition 2.2 *[14] $x(t) = x^* \in R^n$ est appelé point d'équilibre de (2.1), si le vecteur constant $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)^{\mathrm{T}}$ satisfait*

$$\begin{aligned} d_i x_i^*(t) = & \sum_{j=1}^n a_{ij} f_j\left(x_j^*(t)\right) + \sum_{j=1}^n b_{ij} g_j\left(x_j^*(t - \tau_1)\right) \\ & + \int_{t-\tau_2}^t \sum_{j=1}^n c_{ij} h_j\left(x_j^*(s)\right) ds + I_i, \quad i = 1, \ldots, n. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Afin d'étudier l'existence et l'unicité du point d'équilibre, on réécrit (2.6) comme

$$\dot{X}(t) = G(X(t)) \tag{2.7}$$

dans lequel $X(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))^{\mathrm{T}}$ and

$$G(X(t)) = (\eta_1(t), \ldots, \eta_n(t))^{\mathrm{T}} \tag{2.8}$$

où

$$\begin{aligned}\eta_i(t) = &- d_i x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} f_j\left(x_j(t)\right) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij} g_j\left(x_j\left(t-\tau_1\right)\right) \\ &+ \int_{t-\tau_2}^{t} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} h_j\left(x_j(s)\right) ds + I_i, \quad i = 1, \ldots, n\end{aligned} \tag{2.9}$$

On considère le problème de la valeur initiale associé au système autonome (2.7), dans lequel les fonctions initiales sont données par

$$x_i(t) = \phi_i(t), \quad -\tau^* < t \leq 0, \quad i = 1, \ldots, n, \tau^* = max\{\ \tau_1, \tau_2\} \tag{2.10}$$

où ϕ_i sont supposés être des fonctions bornées et continues sur $[-\tau^*, 0]$. Soit Ω un sous-ensemble ouvert de R^n. Pour tout $\eta \in R^n$, nous définissons $\|\eta\| = \sum_{j=1}^{n} |\eta_j|$.

Lemme 2.1 *[14] Soit $G : \Omega \to R^n$ continue et vérifie la condition suivante : correspondant à chaque point $\eta \in \Omega$ et son voisinage U, il existe une constante $k > 0$, et fonctions h_j et $\Psi_l (j, l = 1, \ldots, n)$, telles que*

$$\begin{aligned}&\|G(\xi) - G(\eta)\| \\ &\quad \leq k\|\xi - \eta\| + k \sum_{l=1}^{n} \left|\Psi_l\left(h_j(\xi)\right) - \Psi_l\left(h_j(\eta)\right)\right|\end{aligned}$$

sur U, où chaque $h_j : U \to R$ est une fonction continûment dérivable dans η vérifiant la relation

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial h_j(\eta)}{\partial \eta_i} G_i(\eta) \neq 0 \qquad on\ U$$

et chaque $\Psi_l : R \to R$ est continu et de variation bornée sur des sous-intervalles bornés. Alors, il existe une solution unique pour le problème de la valeur initiale Eqs. (2.7) -(2.9) sur tout intervalle contenant les fonctions initiales(2.9).

Théorème 2.3 *[14] Si les conditions du lemme (2.1) sont vraies pour les fonctions $g_j (j = 1, \ldots, n)$, alors le système (2.6) a une solution unique, donnant un point d'équilibre unique pour le système (2.6).*

Preuve 2.1 *[14] D'après le lemme 2.1, les systèmes (2.7) - (2.9) admettent une unique solution $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))^{\mathrm{T}}$. Maintenant, en soustrayant le système (2.6) de l'Eq. (2.6), on a*

$$\begin{aligned}\dot{x}_i(t) = &- d_i(x_i(t) - x_i^*(t)) \\ &+ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(f_j(x_j(t)) - f_j(x_j^*(t))) \\ &+ \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(g_j(x_j(t-\tau_1)) - g_j(x_j^*(t-\tau_1))) \\ &+ \int_{t-\tau_2}^{t} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}(h_j(x_j(s)) - h_j(x_j^*(s)))ds + I_i, \quad i = 1, \ldots, n\end{aligned} \tag{2.11}$$

pour $i = 1, \ldots, n$. *Soit* $u_i(t) = x_i(t) - x_i^*, i = 1, \ldots, n$ *alors le système (2.11) devient*

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_i(t) = &- d_i(u_i(t)) \\
&+ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(f_j(u_j(t) + x_j^*) - f_j(x_j^*)) \\
&+ \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(g_j(u_j(t - \tau_1) + x_j^*)) - g_j(x_j^*))) \\
&+ \int_{t-\tau_2}^{t} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}(h_j(u_j(s) + x_j^*) - h_j(x_j^*))ds + I_i, \quad i = 1, \ldots, n
\end{aligned}
\tag{2.12}
$$

Choisissez les fonctions initiales comme suit

$$u_i(t) = 0, \quad -\tau < t \leq 0, i = 1, \ldots, n \tag{2.13}$$

D'après le lemme 2.1, les systèmes (2.11)-(2.13) admettent une unique solution. Évidemment, la solution triviale est la seule solution des équations. (2.12) et (2.13), ce qui implique

$$u_i(t) \equiv 0, \quad t > 0, i = 1, \ldots, n$$

Ainsi. $x_i(t) = x_i^*(i = 1, \ldots, n)$ *est l'unique solution qui satisfait l'Eq. (2.6) et garantit l'existence d'un point d'équilibre unique pour le système (2.1)*

.

Lemme 2.2 *Soit* X, Y *des vecteurs colonnes réels quelconques de taille* n, *et soit* P *une matrice définie positive* $n \times n$. *Alors, l'inégalité matricielle suivante est vraie :*

$$2X^T PY \leq X^T PX + Y^T PY$$

Preuve 2.2 *la preuve découle de l'inégalité matricielle :*

$$(P^{\frac{1}{2}}X - P^{\frac{1}{2}}Y)^T(P^{\frac{1}{2}}X - P^{\frac{1}{2}}Y) \geq 0$$

alors

$$(P^{\frac{1}{2}}(X - Y))^T(P^{\frac{1}{2}}(X - Y)) \geq 0$$
$$(X - Y)^T P^{\frac{1}{2}} P^{\frac{1}{2}}(X - Y) \geq 0$$

d'où

$$(X - Y)^T P(X - Y) \geq 0$$

donc

$$P(X^T - Y^T)(X - Y) \geq 0$$

ce qui donne

$$(X^T P - Y^T P)(X - Y) \geq 0$$

ainsi

$$X^T PX - X^T PY - Y^T PX + Y^T PY \geq 0$$

Finalement on a :

$$X^T PX - X^T PY - X^T PY + Y^T PY \geq 0$$
$$X^T PX + Y^T PY - 2X^T PY \geq 0$$

Donc

$$X^T PX + Y^T PY \geq 2X^T PY$$

Définition 2.3 (Complément de Shur) *[5] Étant donné une matrice M par blocs de la forme*

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

si D est inversible, alors la matrice $A - BD^{-1}C$ est appelée le complément de Schur de D dans M. Si A est inversible, alors la matrice $D - CA^{-1}B$ est appelée complément de Schur de A dans M.

Lemme 2.3 *[6] Pour toute matrice symétrique définie positive $M > 0$, tout scalaire $\gamma > 0$, et toute fonction vectorielle $\omega : [0, \gamma] \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que les intégrations concernées soient bien définis, l'inégalité suivante est vraie :*

$$\left(\int_0^\gamma \omega(s)ds\right)^T M \left(\int_0^\gamma \omega(s)ds\right) \leq \gamma \left(\int_0^\gamma \omega^T(s)M\omega(s)ds\right) \tag{2.14}$$

Preuve 2.3 *En utilisant le complément de Shur, on a*

$$\begin{pmatrix} \omega^T(s)M\omega(s) & \omega^T(s) \\ \omega(s) & M^{-1} \end{pmatrix} \geq 0$$

Pour tout $0 \leq s \leq \gamma$, L'intégration de l'inégalité ci-dessus de 0 à γ donne

$$\begin{pmatrix} \int_0^\gamma \omega^T(s)M\omega(s)ds & \int_0^\gamma \omega^T(s)ds \\ \int_0^\gamma \omega(s)ds & \gamma M^{-1} \end{pmatrix} \geq 0$$

Où :

$$\gamma M^{-1} \int_0^\gamma \omega^T(s)M\omega(s)ds - (\int_0^\gamma \omega(s)ds)(\int_0^\gamma \omega^T(s)ds) \geq 0$$

$$\gamma M^{-1} \int_0^\gamma \omega^T(s)M\omega(s)ds \geq (\int_0^\gamma \omega(s)ds)(\int_0^\gamma \omega^T(s)ds)$$

$$\gamma \int_0^\gamma \omega^T(s)M\omega(s)ds \geq (\int_0^\gamma \omega(s)ds)M(\int_0^\gamma \omega^T(s)ds)$$

finallement :

$$\left(\int_0^\gamma \omega(s)ds\right)^T M \left(\int_0^\gamma \omega(s)ds\right) \leq \gamma \left(\int_0^\gamma \omega^T(s)M\omega(s)ds\right) \tag{2.15}$$

Pour des raisons de commodité de présentation, dans ce qui suit, nous notons

$$\begin{aligned}
&L_1 = \operatorname{diag}\left(l_1^+ l_1^-, \ldots, l_n^+ l_n^-\right), \quad L_2 = \operatorname{diag}\left(\frac{l_1^+ + l_1^-}{2}, \ldots, \frac{l_n^+ + l_n^-}{2}\right), \\
&\Sigma_1 = \operatorname{diag}\left(\sigma_1^+ \sigma_1^-, \ldots, \sigma_n^+ \sigma_n^-\right), \quad \Sigma_2 = \operatorname{diag}\left(\frac{\sigma_1^+ + \sigma_1^-}{2}, \ldots, \frac{\sigma_n^+ + \sigma_n^-}{2}\right), \\
&\Upsilon_1 = \operatorname{diag}\left(v_1^+ v_1^-, \ldots, v_n^+ v_n^-\right), \quad \Upsilon_2 = \operatorname{diag}\left(\frac{v_1^+ + v_1^-}{2}, \ldots, \frac{v_n^+ + v_n^-}{2}\right).
\end{aligned}$$

Le résultat principale de ce chapitre est donné dans le théorème suivant.

Théorème 2.4 *Soit u^* le point d'équilibre du système (2.2). Supposons que τ_1 est le délai discret τ_2 décrit le délai distribué, et ϵ_0 $(0 < \epsilon_0 < 1)$ est une constante fixe. Alors, sous l'hypothèse*

1, le point d'équilibre est globalement exponentiellement stable s'il existe trois matrices symétriques définies positives P_1 P_2, P_3, trois matrices diagonales $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) > 0$, $\Gamma = \operatorname{diag}(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) > 0$ et $\Delta = \operatorname{diag}(\delta_1, \ldots, \delta_n) > 0$ de sorte que le LMI suivant soit satisfait :

$$\Psi = \begin{bmatrix} \Pi & P_1 A + \Lambda L_2 & \Gamma \Sigma_2 & P_1 B & \Delta \Upsilon_2 & P_1 C \\ A^T P_1 + \Lambda L_2 & -\Lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Gamma \Sigma_2 & 0 & (1+\epsilon_0 \tau_1) P_2 - \Gamma & 0 & 0 & 0 \\ B^T P_1 & 0 & 0 & -P_2 & 0 & 0 \\ \Delta \Upsilon_2 & 0 & 0 & 0 & \tau_2 P_3 - \Delta & 0 \\ C^T P_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1-\epsilon_0}{\tau_2} P_3 \end{bmatrix} < 0 \quad (2.16)$$

Où

$$\Pi = -P_1 D - D P_1 - \Lambda L_1 - \Gamma \Sigma_1 - \Delta \Upsilon_1, \quad (2.17)$$

et toutes les matrices ici sont constantes.

2.2 Démonstration de Théorème

Démonstration 2.1 *Pour simplifier l'analyse de stabilité exponentielle de (2.2), nous déplaçons le point d'équilibre u^* de (2.2) vers l'origine en posant $x(t) = u(t) - u^*$, puis le système (2.2) peut être transformé en :*

$$\frac{dx(t)}{dt} = -Dx(t) + A\hat{F}(x(t)) + B\hat{G}(x(t-\tau_1)) + C \int_{t-\tau_2}^{t} \hat{H}(x(s)) ds, \quad (2.18)$$

où $x(t) = [x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)]^T$ est le vecteur d'état du système transformé, et les fonctions d'activation des neurones transformés sont :

$$\hat{F}(x(t)) := \left(\hat{f}_1(x_1(t)), \ldots, \hat{f}_n(x_n(t))\right) = \hat{F}(u(t)) - \hat{F}(u^*), \quad (2.19)$$

$$\hat{G}(x(t)) := (\hat{g}_1(x_1(t)), \ldots, \hat{g}_n(x_n(t))) = \hat{G}(u(t)) - \hat{G}(u^*), \quad (2.20)$$

$$\hat{H}(x(t)) := \left(\hat{h}_1(x_1(t)), \ldots, \hat{h}_n(x_n(t))\right) = \hat{H}(u(t)) - \hat{H}(u^*). \quad (2.21)$$

D'après (2.3)-(2.5), on peut facilement vérifier que les fonctions d'activation neuronale transformées satisfont

$$l_i^- \leq \frac{\hat{f}_i(s_1) - \hat{f}_i(s_2)}{s_1 - s_2} \leq l_i^+, \quad (i = 1, \ldots, n) \quad (2.22)$$

$$\sigma_i^- \leq \frac{\hat{g}_i(s_1) - \hat{g}_i(s_2)}{s_1 - s_2} \leq \sigma_i^+, \quad (i = 1, \ldots, n) \quad (2.23)$$

$$v_i^- \leq \frac{\hat{h}_i(s_1) - \hat{h}_i(s_2)}{s_1 - s_2} \leq v_i^+. \quad (i = 1, \ldots, n) \quad (2.24)$$

Remarque 2.3 *Nous allons utiliser la fonction de Lyapunov-Krasovskii qui est une fonction mathématique utilisée en théorie de la commande pour analyser la stabilité des systèmes dynamiques. Elle est nommée d'après les mathématiciens russes Aleksandr Lyapunov et Nikolai Krasovskii.*

La fonction de Lyapunov-Krasovskii est une fonction positive définie sur un domaine donné, qui mesure l'énergie ou la distance entre l'état actuel du système et son état d'équilibre. Elle permet d'évaluer la stabilité asymptotique du système, c'est-à-dire sa capacité à revenir à son état d'équilibre après une perturbation.

La fonction de Lyapunov-Krasovskii est souvent utilisée dans les systèmes à retard, où les retards dans les signaux de commande peuvent affecter la stabilité du système. Elle permet également d'analyser les systèmes non linéaires et incertains.

Afin d'établir les conditions de stabilité, nous introduisons la fonction de Lyapunov-Krasovskii suivante :

$$\Xi(t) := e^{2kt}V(t) := e^{2kt}\sum_{i=1}^{4} V_i(t) \tag{2.25}$$

Où

$$V_1(t) = x^T(t)P_1x(t), \tag{2.26}$$

$$V_2(t) = \int_{t-\tau_1}^{t} \hat{G}^T(x(s))P_2\hat{G}(x(s))ds, \tag{2.27}$$

$$V_3(t) = \epsilon_0 \int_0^{\tau_1}\int_{t-s}^{t} \hat{G}^T(x(\eta))P_2\hat{G}(x(\eta))d\eta ds, \tag{2.28}$$

$$V_4(t) = \int_0^{\tau_2}\int_{t-s}^{t} \hat{H}^T(x(\eta))P_3\hat{H}(x(\eta))d\eta ds. \tag{2.29}$$

Pour faciliter l'analyse de stabilité exponentielle, nous calculons d'abord la dérivée temporelle de $V_i(t)$ le long d'une trajectoire donnée du système (2.18) comme suit :

$$\dot{V}_1(t) = 2x^T(t)P_1\left(-Dx(t) + A\hat{F}(x(t)) + B\hat{G}\left(x\left(t-\tau_1\right)\right) + C\int_{t-\tau_2}^{t}\hat{H}(x(s))ds\right) \tag{2.30}$$

$$\dot{V}_2(t) = \hat{G}^T(x(t))P_2\hat{G}(x(t)) - \hat{G}^T\left(x\left(t-\tau_1\right)\right)P_2\hat{G}\left(x\left(t-\tau_1\right)\right) \tag{2.31}$$

$$\dot{V}_3(t) = \epsilon_0\tau_1\hat{G}^T(x(t))P_2\hat{G}(x(t)) - \epsilon_0\int_{t-\tau_1}^{t}\hat{G}^T(x(s))P_2\hat{G}(x(s))ds \tag{2.32}$$

$$\begin{aligned}\dot{V}_4(t) =& \tau_2\hat{H}^T(x(t))P_3\hat{H}(x(t)) - \int_{t-\tau_2}^{t}\hat{H}^T(x(s))P_3\hat{H}(x(s))ds\\ =& \tau_2\hat{H}^T(x(t))P_3\hat{H}(x(t)) - (1-\epsilon_0)\int_{t-\tau_2}^{t}\hat{H}^T(x(s))P_3\hat{H}(x(s))ds\\ &- \epsilon_0\int_{t-\tau_2}^{t}\hat{H}^T(x(s))P_3\hat{H}(x(s))ds\\ \le& \tau_2\hat{H}^T(x(t))P_3\hat{H}(x(t)) - \frac{1-\epsilon_0}{\tau_2}\left(\int_{t-\tau_2}^{t}\hat{H}(x(s))ds\right)^T P_3\left(\int_{t-\tau_2}^{t}\hat{H}(x(s))ds\right)\\ &- \epsilon_0\int_{t-\tau_2}^{t}\hat{H}^T(x(s))P_3\hat{H}(x(s))ds.\end{aligned} \tag{2.33}$$

Notez que le lemme(2.3) a été utilisé pour trouver (2.33). Avec le lemme(2.2), les relations (2.30)-(2.33) conduisent à :

$$\begin{aligned}\dot{V}(t) =& \dot{V}_1(t) + \dot{V}_2(t) + \dot{V}_3(t) + \dot{V}_4(t)\\ \le& 2x^T(t)P_1\left(-Dx(t) + A\hat{F}(x(t)) + B\hat{G}\left(x\left(t-\tau_1\right)\right) + C\int_{t-\tau_2}^{t}\hat{H}(x(s))ds\right)\\ &+ \left(1+\epsilon_0\tau_1\right)\hat{G}^T(x(t))P_2\hat{G}(x(t)) - \hat{G}^T\left(x\left(t-\tau_1\right)\right)P_2\hat{G}\left(x\left(t-\tau_1\right)\right)\\ &+ \tau_2\hat{H}^T(x(t))P_3\hat{H}(x(t)) - \frac{1-\epsilon_0}{\tau_2}\left(\int_{t-\tau_2}^{t}\hat{H}(x(s))ds\right)^T P_3\left(\int_{t-\tau_2}^{t}\hat{H}(x(s))ds\right)\\ &- \epsilon_0\int_{t-\tau_1}^{t}\hat{G}^T(x(s))P_2\hat{G}(x(s))ds - \epsilon_0\int_{t-\tau_2}^{t}\hat{H}^T(x(s))P_3\hat{H}(x(s))ds\\ =& \eta^T(t)\Psi_1\eta(t) - \epsilon_0\int_{t-\tau_1}^{t}\hat{G}^T(x(s))P_2\hat{G}(x(s))ds - \epsilon_0\int_{t-\tau_2}^{t}\hat{H}^T(x(s))P_3\hat{H}(x(s))ds,\end{aligned} \tag{2.34}$$

Où

$$\eta(t)=\left[\begin{array}{llllll} x^T(t) & \hat{F}^T(x(t)) & \hat{G}^T(x(t)) & \hat{G}^T\left(x\left(t-\tau_1\right)\right) & \hat{H}^T(x(t)) & \int_{t-\tau_2}^t \hat{H}^T(x(s))ds \end{array}\right]^T, \quad (2.35)$$

$$\Psi_1=\left[\begin{array}{cccccc} -P_1D-DP_1 & P_1A & 0 & P_1B & 0 & P_1C \\ A^TP_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(1+\epsilon_0\tau_1\right)P_2 & 0 & 0 & 0 \\ B^TP_1 & 0 & 0 & -P_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tau_2P_3 & 0 \\ C^TP_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1-\epsilon_0}{\tau_2}P_3 \end{array}\right]. \quad (2.36)$$

par(2.22)-(2.24) nous avons

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\hat{f}_i\left(x_i(t)\right)}{x_i(t)}-l_i^+\right)\left(\frac{\hat{f}_i\left(x_i(t)\right)}{x_i(t)}-l_i^-\right)\leq 0, \quad i=1,\ldots,n, \\ &\left(\frac{\hat{g}_i(x(t))}{x_i(t)}-\sigma_i^+\right)\left(\frac{\hat{g}_i(x(t))}{x_i(t)}-\sigma_i^-\right)\leq 0, \quad i=1,\ldots,n, \\ &\left(\frac{\hat{h}_i(x(t))}{x_i(t)}-v_i^+\right)\left(\frac{\hat{h}_i(x(t))}{x_i(t)}-v_i^-\right)\leq 0. \quad i=1,\ldots,n, \end{aligned}$$

On obtient donc

$$\left(\hat{f}_i\left(x_i(t)\right)-l_i^+x_i(t)\right)\left(\hat{f}_i\left(x_i(t)\right)-l_i^-x_i(t)\right)\leq 0, i=1,\ldots,n, \quad (2.37)$$

$$\left(\hat{g}_i(x(t))-\sigma_i^+x_i(t)\right)\left(\hat{g}_i(x(t))-\sigma_i^-x_i(t)\right)\leq 0, i=1,\ldots,n, \quad (2.38)$$

$$\left(\hat{h}_i(x(t))-v_i^+x_i(t)\right)\left(\hat{h}_i(x(t))-v_i^-x_i(t)\right)\leq 0.i=1,\ldots,n, \quad (2.39)$$

qui sont équivalents à

$$\left[\begin{array}{c} x(t) \\ \hat{F}(x(t)) \end{array}\right]^T\left[\begin{array}{cc} l_i^+l_i^-e_ie_i^T & -\frac{l_i^++l_i^-}{2}e_ie_i^T \\ -\frac{l_i^++l_i^-}{2}e_ie_i^T & e_ie_i^T \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} x(t) \\ \hat{F}(x(t)) \end{array}\right]\leq 0, \quad i=1,\ldots,n, \quad (2.40)$$

$$\left[\begin{array}{c} x(t) \\ \hat{G}(x(t)) \end{array}\right]^T\left[\begin{array}{cc} \sigma_i^+\sigma_i^-e_ie_i^T & -\frac{\sigma_i^++\sigma_i^-}{2}e_ie_i^T \\ -\frac{\sigma_i^++\sigma_i^-}{2}e_ie_i^T & e_ie_i^T \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} x(t) \\ \hat{G}(x(t)) \end{array}\right]\leq 0, \quad i=1,\ldots,n, \quad (2.41)$$

$$\left[\begin{array}{c} x(t) \\ \hat{H}(x(t)) \end{array}\right]^T\left[\begin{array}{cc} v_i^+v_i^-e_ie_i^T & -\frac{v_i^++v_i^-}{2}e_ie_i^T \\ -\frac{v_i^++v_i^-}{2}e_ie_i^T & e_ie_i^T \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} x(t) \\ \hat{H}(x(t)) \end{array}\right]\leq 0, \quad i=1,\ldots,n, \quad (2.42)$$

où e_i désigne le vecteur colonne unitaire ayant " 1 " élément sur sa i ème ligne et des zéros ailleurs

En conséquence, nous avons

$$
\begin{aligned}
&\eta^T(t)\Psi_1\eta(t) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{F}(x(t)) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} l_i^+ l_i^- e_i e_i^T & -\frac{l_i^+ + l_i^-}{2} e_i e_i^T \\ -\frac{l_i^+ + l_i^-}{2} e_i e_i^T & e_i e_i^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{F}(x(t)) \end{bmatrix} \\
&- \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{G}(x(t)) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \sigma_i^+ \sigma_i^- e_i e_i^T & -\frac{\sigma_i^+ + \sigma_i^-}{2} e_i e_i^T \\ -\frac{\sigma_i^+ + \sigma_i^-}{2} e_i e_i^T & e_i e_i^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{G}(x(t)) \end{bmatrix} \\
&- \sum_{i=1}^{n} \delta_i \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{H}(x(t)) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} v_i^+ v_i^- e_i e_i^T & -\frac{v_i^+ + v_i^-}{2} e_i e_i^T \\ -\frac{v_i^+ + v_i^-}{2} e_i e_i^T & e_i e_i^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{H}(x(t)) \end{bmatrix} \\
&= \eta^T(t)\Psi_1\eta(t) + \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{F}(x(t)) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -\Lambda L_1 & \Lambda L_2 \\ \Lambda L_2 & -\Lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{F}(x(t)) \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{G}(x(t)) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -\Gamma\Sigma_1 & \Gamma\Sigma_2 \\ \Gamma\Sigma_2 & -\Gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{G}(x(t)) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{H}(x(t)) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -\Delta\Upsilon_1 & \Delta\Upsilon_2 \\ \Delta\Upsilon_2 & -\Delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{H}(x(t)) \end{bmatrix} \\
&= \eta^T(t) \begin{bmatrix} \Pi & P_1A + \Lambda L_2 & \Gamma\Sigma_2 & P_1B & \Delta\Upsilon_2 & P_1C \\ A^TP_1 + \Lambda L_2 & -\Lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Gamma\Sigma_2 & 0 & (1+\epsilon_0\tau_1)P_2 - \Gamma & 0 & 0 & 0 \\ B^TP_1 & 0 & 0 & -P_2 & 0 & 0 \\ \Delta\Upsilon_2 & 0 & 0 & 0 & \tau_2P_3 - \Delta & 0 \\ C^TP_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1-\epsilon_0}{\tau_2}P_3 \end{bmatrix} \eta(t) \\
&= \eta^T(t)\Psi\eta(t) \\
&\le \lambda_{\max}(\Psi)|\eta(t)|^2,
\end{aligned}
\tag{2.43}
$$

où $\lambda_{\max}(\Psi) < 0$ *par (2.16), et* Ψ, Π *et* Ψ_1 *sont définis dans (2.16), (2.17) et (2.36), respectivement. Il résulte de (2.40)-(2.43) que*

$$
\eta^T(t)\Psi_1\eta(t) \le \eta^T(t)\Psi\eta(t) \le \lambda_{\max}(\Psi)|\eta(t)|^2 \tag{2.44}
$$

Par conséquent, à partir de (2.33) et (2.44), nous obtenons

$$
\begin{aligned}
\dot{V}(t) &\le \lambda_{\max}(\Psi)|\eta(t)|^2 - \epsilon_0 \int_{t-\tau_1}^{t} \hat{G}^T(x(s))P_2\hat{G}(x(s))ds - \epsilon_0 \int_{t-\tau_2}^{t} \hat{H}^T(x(s))P_3\hat{H}(x(s))ds \\
&\le \lambda_{\max}(\Psi)|x(t)|^2 - \epsilon_0 \int_{t-\tau_1}^{t} \hat{G}^T(x(s))P_2\hat{G}(x(s))ds - \epsilon_0 \int_{t-\tau_2}^{t} \hat{H}^T(x(s))P_3\hat{H}(x(s))ds
\end{aligned}
\tag{2.45}
$$

Aussi, à partir des définitions de $V_i(t)$*, il n'est pas difficile d'obtenir les inégalités suivantes*

$$
V_1(t) \le \lambda_{\max}(P_1)\,|x(t)|^2, \tag{2.46}
$$

$$
\begin{aligned}
V_3(t) &\le \epsilon_0 \int_0^{\tau_1} \int_{t-\tau_1}^{t} \hat{G}^T(x(\eta))P_2\hat{G}(x(\eta))d\eta ds \\
&= \epsilon_0\tau_1 \int_{t-\tau_1}^{t} \hat{G}^T(x(s))P_2\hat{G}(x(s))ds,
\end{aligned}
\tag{2.47}
$$

$$
\begin{aligned}
V_4(t) &\le \int_0^{\tau_2} \int_{t-\tau_2}^{t} \hat{H}^T(x(\eta))P_3\hat{H}(x(\eta))d\eta ds \\
&= \tau_2 \int_{t-\tau_2}^{t} \hat{H}^T(x(s))P_3\hat{H}(x(s))ds.
\end{aligned}
\tag{2.48}
$$

Nous sommes maintenant prêts à traiter la stabilité exponentielle de (2.2). Considérons la fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii $\Xi(t)$ dans (2.25), où k est une constante à déterminer. En utilisant (2.25), (2.27) et (2.45)-(2.48), nous avons

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Xi(t) =& 2k\mathrm{e}^{2kt}V(t)+\mathrm{e}^{2kt}\dot{V}(t)\\
\leq& 2k\mathrm{e}^{2kt}\left[\lambda_{\max}\left(P_1\right)|x(t)|^2+\left(1+\epsilon_0\tau_1\right)\int_{t-\tau_1}^{t}\hat{G}^T(x(s))P_2\hat{G}(x(s))ds\right.\\
&\left.+\tau_2\int_{t-\tau_2}^{t}\hat{H}^T(x(s))P_3\hat{H}(x(s))ds\right]+\mathrm{e}^{2kt}\left[\lambda_{\max}(\Psi)|x(t)|^2\right.\\
&\left.-\epsilon_0\int_{t-\tau_1}^{t}\hat{G}^T(x(s))P_2\hat{G}(x(s))ds-\epsilon_0\int_{t-\tau_2}^{t}\hat{H}^T(x(s))P_3\hat{H}(x(s))ds\right]\\
\leq& \mathrm{e}^{2kt}\left[\left(2k\lambda_{\max}\left(P_1\right)+\lambda_{\max}(\Psi)\right)|x(t)|^2+\left(2k\left(1+\epsilon_0\tau_1\right)-\epsilon_0\right)\int_{t-\tau_1}^{t}\hat{G}^T(x(s))P_2\hat{G}(x(s))ds\right.\\
&\left.+\left(2k\tau_2-\epsilon_0\right)\int_{t-\tau_2}^{t}\hat{H}^T(x(s))P_3\hat{H}(x(s))ds\right].
\end{aligned}\tag{2.49}$$

Posons

$$k_0=\min\left\{-\frac{\lambda_{\max}(\Psi)}{2\lambda_{\max}\left(P_1\right)},\frac{\epsilon_0}{2\left(1+\epsilon_0\tau_1\right)},\frac{\epsilon_0}{2\tau_2}\right\}.$$

A partir de maintenant, nous prenons k comme une constante satisfaisante

$$k\leq k_0;$$

puis déduire de (2.49) que

$$\frac{d}{dt}\left(\mathrm{e}^{2kt}V(t)\right)\leq 0$$

ce qui, avec (2.27) et (2.45)-(2.48), implique que

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{2kt}V(t) \leq& V(0)\\
=& V_1(0)+V_2(0)+V_3(0)+V_4(0)\\
\leq& \lambda_{\max}\left(P_1\right)|x(0)|^2+\left(1+\epsilon_0\tau_1\right)\int_{-\tau_1}^{0}\hat{G}^T(x(s))P_2\hat{G}(x(s))ds\\
&+\tau_2\int_{-\tau_2}^{0}\hat{H}^T(x(s))P_3\hat{H}(x(s))ds\\
\leq& \lambda_{\max}\left(P_1\right)|x(0)|^2+\left(1+\epsilon_0\tau_1\right)\lambda_{\max}\left(P_2\right)\int_{-\tau_1}^{0}|\hat{G}(x(s))|^2ds\\
&+\tau_2\lambda_{\max}\left(P_3\right)\int_{-\tau_2}^{0}|\hat{H}(x(s))|^2ds
\end{aligned}\tag{2.50}$$

soit

$$\sigma=\max_{1\leq i\leq n}\left\{\left|\sigma_i^-\right|,\left|\sigma_i^+\right|\right\},v=\max_{1\leq i\leq n}\left\{\left|v_i^-\right|,\left|v_i^+\right|\right\}$$
$$\mu_0=\lambda_{\max}\left(P_1\right)+\left(1+\epsilon_0\tau_1\right)\tau_1\sigma^2\lambda_{\max}\left(P_2\right)+\tau_2^2v^2\lambda_{\max}\left(P_3\right)$$

Alors, il ressort de (2.50) que

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{2kt}V(t)\leq& \lambda_{\max}\left(P_1\right)|x(0)|^2+\left(1+\epsilon_0\tau_1\right)\tau_1\sigma^2\lambda_{\max}\left(P_2\right)\sup_{-\tau_1\leq s\leq 0}|x(s)|^2+\tau_2^2v^2\lambda_{\max}\left(P_3\right)\sup_{-\tau_2\leq s\leq 0}|x(s)|^2\\
\leq& \left(\lambda_{\max}\left(P_1\right)+\left(1+\epsilon_0\tau_1\right)\tau_1\sigma^2\lambda_{\max}\left(P_2\right)+\tau_2^2v^2\lambda_{\max}\left(P_3\right)\right)\sup_{-\tau^*\leq s\leq 0}|x(s)|^2\\
=& \mu_0\sup_{-\tau^*\leq s\leq 0}|x(s)|^2\\
=& \mu_0\sup_{-\tau^*\leq s\leq 0}\left|\phi(s)-u^*\right|^2,
\end{aligned}$$

et donc

$$V(t) \leq \mu_0 \mathrm{e}^{-2kt} \left|\phi(s) - u^*\right|^2$$

Remarquont que $V(t) \geq V_1(t) \geq \lambda_{\max}(P_1)\,|x(t)|^2$, *on obtient*

$$|x(t)|^2 \leq \frac{\mu_0}{\lambda_{\max}(P_1)} \mathrm{e}^{-2kt} \sup_{-\tau^* \leq s \leq 0} \left|\phi(s) - u^*\right|^2 . \tag{2.51}$$

Soit $\mu = \sqrt{\frac{\mu_0}{\lambda_{\max}(P_1)}}$, *on peut réécrire (2.51) comme*

$$|x(t)| \leq \mu \mathrm{e}^{-kt} \sup_{-\tau^* \leq s \leq 0} \left|\phi(s) - u^*\right|$$

c'est à dire

$$\left|u(t) - u^*\right| \leq \mu \mathrm{e}^{-kt} \sup_{-\tau^* \leq s \leq 0} \left|\phi(s) - u^*\right| .$$

Ainsi, le point d'équilibre u^* de (2.2) est globalement exponentiellement stable. La démonstration de ce théorème est maintenant terminée.

Chapitre 3

Stabilité Asymptotique Globale du Système

Dans ce chapitre on démontre que le problème (2.2) est globalement asymptotiquement stable.

Théorème 3.1 *Soit u^* le point d'équilibre du système (2.2). Supposons que τ_1 est le délai discret et que τ_2 décrit le délai distribué. Alors, sous l'hypothèse 1, le point d'équilibre est globalement asymptotiquement stable s'il existe trois matrices symétriques définies positives P_1, P_2, P_3, trois matrices diagonales $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) > 0, \Gamma = \operatorname{diag}(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) > 0$ et $\Delta = \operatorname{diag}(\delta_1, \ldots, \delta_n) > 0$ de sorte que le LMI suivant soit satisfait :*

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Pi & P_1 A + \Lambda L_2 & \Gamma\Sigma_2 & P_1 B & \Delta\Upsilon_2 & P_1 C \\ A^T P_1 + \Lambda L_2 & -\Lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Gamma\Sigma_2 & 0 & P_2 - \Gamma & 0 & 0 & 0 \\ B^T P_1 & 0 & 0 & -P_2 & 0 & 0 \\ \Delta\Upsilon_2 & 0 & 0 & 0 & \tau_2 P_3 - \Delta & 0 \\ C^T P_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\tau_2} P_3 \end{bmatrix} < 0, \tag{3.1}$$

Où

$$\Pi = -P_1 D - D P_1 - \Lambda L_1 - \Gamma\Sigma_1 - \Delta\Upsilon_1 \tag{3.2}$$

Démonstration 3.1 *Comme dans la preuve du théorème 1, on déplace le point d'équilibre u^* de (2.2) vers l'origine en posant $x(t) = u(t) - u^*$, puis on transforme le système (2.2) dans le système (2.18). Construisons la fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii suivante :*

$$\bar{V}(t) = x^T(t) P_1 x(t) + \int_{t-\tau_1}^{t} \hat{G}^T(x(s)) P_2 \hat{G}(x(s)) ds + \int_0^{\tau_2} \int_{t-s}^{t} \hat{H}^T(x(\eta)) P_3 \hat{H}(x(\eta)) d\eta ds. \tag{3.3}$$

Ensuite, en suivant un processus similaire dans le calcul de $\dot{V}(t)$ (de (2.18) à (2.24)), nous pouvons avoir

$$\Xi(t) := e^{2kt} \bar{V}(t) := e^{2kt} \sum_{i=1}^{4} \bar{V}_i(t) \tag{3.4}$$

Où

$$\begin{aligned} \bar{V}_1(t) &= x^T(t) P_1 x(t), \\ \bar{V}_2(t) &= \int_{t-\tau_1}^{t} \hat{G}^T(x(s)) P_2 \hat{G}(x(s)) ds, \\ \bar{V}_3(t) &= 0 \\ \bar{V}_4(t) &= \int_0^{\tau_2} \int_{t-s}^{t} \hat{H}^T(x(\eta)) P_3 \hat{H}(x(\eta)) d\eta ds. \end{aligned} \tag{3.5}$$

nous calculons d'abord la dérivée temporelle de $\bar{V}_i(t)$ le long d'une trajectoire donnée du système (2.11) comme suit :

$$\dot{\bar{V}}_1(t) = 2x^T(t)P_1\left(-Dx(t) + A\hat{F}(x(t)) + B\hat{G}\left(x\left(t-\tau_1\right)\right) + C\int_{t-\tau_2}^{t}\hat{H}(x(s))ds\right) \tag{3.6}$$

$$\dot{\bar{V}}_2(t) = \hat{G}^T(x(t))P_2\hat{G}(x(t)) - \hat{G}^T\left(x\left(t-\tau_1\right)\right)P_2\hat{G}\left(x\left(t-\tau_1\right)\right) \tag{3.7}$$

$$\dot{\bar{V}}_3(t) = 0 \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\bar{V}}_4(t) =&\tau_2\hat{H}^T(x(t))P_3\hat{H}(x(t)) - \int_{t-\tau_2}^{t}\hat{H}^T(x(s))P_3\hat{H}(x(s))ds \\
=&\tau_2\hat{H}^T(x(t))P_3\hat{H}(x(t)) - (1-\epsilon_0)\int_{t-\tau_2}^{t}\hat{H}^T(x(s))P_3\hat{H}(x(s))ds - \epsilon_0\int_{t-\tau_2}^{t}\hat{H}^T(x(s))P_3\hat{H}(x(s))ds \\
\leq&\tau_2\hat{H}^T(x(t))P_3\hat{H}(x(t)) - \frac{1}{\tau_2}\left(\int_{t-\tau_2}^{t}\hat{H}(x(s))ds\right)^T P_3\left(\int_{t-\tau_2}^{t}\hat{H}(x(s))ds\right) \\
&-\epsilon_0\int_{t-\tau_2}^{t}\hat{H}^T(x(s))P_3\hat{H}(x(s))ds.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Notez que le lemme(2.2) a été utilisé pour arriver à (3.9). Avec le lemme(2.3), les relations (3.5)-(3.9) conduisent à :

$$\begin{aligned}
\dot{V}(t) =&\dot{\bar{V}}_1(t) + \dot{\bar{V}}_2(t) + \dot{\bar{V}}_3(t) + \dot{\bar{V}}_4(t) \\
\leq&2x^T(t)P_1\left(-Dx(t) + A\hat{F}(x(t)) + B\hat{G}\left(x\left(t-\tau_1\right)\right) + C\int_{t-\tau_2}^{t}\hat{H}(x(s))ds\right) \\
&+\hat{G}^T(x(t))P_2\hat{G}(x(t)) - \hat{G}^T\left(x\left(t-\tau_1\right)\right)P_2\hat{G}\left(x\left(t-\tau_1\right)\right) \\
&+\tau_2\hat{H}^T(x(t))P_3\hat{H}(x(t)) - \frac{1-\epsilon_0}{\tau_2}\left(\int_{t-\tau_2}^{t}\hat{H}(x(s))ds\right)^T P_3\left(\int_{t-\tau_2}^{t}\hat{H}(x(s))ds\right) \\
&-\epsilon_0\int_{t-\tau_1}^{t}\hat{G}^T(x(s))P_2\hat{G}(x(s))ds - \epsilon_0\int_{t-\tau_2}^{t}\hat{H}^T(x(s))P_3\hat{H}(x(s))ds \\
=&\eta^T(t)\Phi_1\eta(t) - \epsilon_0\int_{t-\tau_2}^{t}\hat{H}^T(x(s))P_3\hat{H}(x(s))ds.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Où

$$\eta(t) = \left[\begin{array}{cccccc} x^T(t) & \hat{F}^T(x(t)) & \hat{G}^T(x(t)) & \hat{G}^T\left(x\left(t-\tau_1\right)\right) & \hat{H}^T(x(t)) & \int_{t-\tau_2}^{t}\hat{H}^T(x(s))ds \end{array}\right]^T, \tag{3.11}$$

$$\Phi_1 = \left[\begin{array}{cccccc}
-P_1D - DP_1 & P_1A & 0 & P_1B & 0 & P_1C \\
A^TP_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & P_2 & 0 & 0 & 0 \\
B^TP_1 & 0 & 0 & -P_2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \tau_2P_3 & 0 \\
C^TP_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\tau_2}P_3
\end{array}\right]. \tag{3.12}$$

par(2.22)-(2.24) nous avons

$$\left(\frac{\hat{f}_i\left(x_i(t)\right)}{x_i(t)} - l_i^+\right)\left(\frac{\hat{f}_i\left(x_i(t)\right)}{x_i(t)} - l_i^-\right) \leq 0, \quad i = 1, \ldots, n,$$

$$\left(\frac{\hat{g}_i(x(t))}{x_i(t)} - \sigma_i^+\right)\left(\frac{\hat{g}_i(x(t))}{x_i(t)} - \sigma_i^-\right) \leq 0, \quad i = 1, \ldots, n,$$

$$\left(\frac{\hat{h}_i(x(t))}{x_i(t)} - v_i^+\right)\left(\frac{\hat{h}_i(x(t))}{x_i(t)} - v_i^-\right) \leq 0. \quad i = 1, \ldots, n,$$

On obtient donc

$$\left(\hat{f}_i\left(x_i(t)\right) - l_i^+ x_i(t)\right)\left(\hat{f}_i\left(x_i(t)\right) - l_i^- x_i(t)\right) \leq 0, i = 1, \ldots, n, \tag{3.13}$$

$$\left(\hat{g}_i(x(t)) - \sigma_i^+ x_i(t)\right)\left(\hat{g}_i(x(t)) - \sigma_i^- x_i(t)\right) \leq 0, i = 1, \ldots, n, \tag{3.14}$$

$$\left(\hat{h}_i(x(t)) - v_i^+ x_i(t)\right)\left(\hat{h}_i(x(t)) - v_i^- x_i(t)\right) \leq 0. i = 1, \ldots, n, \tag{3.15}$$

qui sont équivalents à

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{F}(x(t)) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} l_i^+ l_i^- e_i e_i^T & -\frac{l_i^+ + l_i^-}{2} e_i e_i^T \\ -\frac{l_i^+ + l_i^-}{2} e_i e_i^T & e_i e_i^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{F}(x(t)) \end{bmatrix} \leq 0, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{3.16}$$

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{G}(x(t)) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \sigma_i^+ \sigma_i^- e_i e_i^T & -\frac{\sigma_i^+ + \sigma_i^-}{2} e_i e_i^T \\ -\frac{\sigma_i^+ + \sigma_i^-}{2} e_i e_i^T & e_i e_i^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{G}(x(t)) \end{bmatrix} \leq 0, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{3.17}$$

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{H}(x(t)) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} v_i^+ v_i^- e_i e_i^T & -\frac{v_i^+ + v_i^-}{2} e_i e_i^T \\ -\frac{v_i^+ + v_i^-}{2} e_i e_i^T & e_i e_i^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{H}(x(t)) \end{bmatrix} \leq 0, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{3.18}$$

où e_i désigne le vecteur colonne unitaire ayant " 1 " élément sur sa i ème ligne et des zéros ailleurs
En conséquence, nous avons

$$\begin{aligned}
&\eta^T(t)\phi_1\eta(t) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{F}(x(t)) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} l_i^+ l_i^- e_i e_i^T & -\frac{l_i^+ + l_i^-}{2} e_i e_i^T \\ -\frac{l_i^+ + l_i^-}{2} e_i e_i^T & e_i e_i^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{F}(x(t)) \end{bmatrix} \\
&- \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{G}(x(t)) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \sigma_i^+ \sigma_i^- e_i e_i^T & -\frac{\sigma_i^+ + \sigma_i^-}{2} e_i e_i^T \\ -\frac{\sigma_i^+ + \sigma_i^-}{2} e_i e_i^T & e_i e_i^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{G}(x(t)) \end{bmatrix} \\
&- \sum_{i=1}^{n} \delta_i \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{H}(x(t)) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} v_i^+ v_i^- e_i e_i^T & -\frac{v_i^+ + v_i^-}{2} e_i e_i^T \\ -\frac{v_i^+ + v_i^-}{2} e_i e_i^T & e_i e_i^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{H}(x(t)) \end{bmatrix} \\
&= \eta^T(t)\phi_1\eta(t) + \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{F}(x(t)) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -\Lambda L_1 & \Lambda L_2 \\ \Lambda L_2 & -\Lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{F}(x(t)) \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{G}(x(t)) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -\Gamma\Sigma_1 & \Gamma\Sigma_2 \\ \Gamma\Sigma_2 & -\Gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{G}(x(t)) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{H}(x(t)) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -\Delta\Upsilon_1 & \Delta\Upsilon_2 \\ \Delta\Upsilon_2 & -\Delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{H}(x(t)) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \eta^T(t) \begin{bmatrix} \Pi & P_1 A + \Lambda L_2 & \Gamma\Sigma_2 & P_1 B & \Delta\Upsilon_2 & P_1 C \\ A^T P_1 + \Lambda L_2 & -\Lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Gamma\Sigma_2 & 0 & P_2 - \Gamma & 0 & 0 & 0 \\ B^T P_1 & 0 & 0 & -P_2 & 0 & 0 \\ \Delta\Upsilon_2 & 0 & 0 & 0 & \tau_2 P_3 - \Delta & 0 \\ C^T P_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\tau_2} P_3 \end{bmatrix} \eta(t) \\
&= \eta^T(t)\Phi\eta(t) \\
&\leq \lambda_{\max}(\Phi)|\eta(t)|^2,
\end{aligned} \tag{3.19}$$

$$\dot{V}(t) \leq \eta^T(t)\Phi\eta(t) \leq \lambda_{\max}(\Phi)|\eta(t)|^2 \leq \lambda_{\max}(\Phi)|x(t)|^2$$

ce qui implique que le point d'équilibre de (2.2) est globalement asymptotiquement stable.

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons traité le problème de l'analyse de stabilité exponentielle globale pour une classe de réseaux de neurones récurrents généraux, qui impliquent à la fois les retards temporels discrets et distribués. Nous avons supprimé les hypothèses traditionnelles de monotonie et de lissage sur la fonction d'activation. Une approche d'inégalité matricielle linéaire (LMI) a été développée pour résoudre le problème traité. Les conditions de la stabilité exponentielle globale ont été dérivées en termes de solution définie positive symétrique aux LMI.

Bibliographie

[1] M S AbdelouahaB. Les systemes chaotiques a d'érivées fractionnaires.

[2] T.A. Burton. Krasnoselskii's inversion principle and fixed points. 30(7) :3975–3986, 1997. Proceedings of the Second World Congress of Nonlinear Analysts.

[3] J. Cao and Jun Wang. Global asymptotic stability of a general class of recurrent neural networks with time-varying delays. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I : Fundamental Theory and Applications*, 50(1) :34–44, 2003.

[4] Jean-Pierre Demailly. *Analyse numérique et équations différentielles*. EDP sciences Les Ulis, 2006.

[5] Jean Gallier. Schur complements and applications. 05 2011.

[6] K. Gu. An integral inequality in the stability problem of time-delay systems . In *Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control*, volume 3, pages 2805,2806,2807,2808,2809,2810, Los Alamitos, CA, USA, December 2000. IEEE Computer Society.

[7] MH Hamdan and DC Roach. The sigmoid neural network activation function and its connections to airy's and the nield-kuznetsov functions. *Proof*, 2 :108–114, 2022.

[8] H k Khalil. *Non linear systems*. Library of Congress Cataloging-in, 2002.

[9] Xiaofeng Liao, Guanrong Chen, and E.N. Sanchez. Lmi-based approach for asymptotically stability analysis of delayed neural networks. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I : Fundamental Theory and Applications*, 49(7) :1033–1039, 2002.

[10] Yurong Liu, Zidong Wang, and Xiaohui Liu. Global exponential stability of generalized recurrent neural networks with discrete and distributed delays. *Neural Networks*, 19(5) :667–675, 2006.

[11] Bingji Xu, Xinzhi Liu, and Xiaoxin Liao. Global asymptotic stability of high-order hopfield type neural networks with time delays. *Computers and Mathematics with Applications*, 45(10) :1729–1737, 2003.

[12] Shengyuan Xu, James Lam, Daniel W.C. Ho, and Yun Zou. Global robust exponential stability analysis for interval recurrent neural networks. *Physics Letters A*, 325(2) :124–133, 2004.

[13] Yuehua Yu and Mingshan Cai. Existence and exponential stability of almost-periodic solutions for high-order hopfield neural networks. *Mathematical and Computer Modelling*, 47(9) :943–951, 2008.

[14] Hongyong Zhao. Global asymptotic stability of hopfield neural network involving distributed delays. *Neural Networks*, 17(1) :47–53, 2004.

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليـــم العالـــي والبحـــث العلمـــــي

جامعة غرداية

كلية العلوم والتكنولوجيا

قيم الرياضيات والاعلام الالي

غرداية في06-07-2025 :...

شعبة: الرياضيات

تخصص: تحليل دالي وتطبيقات

شهادة ترخيص بالتصحيح والإيداع

أنا الأستاذ(ة): MERABET Brahim

الرتبة: MCB

بصفتي المشرف المسؤول عن تصحيح **مذكرة التخرج ماستر** المعنونة بـ:

Stabilité Exponentielle Globale des Réseaux de Neurones Récurrents Généralisés à Retards Discrets et Distribués.

من إنجاز الطالب:

KECHAR Youcef

التي نوقشت بتاريخ: 22 جوان 2023

أشهد أن الطالب قد قام بالتعديلات والتصحيحات المطلوبة من طرف لجنة المناقشة وقد تم التحقق من ذلك من طرفنا وقد استوفت جميع الشروط المطلوبة.

إمضاء مسؤول عن التصحيح

مصادقة رئيس القسم

رئيس قسم الرياضيات والإعلام الآلي

الحاج موسى ياسين

جامعة غرداية

قسم الرياضيات و الاعلام الآلي

كلية العلوم والتكنولوجيا