Table des matières

Résumé

l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ est un corps totalement ordonnée ,il est muni de quatre opérations arithmétiques satisfaisant les même règles que celle sur les fractions rationnelles de plus ces opérations sont compatibles avec la relation d'ordre .
Il satisfait on plus la propriété de la borne supérieure. Cet ensembles est caractérisé comme corps archimédienne.
Dans la notion topologique $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$,comme $\mathbb{R}$ est un ensembles connexe est complet alors toute suite de Cauchy est convergente.

Abstract

The set of real numbers $\mathbb{R}$ is a totally ordered body, it is equipped with four arithmetic operations satisfy the same rules as on rational functions over these operations are compatible with the order relation.
There are more satisfied the property of the upper bound.
This set is characterized as Archimedean body.
In the topological notion $\mathbb{Q}$ is dense in $\mathbb{R}$ as $\mathbb{R}$ is a connected set is complete when every Cauchy sequence is convergent.

Introduction Historique

Pour les mathématiciens grecs de l'école de Pythagore (VIe siècle av. J.C.), les seuls nombres étaient les nombres rationnels. Bien qu'ils aient su que $\sqrt{2}$ n'était pas rationnel, et que cette grandeur est la longueur de la diagonale d'un carré de côté 1, l'existence de telles grandeurs"incommensurables" était pour eux un secret bien gardé. Il a fallu attendre la fin du $XIXe$ siècle pour que les mathématiciens comme Peano, Dedekind et Cantor notamment aboutissent par une démarche rigoureuse à la construction du corps des nombres réels .
Dedekind par example qui prend conscience de la nécessité de clarifier la notion de nombre elle-même. Donc "Que sont et que doivent être les nombres ?" (1887) il répond longuement à cette question, affirmant : "les nombres sont de libres créations de l'esprit humain, ils servent comme moyen permettant de saisir avec plus de facilité et de précision la diversité des choses". Auparavant, en 1872 il avait publié "Continuité et nombres irrationnels", essai dans lequel il présenta sa conception des nombres réels Dans la chaine d'inclusions suivante :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

c'est l'inclusion $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ qui est la plus mystérieuse et la plus délicate.
► On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{Z}$ l'anneau des entiers relatifs,$\mathbb{D}$ l'ensemble des nombres décimales, $\mathbb{Q}$ le corps des nombres rationnels, $\mathbb{R}$ le corps des nombres réels et $\mathbb{C}$ le corps des nombres complexes.

0.1 L'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$

La construction de l'ensemble des réels commence par l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$, où

$$\begin{gathered}
\mathbb{N} = 1, 2, 3 \text{...selon le procédé suivant : } 0 = card(\emptyset) \\
\downarrow \text{s : successeur} \\
\downarrow \text{s} \\
1 = (card\{\emptyset\}) \\
2 = (card\{\emptyset, \{\emptyset\}\}) \\
3 = (card\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}) \\
. \\
. \\
n =? \\
. \\
.
\end{gathered}$$

Cette construction s'appelle le processus de récurrence, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$; il existe un successeur du nombre naturel n, noté $S(n)$ et il est unique telle que $S(n) \in \mathbb{N}$: Comme 0 n'est pas un successeur,de aucun nombre naturel donc pour tout $n \in \mathbb{N}, 0 \neq S(n)$ et on écrit

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$$

Soit l'équation

$$x + a = b \setminus a, b \in \mathbb{N} \tag{1}$$

Cette équation (1) n'admet pas toujours une solution dans $\mathbb{N}$ (il suffit de prendre b $<$ a). De même pour l'équation :

$$xa = b \setminus a, b \in \mathbb{N}\ et\ (a \neq 0) \tag{2}$$

(dans le cas où a ne divise pas b).
$\mathbb{N}$ est totalement ordonnée et que tout sous ensembles de $\mathbb{N}$ admet une borne inférieure mais n'admet pas une borne supérieure .
Pour trouver les solutions de l'équation, il faut construire un autre ensemble qui s'appelle l'ensemble des entiers relatifs noté $\mathbb{Z}$ et qui est construit par symétrie par rapport à 0,

0.2 L'ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z}$

$$Z = \{...... - 3, -2, -1, 0, 1, 2, 3.....\}$$

Ainsi défini, dans $\mathbb{Z}$ on peut résoudre l'équation . en fait, on a :

Proposition 0.2.1 *$\mathbb{Z}$ muni de l'addition est un groupe additif.*
Maintenant toute équation sous forme :

$$x + a = b \setminus a, b \in \mathbb{Z},$$

admet une solution dans $\mathbb{Z}$
Mais on a encore le problème de l'équation

$$xa = b \setminus a, b \in \mathbb{Z},$$

qui n'admet pas toujours une solution dans $\mathbb{Z}$

$\mathbb{Z}$ est totalement ordonné, mais tout sous-ensemble de $\mathbb{Z}$ peut ne pas avoir de borne inférieure et borne supérieure.

0.3 L'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$

Pour commencer, on va se concentrer sur l'équation :

$$xa = b \setminus ...a, b \in \mathbb{Z} \text{ et } (a \neq 0)$$

On construit une extension de $\mathbb{Z}$, l'ensemble $\mathbb{Q}$ qui est appelé l'ensemble des rationnels,définie par :

$$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \setminus p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}^*\}$$

et dans lequel l'équation (2) aura toujours une solution. En fait, on complétera l'ensemble $\mathbb{Z}$ pour former un corps $\mathbb{Q}$ (il y a distributivité de la multiplication par rapport à l'addition) qui contiendra une sous-structure algébrique isomorphe à $\mathbb{Z}$; Ainsi dans $\mathbb{Q}$ tout élément (à l'exception de 0) aura un inverse pour la loi multiplicatif et par suite sur ce nouvel ensemble la division (sauf avec le 0) sera toujours possible. $\mathbb{Q}$ est totalement ordonné mais nous avons toujours le problème des sous-ensembles de $\mathbb{Q}$ qui peuvent ne pas avoir de borne inférieur et borne supérieur : Malgré tout ça il y a des opérations arithmétiques simples, qui ne sont pas possible dans l'ensemble des nombres rationnels. Ainsi, par exemple il n'y a aucun nombre rationnel dont le carré est égale à 2. En effet, supposons qu'un tel nombre rationnel r existe alors :

$$r = \frac{p}{q} \text{ avec } (q \neq 0);$$

où p, q sont des entiers et p, q n'ont aucun facteur commun ($p \wedge q = 1$), on aurait

$$p^2 = 2q^2 :$$

Donc

$$p = 2\frac{q^2}{p} \Longrightarrow p = 2p' \Longrightarrow 2 \text{ divise } p$$

Alors

$$p^2 = 4p'^2 = 2q^2 \Longrightarrow q^2 = 2p'^2,$$

$$\Longrightarrow 2 \text{ divise } q.$$

Ce qui contredit le fait que p, q n'ont aucun facteur commun ($p \wedge q = 1$) ;donc $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, De plus, comme $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ alors il existe un autre ensemble qui contient $\mathbb{Q}$ et conserve les opérations qui ne sont pas définies sur $\mathbb{Q}$, il est noté $\mathbb{R}$ (l'ensemble des nombres réels).
Ainsi :

1. les problèmes(les équation algébrique (1) et (2)) seront toujours résolubles dans $\mathbb{R}$;
2. $\mathbb{R}$ est totalement ordonnée ;
3. Tout sous ensemble E de $\mathbb{R}$ majoré admet une borne supérieure ($\sup E$), et tout sous ensemble E de $\mathbb{R}$ minoré admet une borne inférieure ($\inf E$) ;

Chapitre 1

Étude algébrique de l'ensemble $\mathbb{R}$

1.1 Construction de Dedekind

Définition :

C'est la construction imaginée par Richard Dedekind qui remarque que tout rationnel r coupe $\mathbb{Q}$ en deux ensembles : l'ensemble A_r des rationnels a tels a $<$ r et l'ensemble B_r des rationnels b tels $b \geq r$.
Il appelle alors $(A_r; B_r)$ une coupure de $\mathbb{Q}$.
Il remarque ensuite que $\sqrt{2}$ peut aussi partager $\mathbb{Q}$ en deux ensembles :
l'ensemble A des rationnels a tels que $a < \sqrt{2}$ et l'ensemble B des rationnels b tels que $b > \sqrt{2}$.
L'idée lui vient donc de définir l'ensemble des réels comme l'ensemble des coupures de $\mathbb{Q}$. Reste maintenant à définir une coupure sans se servir de la notion intuitive de nombre réel.
Dedekind propose la définition suivante : Une coupure de Dedekind dans le corps $\mathbb{Q}$ des rationnels est un couple de 2 sous-ensembles non-vides A et B tels que

$$A \cap B = \varnothing$$

$$A \cup B = \mathbb{Q}$$

$$\forall a \in A, \forall b \in B, a < b$$

On voit ainsi que tout nombre rationnel r définit deux coupures : (A, B) telle que A est l'ensemble des rationnels strictement inférieurs à r et B l'ensemble des rationnels supérieurs ou égaux à r, (A', B') telle que A' est l'ensemble des rationnels inférieurs ou égaux à r et B' l'ensemble des rationnels strictement supérieurs à r. Pour lever cette ambiguïté, on utilise alors la définition suivante d'une coupure : Une coupure de $\mathbb{Q}$ est une partie A de $\mathbb{Q}$ telle que :
A est non vide et différente de $\mathbb{Q}$
pour tout a de A, si a'$<$a alors a' appartient à A
A ne possède pas de plus grand élément.
On définit alors $\mathbb{R}$ comme l'ensemble de ces coupures (pour une généralisation, voir plus bas la section « À l'aide des nombres surréels »).
On peut remarquer que cette seconde définition permet d'assurer une correspondance univoque entre chaque rationnel r et la coupure A_r définie comme l'ensemble de tous les rationnels a tels que a $<$ r.

On remarque alors que $\mathbb{R}$ se divise en deux ensembles, l'un comprenant les coupures dont le complémentaire admet un plus petit élément, coupure de la forme A_r, et l'autre comprenant les coupures dont le complémentaire ne possède pas de plus petit élément.
Par exemple l'irrationnel $\sqrt{2}$ est représenté par la coupure $\{a \in \mathbb{Q}$ t.q. $a < 0$ ou $a^2 < 2\}$.
On plonge naturellement $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ par l'application injective qui à tout rationnel r associe la coupure A_r.

1.1.1 Ordre et opérations

Relation d'ordre : L'ensemble des coupures, muni de la relation d'inclusion est un ensemble totalement ordonné.

Addition : On peut alors construire une addition sur $\mathbb{R}$ de la manière suivante :

$c \in A + B \Leftrightarrow$ il existe a dans A et b dans B tels que $c = a + b$.
Cette addition confère à $\mathbb{R}$ une structure de groupe commutatif. La seule difficulté consiste en la définition de l'opposé de A : $A_{-r}(siA = A_r)ou - \overline{A}(siA \neq A_r)$.

Multiplication : La construction de la multiplication est plus subtile. Elle est définie sur tous les réels positifs de la manière suivante :

$c \in A \times B \Leftrightarrow$ il existe a dans $A \cap \mathbb{Q}^+$ et b dans $B \cap \mathbb{Q}^+$ tels que $c \leq ab$. La règle des signes permettant alors de construire la multiplication sur tout $\mathbb{R}$.

Proposition 1.1.1 *L'ensemble $\mathbb{R}$ des coupures, muni de cet ordre et ces deux lois est alors un corps totalement ordonné, vérifiant de plus la propriété de la borne supérieure (tout ensemble non vide majoré possède une borne supérieure.*

1.2 Le corps des nombres réels

1.2.1 Inventaire des propriétés de $\mathbb{Q}$

$\mathbb{Q}$ est l'ensemble des nombres rationnels

Théorème 1.2.1 *$\mathbb{Q}$ est un corps commutatif totalement ordonné, Archimédien et ne possédant pas la propriété de la borne supérieure.*

$(\mathbb{Q}, +, \times)$ corps commutatif

1. $(\mathbb{Q}, +)$ groupe abélien d'élément neutre 0.
2. $(\mathbb{Q} - \{0\}, \times)$ groupe abélien d'élément neutre 1.
3. $\times$ est distributive par rapport à $+$.

Corps totalement ordonné

On sait que $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}^*\}$
On définit $\mathbb{Q}^+ = \{\frac{a}{b} : a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}^*\}$, et $\mathbb{Q}^- = \{-x, x \in \mathbb{Q}^+\}$
Il est clair que :

1. $\mathbb{Q}^+ \cup \mathbb{Q}^- = \mathbb{Q}$
2. $\mathbb{Q}^+ \cap \mathbb{Q}^- = \{0\}$
3. $\mathbb{Q}^+$ est stable par l'addition et la multiplication.

Relation d'ordre :

Définition 1.2.1 *Soit* $(x, y) \in \mathbb{Q}^2$ *,* $x \leq y$ *ssi* $(y - x) \in \mathbb{Q}^+$

$\longrightarrow$ Il est clair que $\leq$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{Q}$
$\longrightarrow$ L'ordre est total : $\forall(x, y) \in \mathbb{Q}^2, x \leq y$ ou $y \leq x$
$\longrightarrow$ Compatibilité avec les opérations :
$(\star)$ avec l'addition :
Si $a \leq b$, alors $\forall c \in \mathbb{Q}, a + c \leq b + c$
$(\star\star)$ avec la multiplication par les nombres positifs :
Si $a \leq b$, alors $\forall c \in \mathbb{Q}^+, ac \leq bc$

$\mathbb{Q}$ ne possède pas la propriété de la borne supérieure

Définition 1.2.2 $(E, \leq)$ *ensemble totalement ordonné.*
E possède la propriété de la borne sup *ssi toute partie non vide et majorée de E possède une borne* sup.

$(\mathbb{Q}, \leq)$ **ne possède pas cette propriété :**

Théorème 1.2.2 $\mathbb{Q}$ *ne possède pas la propriété de la borne* sup

En effet, soit $A = \{x \in \mathbb{Q}^+ | x^2 < 2\}$
A est non vide et majoré, par exemple par $\dfrac{3}{2}$. Si A avait une borne $\sup x$, on aurait $x \notin \mathbb{Q}$,
démonstration par l'absurde :
Si $\exists x \in \mathbb{Q}^+, x^2 = 2$
On peut supposer $x = \dfrac{a}{b}$ irréductible, $a \in \mathbb{N}^*, b \in \mathbb{N}^*$.
On a $(\frac{a}{b})^2 = 2 \Longrightarrow a^2 = 2b^2$
$\Longrightarrow a^2$ est pair $\Longrightarrow a$ est pair (si a était impair, a^2 le serait) $\Longrightarrow a^2$ est divisible par 4 $\Longrightarrow 2b^2$ est divisible par 4 $\Longrightarrow b^2$ est divisible par 2 $\Longrightarrow b$ est pair
Contradiction, car a et b sont tous les deux pairs, donc la fraction $\dfrac{a}{b}$ n'est pas irréductible.

1.2.2 Construction de $\mathbb{R}$

Nombres réels

Définition 1.2.3 *On appelle section commençante ouverte de $\mathbb{Q}$ tout ensemble $S \subset \mathbb{Q}$ vérifiant les 4 propriétés suivantes :*
(1) $S \neq \emptyset$
(2)$S \neq \mathbb{Q}$
(3) $\forall x \in S, y \leq x \Longrightarrow y \in S$
(4) S n'a pas de plus grand élément, i.e.$\forall x \in S, \exists y \in S, x < y$

Définition 1.2.4 *On appelle nombre réel toute section commençante ouverte de $\mathbb{Q}$, et on note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.*

Opération sur $\mathbb{R}$

L'addition

Définition 1.2.5 *Soient $S, S' \subset \mathbb{R}$*
On pose $S + S' = \{z \in \mathbb{Q} : \exists x \in S, \exists y \in S', x + y = z\}$

(**Propriétés de l'addition**)
α) + est une loi interne : $\forall (S, S') \in \mathbb{R}^2, S + S' \in \mathbb{R}$
Démonstration
(1)$S + S' \neq \emptyset$ trivial
(2)$S + S' \neq \mathbb{Q}$: $S \neq \mathbb{Q}$, donc $\exists x \in \mathbb{Q}, x \neq S$ $S' \neq \mathbb{Q}$, donc $\exists x' \in \mathbb{Q}, x' \neq S'$; posons $z = x + x'$
Si $z \in S + S'$, alors $z = y + y'$ avec $y \in S, y' \in S'$
On a $x + x' = y + y'$
donc l'une au moins des inégalités $x \leq y$ ou $x' \leq y'$ est vraie.
par exemple $x \leq y$
mais $x \neq S$, donc $y \in S$, contradiction.
(3)$\forall z \in S + S', t \leq z)t \in S + S' : z = x + y, x \in S, y \in S0$
posons $z - t = \varepsilon$, on a $\varepsilon \in \mathbb{Q}^+$ donc $\frac{\varepsilon}{2} \in \mathbb{Q}$
On pose $\begin{cases} x' = x - \frac{\varepsilon}{2} \\ y' = y - \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$
$x' \in \mathbb{Q}$ et $x' \leq x \Rightarrow x' \in S$
$y' \in \mathbb{Q}$ et $y' \leq y \Rightarrow y' \in S$
$x' + y' \in S + S' \Rightarrow t \in S + S'$.
(4)$\forall z \in S + S', \exists t \in S + S', z < t : z = x + y, x \in S, y \in S', \exists x' \in S, x' > x, \exists y' \in S, y' > y$
Soit $t = x' + y'$, on a $t \in S + S'$ et $t > z$
β)+ est associative :$\forall (S, S', S'') \in \mathbb{R}^3, (S + S') + S'' = S + (S' + S'')$
Démonstration : c'est trivial
γ)+ est commutative : $\forall (S, S') \in \mathbb{R}^2, S + S' = S' + S$
Démonstration : C'est trivial.
δ Élément neutre : On pose $\tilde{0} = \{x \in \mathbb{Q} \setminus x < 0\} = \mathbb{Q}^*_- =]-\infty, 0[_{\mathbb{Q}}$
Soir $S \in \mathbb{R}$
$S + \tilde{0} = \{x + y : x \in S, y \in \mathbb{Q}^*_-\}$
Montrons que $S + \tilde{0} = S$:
$\longrightarrow S + \tilde{0} \subset S$
Soit $z \in S + \tilde{0}$
$z = x + y, x \in S, y \in \mathbb{Q}^*_-$
donc $z < x \Longrightarrow z \in S$
$\longrightarrow S \subset S + \tilde{0}$
Soit $x \in S$

On sait $\exists y \in S, x < y$
d'où $x = y + u, u < 0$
donc $x \in S + \tilde{0}$
ν) Élément opposé :

Remarque 1.2.1 *préliminaire :du fait que l'ordre est total, on a*
$\forall S \in \mathbb{R}, S \subset \tilde{0}$ *ou* $\tilde{0} \subset S$

$$\text{On dira que } \begin{cases} S \in \mathbb{R}^+ \text{ ssi } \tilde{0} \subset S \\ S \in \mathbb{R}^- \text{ ssi } S \subset \tilde{0} \end{cases}$$

l'Antisymétrie prouve que $\mathbb{R}^+ \cap \mathbb{R}^- = \{\tilde{0}\}$
La totalité de l'ordre prouve que $\mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^- = \mathbb{R}$

Définition de l'opposé : Soit d'abord $S \in \mathbb{R}^+$
posons $T = S \setminus \tilde{0}$
$\longrightarrow$ Si $T = \emptyset$, alors $S = \tilde{0}$
On pose alors $opp(\tilde{0}) = \tilde{0}$
$\rightarrow$ Si $T \neq \emptyset$, alors T contient une infinité de rationnels
[en effet, si $T = \{0\}$, alors $S =]-\infty, 0]_{\mathbb{Q}}, 0$ serait le plus grand élément de S , absurde
donc T contient au moins un rationnel non nul, soit x , et donc tous les rationnels compris entre 0 et x , soit une infinité].
Soit $T' = \{-x, x \in T\}$
On pose $S^* = \tilde{0} \setminus T'$
Si S^* n'a pas de plus grand élément, on pose opp$S = S^*$ Si S^* a un plus grand élément ω , on pose opp$S = S^* - \{\omega\}$
Il est alors clair que opp$S \in \mathbb{R}$.
Conclusion : $(\mathbb{R}, +)$ groupe abélien.

La multiplication

Définition 1.2.6 *(le produit de 2 réels positifs :)*
Soit $S, S' \in \mathbb{R}^+$
Notons $S^+ = S \backslash 0$
$s'^+ = S' \backslash 0$
et $S \times S' = \mathbb{Q}^*_- \cup \{xy, x \in S^+, y \in S'^+\}$
$S \times S' \in \mathbb{R}$
et même que $S \times S' \in \mathbb{R}^+$
On définit ensuite sur $\mathbb{R}$ *la fonction valeur absolue :*
Si $S \in \mathbb{R}^+, |S| = S$
Si $S \in \mathbb{R}^-, |S| = -S$

$\longrightarrow$ Cas général : $S, S' \in \mathbb{R}$
Le réel $S \times S'$ est le réel dont la valeur absolue est $|S| \times |S'|$, et dont le signe est obtenu par application de la règle des signes.
Propriétés de la multiplication :

a) Par construction même, on a bien :
$\forall (S, S') \in \mathbb{R}^2, S \times S' \in \mathbb{R}$

b) $\forall (S, S', S'') \in \mathbb{R}^3, (S \times S') \times S'' = S \times (S' \times S'')$

c) $\forall (S, S') \in \mathbb{R}^2, S \times S' = S' \times S$

d) $\forall (S, S', S'') \in \mathbb{R}^3, S \times (S' + S'') = S \times S' + S \times S''$

e) Existence d'un élément neutre pour $\times$:
On pose $\tilde{1} =]-\infty, 1[_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}_-^* \cup [0, 1[_{\mathbb{Q}}$
et on a : $\forall S \in \mathbb{R}, \tilde{1} \times S = S$

f) Élément inverse :
$\forall S \in \mathbb{R}, S \neq 0, \exists S^{-1} \in \mathbb{R}, S \times S^{-1} = \tilde{1}$

Conclusion :$(\mathbb{R}, +, \times)$ corps commutatif

Compatibilité avec l'ordre

Il est immédiat de vérifier les 2 propriétés suivantes :
$(\star)$ Si $S \leq S'$ et si $T \in \mathbb{R}$, alors $S + T \leq S' + T$
$(\star\star)$ Si $S \leq S'$ et si $T \in \mathbb{R}^+$, alors $S \times T \leq S' \times T$
Conclusion : $\mathbb{R}$ est un corps totalement ordonné

1.2.3 Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$

Définition 1.2.7 *Un réel α est dit positif si et seulement si :*

- *α est le réel nul, ou*
- *α possède un représentant u qui vérifie*

$$\exists a \in \mathbb{Q}_+^*, \exists n_0 \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Longrightarrow u_n \geq a$$

L'ensemble des réels positifs est noté $\mathbb{R}^+$. On note $\mathbb{R}_+^*$ l'ensemble $\mathbb{R}_+ \setminus \{\overline{(0)}\}$ des réels positifs et non nuls, dits strictement positifs.

Théorème 1.2.3 *Soit α un réel strictement positif. Alors*

$$\forall v \in \alpha, \exists n_v \in \mathbb{N}, \exists a \in \mathbb{Q}_+^* \ \ (n \geq n_v \Longrightarrow v_n > 0)$$

Démonstration Soit donc α un réel strictement positif. Par définition de $\mathbb{R}_+^*$,il existe un représentant u de α, un rationnel a strictement positif et un entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, on ait $u_n > a$. Soit alors $v \in \alpha$ un autre représentant du réel α . Alors la suite $v - u$ est dans l'idéal I, donc il existe un entier n_2 tel que, pour $n \geq n_2$, on ait $|v_n - u_n| < \frac{a}{2}$,et donc $v_n \geq u_n - \frac{a}{2}$.
Pour $n \geq max(n_1, n_2)$, on a alors $u_n \geq a$ et $v_n \geq u_n - \frac{a}{2}$, donc $v_n \geq \frac{a}{2} > 0$.
N.B. On défini de manière similaire les réels négatifs, les ensembles $\mathbb{R}_-$ et $\mathbb{R}_-^*$,et l'on a bien sûr une propriété analogue pour les réels strictement négatifs.

Définition 1.2.8 *On définit la relation binaire $\leq$ sur $\mathbb{R}$ par :*

$$\alpha \leq \beta \Longleftrightarrow \beta - \alpha \in \mathbb{R}_+$$

Théorème 1.2.4 *$\leq$ est une relation d'ordre totale sur $\mathbb{R}$.*

Démonstration :

- Réflexivité : pour tout α, on a $\alpha - \alpha = 0 \in \mathbb{R}_+$.
- Antisymétrie : $(\alpha \leq \beta et \beta \leq \alpha) \Longrightarrow (\beta - \alpha \in \mathbb{R}_+$ et $\alpha - \beta \in \mathbb{R}_+)$.
  Alors $\beta - \alpha \in \mathbb{R}_+ \cap \mathbb{R}_- = \{0\}$ donc $\alpha = \beta$.
- Transitivité :$(\alpha \leq \beta$ et $\beta \leq \gamma) \Longrightarrow (\beta - \alpha \in \mathbb{R}_+$ et $\gamma - \beta \in \mathbb{R}_+)$.
  Alors $\gamma - \alpha = (\gamma - \beta) + (\beta - \alpha) \in \mathbb{R}+$, et donc $\alpha \leq \gamma$
- Ordre total : on sait que $\mathbb{R}_+ \cup \mathbb{R}_- = \mathbb{R}$. Si α et β sont deux réels, leur différence $\beta - \alpha$ est donc soit dans $\mathbb{R}_+$ soit dans $\mathbb{R}_-$.
  Dans le premier cas, on a alors $\alpha \leq \beta$. Sinon, $\alpha - \beta = -(\beta - \alpha) \in \mathbb{R}_+$ et donc $\beta \leq \alpha$.

Remarque 1.2.2 $\alpha \geq 0 \Longleftrightarrow \alpha - 0 \in \mathbb{R}_+ \Longleftrightarrow \alpha \in \mathbb{R}_+$

Propriété 1.2.1 *$\leq$ est compatible avec l'addition sur $\mathbb{R}$.*

Démonstration : Soit α, β, γ et δ des réels vérifiant $\alpha \leq \beta$ et $\gamma \leq \delta$.
On a alors $\beta - \alpha \in \mathbb{R}_+$ et $\delta - \gamma \in \mathbb{R}_+$
donc

$$(\beta - \alpha) + (\delta - \gamma) = (\beta + \delta) - (\alpha + \gamma) \in \mathbb{R}_+$$

et donc

$$\alpha + \gamma \leq \beta + \delta$$

Propriété 1.2.2 *$\leq$ est compatible avec la multiplication sur $\mathbb{R}_+$.*

Démonstration : soit α, β, γ et δ des élément de $\mathbb{R}$ vérifiant $\alpha \leq \beta$ et $\gamma \leq \delta$
On a alors

$$\beta - \alpha \in \mathbb{R}_+ \text{ et } \delta - \gamma \in \mathbb{R}_+.$$

et donc

$$\alpha\gamma \leq \beta\delta$$

1.2.4 Majorants, minorants

On désigne par A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

Définition 1.2.9 *On dit qu'un réel a est un majorant de A si tout élément de A est inférieure ou égal à a*

$$a \text{ majorant de } A \text{ équivaut à : } \forall x \in A, x \leq a$$

Définition 1.2.10 *On dit que A est majorée si A admet un majorant (elle en admet alors une infinité).*

On définit de même un minorant, une partie minorée.

Définition 1.2.11 *A est bornée si A est majorée et minorée*

Exemple

1. Soit $A = \{x \in \mathbb{R} | x = 1 + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\}$; 2 et 3 sont des majorants de A ; 0 et 1 des minorants de A. A est donc une partie bornée de $\mathbb{R}$. On remarque que 2, majorant de A, appartient à A.
2. Soit $B = \{x \in \mathbb{R} | x = ln(1+n), n \in \mathbb{N}\}$; -10 et 0 sont des minorants de B ; B est une partie minorée de $\mathbb{R}$, mais B n'est pas majorée (il existe des éléments de B arbitrairement grands). On remarque que 0 est un minorant de B qui appartient à B.

Définition 1.2.12 *On dit qu'un réel a est plus grand élément (ou maximum) de A si a appartient à A et est un majorant de A.*

$$a \text{ plus grand élément de } A \text{ équivaut à :} a \in A \text{ et } \forall x \in A, x \leq a$$

On définit de même la notion de plus petit élément ou minimum.

Exemple 1.2.1 *On reprend les exemples précédents : 2 est le plus grand élément de A, 0 le plus petit élément de B. 1 est un minorant de A, 1 n'appartient à A, mais tout nombre supérieure à 1 n'est plus minorant de A, ce qu'on traduit par :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}^*, 1 + \frac{1}{n} < 1 + \varepsilon$$

Il suffit de prendre $n > 1 \setminus \varepsilon$. Ainsi si $\varepsilon = 10^{-10}$ on prend par exemple $n = 10^{10} + 1$.

Proposition 1.2.1 *Si A a un plus grand (resp petit) élément celui ci est unique.*
Preuve : On aurait sinon $a \leq b$ et $b \leq a$, d'où $a = b$.

On note alors $\max A$ (resp $\min A$) le plus grand (resp petit) élément de A.

1.3 Borne supérieure, borne inférieure

Quand une partie A non vide de $\mathbb{R}$ est majorée, elle admet une infinité de majorants, et si a est un majorant de A, tout réel supérieure à a est majorant de A.
Il est donc naturel de s'intéresser à l'existence éventuelle d'un plus petit majorant. C'est ce concept de plus petit majorant que l'on va formaliser en exprimant que tout réel qui lui est strictement inférieure n'est pas majorant.

Définition 1.3.1 *Soit A une partie de $\mathbb{R}$, on appelle borne supérieure de A dans $\mathbb{R}$ le plus petit des majorants de A dans $\mathbb{R}$ s'il existe ; cet élément se note alors $\sup A$.*

$$a = \sup A \text{ équivaut à :} \begin{cases} (i) \forall x \in A, x \leq a \\ (ii) \forall b \in \mathbb{R}, b < a \exists x \in A, b < x \leq a \end{cases}$$

On écrit souvent (ii) sous la forme

$$(ii) \qquad \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, a - \varepsilon < x \leq a$$

On définit de même le concept de borne inférieure, notée $\inf A$.

Proposition 1.3.1

1. *Si A a une borne supérieure (resp inférieure), celle-ci est unique*
2. *Si A a un plus grand (resp petit) élément a, alors $a = \sup A$ (resp $\inf A$).*

Preuve

La propriété a. vient du fait que la borne supérieure est le plus petit des majorants la propriété b. découle de la définition La réciproque de b. est fausse comme le montre l'exemple a. : on $a \sup A = 2 \in A$ et $\inf A = 1; 2$ est plus grand élément, 1 n'est pas plus petit élément.
On peut définir les concepts de majorant, plus grand élément, borne supérieure (resp minorant, plus petit élément, borne inférieure) dans n'importe quel ensemble totalement ordonné en particulier $\mathbb{Q}$; on va voir l'intérêt de $\mathbb{R}$ par rapport à la notion de borne supérieure.

1.3.1 La valeur absolue d'un réel

Définition 1.3.2 *On appelle valeur absolue d'un réel x, le réel, noté $|x|$, défini par :*

$$|x| = \max(x, -x)$$

. Les propriétés suivantes sont vérifiées :

(i) $\forall x \in \mathbb{R}, |x| \geq 0$ *et* $(|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0)$

(ii) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} |xy| = |x||y|$

(iii) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} |x + y| \leq |x| + |y|$

1.4 Propriété d'Archimède. Partie entière et approximations décimales d'un réel

Parmi les rationnels les décimaux ont un rôle pratique important, leur intérêt est d'approcher les réels d'aussi près que l'on veut, ce qui permet les calculs sur les réels

Définition 1.4.1 *Un réel d est un nombre décimal s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $10^k d \in \mathbb{Z}$. Ainsi $\frac{1}{4}$ est un décimal car $100 \times \frac{1}{4} = 25 \in \mathbb{N}$ on écrit $\frac{1}{4} = 0,25$. Cette écriture décimale signifie :*

$$\frac{1}{4} = \frac{2}{10} + \frac{5}{100} = \frac{25}{100}$$

En revanche 1/3 n'est pas un décimal.
On note $\mathbb{D}$ l'ensemble des décimaux ; on a l'inclusion

$$\mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Remarque $\mathbb{D}$ n'est pas un corps :en effet 3 est un décimal mais pas 1/3.

1.4.1 $\mathbb{Q}$ est archimédien

Théorème 1.4.1 $\forall x \in \mathbb{Q}, \forall y \in \mathbb{Q}_+^*, \exists n \in \mathbb{N}, ny \geq x$

Démonstration :
on pose $T' = T \setminus \{0\}$
$S \neq \mathbb{Q}$, donc $\exists t \in \mathbb{Q}, t \notin S$ Le réel t n'est donc pas inclus dans S et donc $S \subset t$ Soit $x \in T'$
$\mathbb{Q}$ étant Archimédien,$\exists n \in \mathbb{N}, nx \geq t$ et donc $nT \geq nx \geq t \geq S$

1.4.2 $\mathbb{R}$ est un corps archimédien

C'est Archimède (-287, -212 dans l'Antiquité) qui le premier formula le postulat qui porte son nom (postulat d'Archimède ou de continuité) : deux points A et B quelconques étant donnés sur une droite, si, à partir de A, on dispose à la suite et en direction de B des segments de même longueur, on finira par dépasser le point B après une série finie de telles opérations, si petite que soit la longueur des segments. Le corps des réels possède la propriété précédente , on dit qu'il est Archimédien. Cette propriété s'énonce ainsi : pour n'importe quels réels a et b, avec a strictement positif, il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ pour lequel le produit na soit supérieur ou égal à b. Ce que l'on peut résumer ainsi $\forall a, b \in \mathbb{R}$, avec a $>$ 0, $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $na \geq b$ Une conséquence de la propriété d'Archimède pour $\mathbb{R}$ est que l'ensemble des réels $\{\frac{1}{n}|n \in N^*\}$ possède la propriété suivante :
soit $\epsilon > 0$ quelconque, en posant $a = 1$ et $b = \frac{1}{\epsilon}(> 0)$, par la propriété d'Archimède il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $n_1(1) = n_1 \geq b = \frac{1}{\epsilon}$; il en découle $\epsilon \geq \frac{1}{n_1} \geq \frac{1}{n}$ pour tout entier n supérieure ou égal à n_1.
Pour rendre compte de cette propriété (à partir d'un certain rang tous les réels $\frac{1}{n}$ sont plus petits que ϵ nombre positif quelconque) on dit que la suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tend vers 0

Théorème 1.4.2 $\mathbb{R}$ *est un corps archimédien , c'est à dire qu'il satisfait à l'une des quatre propriétés équivalentes suivantes :*

(i) *étant donné deux réels x et y, y strictement positif, il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x \leq ny$*

(ii) *étant donné un réel x, il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $x \leq n$*

(iii) *étant donné un réel x, il existe un entier n unique tel que $n \leq x < n + 1$ l'entier n est la partie entière de x notée $E(x)$ ou $[x]$.*

(iv) *étant donné un réel x et un entier naturel k, il existe un décimal x_k unique, tel que :*

$$10^k x_k \in \mathbb{Z} \text{ et } x_k \leq x < x_k + 10^{-k}$$

x_k est l'approximation décimale d'ordre k ou à 10^{-k} près par défaut de x .

Preuve : On démontre les implications $(i) \Longrightarrow (ii)$,
$(ii) \Longrightarrow (iii), (iii) \Longrightarrow (iv), (iv) \Longrightarrow (i)$, puis on montre (i) par l'absurde.

$(i) \Longrightarrow (ii)$ il suffit de prendre y = 1.
$(ii) \Longrightarrow (iii)$ soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, d'après (ii) l'ensemble $p \in \mathbb{N}, p \leq x$
est fini et admet donc un plus grand élément, appelons le n, n vérifie donc $n \leq x < n+1$; soit $x \in \mathbb{R}^-$, l'entier E(x) défini par :
$E(x) = -E(-x)$ si $x \in \mathbb{Z}, E(x) = -E(-x) - 1$ si $x \notin \mathbb{Z}$
cet entier convient.
$(iii) \Longrightarrow (iv)$ soit x un réel, $10^k x$ est un réel qui admet donc une partie entière $[10^k x]$, celle-ci vérifie ; $[10^k x] \leq 10^k x < [10^k x] + 1$;
d'où, si l'on pose $x^k = \dfrac{[10^k x]}{10^k}$
$10^k x_k \in \mathbb{Z}$ et $x^k \leq x < x^k + 10^{-k}$.
$(iv) \Longrightarrow (i)$ soit $x \in \mathbb{R}$, et $y \in \mathbb{R}_+^*$, en appliquant (iv) à x/y avec k = 0, il existe u entier qui vérifie $u \leq \dfrac{x}{y} < u+1$, d'où $x < (u+1)y$.
(i) On montre alors (i) par l'absurde. Supposons que, pour tout entier n on ait
$x > ny$; soit $A = ny$, $n \in N^*$; A est non vide et majorée, elle admet une
borne supérieure $\alpha > 0$. On a donc, pour tout entier n, $ny \leq \alpha$ et il existe p
tel que :$\dfrac{\alpha}{2} < py \leq \alpha$ d'où $2py > \alpha$,
or $2py$ appartient à A, on a donc une contradiction

1.4.3 Propriétés principale de $\mathbb{R}$

Théorème 1.4.3 *toute suite croissante (resp décroissante) et majorée(resp minorée) des nombres réels est convergente*

Démonstration : Soit $A = u_n : n \in \mathbb{N}$ l'ensemble des valeurs prises par la suite (u_n) .
On a $\forall n \in \mathbb{N}$, un $\leq M$
i.e.$\forall x \in A, x \leq M$
A est donc une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$, donc A admet une borne supérieure, soit l.
On va montrer que

$$\lim_{n \to \infty} u_n = l$$

Soit $\varepsilon > 0$
Par définition de la borne sup, $\exists x \in A, l - \varepsilon \leq x \leq l$
i.e.$\exists n_0 \in \mathbb{N}, l - \varepsilon \leq u_{n_0} \leq l$
mais (u_n) est croissante, donc $\forall n \geq n_0, un \geq u_{n_0}$
l est un majorant de (u_n) , donc $\forall n \in \mathbb{N}, un \leq l$

1.4.4 Partie entière

Définition 1.4.2
Soit x un réel, sa partie entière, notée E(x) est le plus grand des entiers relatifs inférieurs à x.
$E(x) = Max\{n \in \mathbb{Z}, n \leq x\}$
La partie entière d'un nombre est une localisation de ce nombre sur l'échelle des entiers, elle

trouve
son utilité lorsque l'on a à préciser un entier voisin d'un réel.

Exemple 1.4.1 (1.3) *=1 ,[-2.5]=-2*

Propriété 1.4.1

1. $\forall x \in \mathbb{R}, E(x) \leq x < E(x) + 1$
2. $\forall x \in \mathbb{R}, x - 1 < E(x) \leq x$
3. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, E(x + y) > E(x) + E(y)$
4. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, E(x + n) = E(x) + n$

Définition de la fonction partie entière

soit $x \in \mathbb{R}^+$
comme $\mathbb{R}$ est archémidien il existe un entier n tq $n + 1 \geq x$ i.e $n \geq x$
soit $A = \{p \in \mathbb{N}/p \leq x\}$, $A \neq \varnothing$ car $0 \in A$ et majorée par n,donc
A admet un plus grand élément que l'on appellera la partie entière du réel x .

Définition 1.4.3 *pour* $x \in \mathbb{R}^+$ *ona*
$E(x) = \max\{p \in \mathbb{N} \text{ } tq \text{ } p \leq x\}$

Remarque 1.4.1 *E(x) est un caractérisé par le fait que c'est l'unique entier n tq* $n \leq x \leq n+1$

1.4.5 Développement décimale illimité d'un nombre réel positif

soit $x_0 \in \mathbb{R}^+$ on définit la suite $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de la forme suivant :
$a_0 = E(x)$
pour $k \geq 1 a_k = E(10^k x) - 10E(10^{k-1}x)$
par exemple si $x = \pi = 3,141592\ldots$
on a $a_0 = 3$; $a_1 = E(10\pi) - 10E(x)$

$$\begin{aligned} a_1 &= 31 - 30 = 1 \\ a_2 &= 4 \\ a_3 &= 1 \\ a_4 &= 5 \text{ et } \ldots \end{aligned}$$

il est clair que $a_0 \in \mathbb{N}$ et $\forall k \geq 1$ $a_k \in \{0, 1, 2 \ldots 9\}$
par ailleurs si on pose $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k 10^{-k}$ on a
$\forall n \in \mathbb{N}, s_n \leq x \leq s_n + 10^{-n}$ $(s_n) \nearrow$ majorée par x donc $a = \lim_{n \to +\infty} s_n$
on a aussi $\lim_{n \to +\infty} ({s_n}^n + 10^{-n}) = a$,on a $x = a$
on dit que (a_k)est le développement décimale illimité de x et on écrira $x = \sum_{k=0}^{\infty} a_k 10^{-k}$ ou $x = a_0 a_1 \ldots$
Réciproquement
soit (a_k)une suite d'entiers naturels tel que $\forall k \geq 1, a_k \in \{0, 1, 2 \ldots 9\}$

la suite (s_n) définie par $s_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k 10^{-k}$ est croissante et majorée par exemple par $a_0 + 1$ donc convergente.

Chapitre 2

Étude topologique de l'ensemble $\mathbb{R}$

2.1 La densité des rationnels

Proposition 2.1.1 *Soient a et b deux réels avec $a < b$. Dans l'intervalle $]a, b[$, il existe au moins un rationnel r .*
On exprime cette propriété en disant que l'ensemble $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Remarque 2.1.1 *S'il y a au moins un rationnel r dans l'intervalle $]a, b[$ avec $a < b$, alors il y en a une infinité, puisqu'il y en a dans $]a, r[$ et un dans $]r, b[$, et en itérant le processus, on en trouve autant que l'on veut.*

L'ensemble des nombres irrationnels $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ possède la même propriété.
Corollaire : Pour tous nombres réels a, b tels que $a < b$, il existe un nombre irrationnel $c \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ (et donc une infinité) tel que $a < c < b$.
Démonstration : En effet, comme $a < b$, on $a \setminus \sqrt{2} < b \setminus \sqrt{2}$
il existe un nombre rationnel $r \in \mathbb{Q}$ tel que $a \setminus \sqrt{2} < r < b \setminus \sqrt{2}$, autrement dit $a < r\sqrt{2} < b$.
Comme $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, on en déduit que $r\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

2.1.1 $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$

Proposition 2.1.2 *entre deux nombres réels distincts, il existe un rationnel*

Preuve
Soient a et b deux réels, vérifiant $a < b$; on pose $l = b - a > 0$.
Si $\dfrac{a+b}{2}$ est rationnel, il convient car il vérifie $a < \dfrac{a+b}{2} < b$.
Si $\dfrac{a+b}{2}$ n'est pas rationnel, soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $10^{-k} < \dfrac{l}{2}$ le réel $\dfrac{a+b}{2}$ admet une approximation décimale à 10^{-k} près par défaut x_k et l'on a :

$$a < x_k < \frac{a+b}{2} < b \text{ , avec } x_k \in \mathbb{D}$$

2.2 Complétude

2.2.1 Non complétude de $\mathbb{Q}$

Définition 2.2.1

Une suite u de rationnels est dite de Cauchy ssi $\forall \epsilon > 0, \exists N(\epsilon)$ *tel que* $\forall n \geq N(\epsilon), \forall p \geq 0$, $|u_n + p - u_n| < \epsilon$.

Lemme : Il existe des suites de Cauchy de $\mathbb{Q}$ qui ne sont pas convergentes.

Preuve :

Considérons la suite $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^n}{n!}$ et démontrons qu'elle est de Cauchy.

$$\begin{aligned}
|u_{n+m} - u_n| &= |\sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{(-1)^k}{k!}| \leq \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \cdots + \frac{1}{(n+m)!} \forall n \geq 1, \forall p \geq 0 \\
&= \frac{1}{(n+1)!}(1 + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \ldots (n+m)) \\
&\leq \frac{1}{(n+1)!}(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^m}) \leq \frac{2}{(n+1)!}\underset{n \to +\infty}{\to} 0
\end{aligned}$$

Nous venons de démontrer que la différence $u_{n+m} - u_n$ est majorée en valeur absolue (usuelle) par une suite ne dépendant que de n et qui tend vers 0 donc la suite u est bien de Cauchy. Supposons qu'elle converge vers un rationnel $\frac{a}{b}$ avec $(a, b) = 1$.

Il est judicieux de remarquer que

$$u_{2n+2} - u_{2n} = \frac{1}{(2n+2)!} - \frac{1}{(2n+1)!} < 0$$

c'est-'a-dire que la suite $(u_{2n})_{n \geq 0}$ est strictement décroissante donc $\forall n \geq 0, \frac{a}{b} \leq u_{2n}$, que

$$u_{2n+3} - u_{2n+1} = \frac{-1}{(2n+3)!} + \frac{1}{(2n+2)!} > 0$$

c'est-'a-dire la suite (u_{2n+1}) est strictement croissante et puisque $u_1 = 1 - 1 = 0$, on en déduit l'inégalité

$$\forall n \geq 0, \qquad 0 \leq u_{2n+1} \leq \frac{a}{b}$$

. Des inégalités précédentes, on déduit l'encadrement suivant :

$$\forall n \geq 0, \qquad 0 \leq u_{2n+1} \leq \frac{a}{b} \leq u_{2n},$$

qui démontre en particulier que $\frac{a}{b}$ est positif donc on peut supposer dans la suite $a \geq 0$ et b > 0.

On multiplie l'inégalité précédente par $(2n)!$ et par b , ce qui nous donne $\forall n \geq 0, b \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k \frac{(2n)!}{k!} \leq a(2n)! \leq b \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \frac{(2n)!}{k!} \Leftrightarrow -\frac{b}{(2n+1)} \leq a(2n)! - b \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \frac{(2n)!}{k!} \leq 0.$

En particulier pour $2n+1 > b \Leftrightarrow n > \dfrac{b-1}{2}$,

on en déduit l'inégalité $\forall n > b-12, -1 < a(2n)! - b\displaystyle\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\frac{(2n)!}{k!} \leq 0.$

Le nombre $a(2n)! - b\displaystyle\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\frac{(2n)!}{k!}$ est toujours un nombre entier

(car $\dfrac{(2n)!}{k!} = (2n)(2n-1)..(k+1)$). Or le seul entier strictement plus grand que -1 et plus petit que 0 est l'entier 0, d'où l'inégalité $\forall n > \dfrac{b-1}{2}, a(2n)! - b\displaystyle\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\frac{(2n)!}{k!} = 0$, $u_{2n} = \dfrac{a}{b}$

Ainsi la suite $(u_{2n})_n$ est stationnaire ce qui est absurde car elle est strictement croissante.
Conclusion : la suite u est de Cauchy mais elle ne converge pas dans $\mathbb{Q}$ donc $(\mathbb{Q}, ||\ )$ n'est pas un espace métrique complet.
Le corps $\mathbb{Q}$ n'est donc pas complet pour la valeur absolue usuelle
En effet, pour construire de nouveau objets mathématiques (nombres, fonctions, etc) il est utile d'utiliser la notion de limite de suite.
L'idée génial de Louis-Augustin Cauchy fut d'introduire la notion de suite de Cauchy afin de s'affranchir de l'utilisation d'une limite "explicite".
En utilisant l'intuition que l'on avait à l'époque des réels (corps ordonné, il démontra que le corps des réels est complet c'est-à-dire qu'une suite réelle converge ssi elle est de Cauchy.
que les rationnels forment une partie dense de $\mathbb{R}$ c'est-à-dire tout réel est la limite (au sens de la valeur absolue archimédienne) d'une suite de rationnels, que la distance sur les rationnels est induite par la distance sur les réels.
Il est dés lors évident que deux suites convergentes (ou de Cauchy, ce qui semble être la même chose pour les réels),vont représenter le même réel ssi elles possèdent la même limite, c'est-à-dire que leur différence tend vers 0.

2.2.2 Complétude de l'ensemble réel $\mathbb{R}$

Théorème 2.2.1 $\mathbb{R}$ *est complet i.e toute suite de Cauchy est convergente*

Démonstration :soit (u_n) est une suite de Cauchy on sait que (u_n) est bornée
donc $(u_n) \subset [\alpha, \beta]$ on peut extraire une suite convergence $(u_{n_k}) \to l$ on montre qu'en fait $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$
soit $\varepsilon > 0, u_{n_k} \to l\ \exists k_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall k > k_0 : |u_{n_k} - l| < \frac{\varepsilon}{2}$
(u_n) étant de Cauchy $\exists q_0 \in \mathbb{N} : n \geqslant q_0, p \geqslant 0 |u_{n+p} - u_n| < \frac{\varepsilon}{2}$
posons $N_0 = max(n_{k_0}, q_0)$
soit $n \geqslant N_0$
appelons n_k le plus petit entier de la suite extraite qui si $r \geqslant N_0$ existe par définition de la suite extraite
On a dors :$|u_n - l| = |(u_n - u_{n_k}) + (u_{n_k} - l)| \leqslant |u_n - u_{n_k}| + |u_{n_k} - l|$ ou $|u_n - u_{n_k}| < \frac{\varepsilon}{2}$ car $n \geqslant q_0$ et $n_k \geqslant q_0$ et $|u_{n_k} - l| < \frac{\varepsilon}{2}$ car $x_k \geqslant n_{k_0}$
d'où $|u_n - l| < \varepsilon$

2.3 Théorème du point fixe

Théorème 2.3.1 *(théorème de point fixe)*
soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *une application strictement contractant i.e*
telle que $\exists k \in]0,1[, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$
$|f(x) - f(y)| \leqslant k|x-y|$ *alors* $\exists ! x \in \mathbb{R}$ *tq* $f(x) = x$

Démonstration :

unicité :

supposons l'existence de 2 points fixes x et $x'|f(x) - f(x')| \leqslant k|x-x'|$
$|x - x'| \leqslant k|x-x'|(k \in]0,1[)$ ce qui si $|x-x'| \neq 0$ alors $1 \leqslant k$ impossible car $0 < k < 1$ d'où $x = x'$

Existence

soit $x_0 \in \mathbb{R}$
on pose $x_1 = f(x_0).....x_{n+1} = f(x_n)$
Soit $p \in \mathbb{N}$
$|x_{p+1} - x_p| = |f(x_p) - f(x_{p-1}| \leqslant k|x_p - x_{p-1}|$
en itérant le possède on arrive á $|x_{p+1} - x_p| \leqslant k^p|x_1 - x_0|$
montrons que (x_n) est de Cauchy.
soit $\varepsilon > 0$

$$
\begin{aligned}
|x_{p+q} - x_p| &\leqslant |x_{p+1} - x_{p+q-1}| + |x_{p+q-1} - x_{p+q-2}| \\
&\qquad \vdots \\
&\qquad |x_{p+1} - x_p| \\
&\leqslant (k^{p+q-1} + k^{p+q-2} + ... + k^p)|x_1 - x_0| \\
&\leqslant k^p(k^{q-1} + k^{q-2} + ... + 1)|x_1 - x_0| \\
&\leqslant k^p\left(\frac{1-k^q}{1-k}\right)|x_1 - x_0| \xrightarrow[p,q \to +\infty]{} 0 \\
&\leqslant \frac{k^p}{1-k}|x_1 - x_0|
\end{aligned}
$$

$\exists p_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall p \geqslant n_0$ $\dfrac{k^p}{1-k}|x_1 - x_0| < \varepsilon$
donc $\exists p_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall p \geqslant p_0, q \geqslant 0 : |x_{p+q} - x_p| \leqslant \varepsilon$
$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suit de Cauchy est converge vers $x \in \mathbb{N}$
$x_{n+1} = f(u_n); f(x_{n+1}) \longrightarrow x$
$f(x_n) \longrightarrow f(x)$
$f(x) = x$

2.3.1 Remarque fondamentale

Il apparait dans la démonstration que le point crucial est le fouit que toute suite de Cauchy soit convergent le théorème reste valouse si on remplace $\mathbb{R}$ par une partie complète de $\mathbb{R}$
On sait que les fermés de $\mathbb{R}$ pour des partes complète .
On peut appliquer le théorème des point fixe a une fonction strictement contractant $f : I \longrightarrow I$ ou I est une intervalle fermé ($[a,b]$ ou $[a,+\infty[$ oú $]-\infty,a]$)

Théorème 2.3.2 *Soit* $f : I \longrightarrow I$, *oú* I *intervalle fermé de* $\mathbb{R}$
Si $\exists n \in \mathbb{N}, \exists k \in]0,1,[, \forall (x,y) \in I^2, |f^n(x) - f^n(y)| \leq k|x-y|$,
alors $\exists ! x \in I, f(x) = x$

[sachant, bien entendu, que la notation f^n désigne l'itérée n ième de
$f : f^n = f \circ f \circ ... \circ f$ (n fois)]
Démonstration : Le théorème fournit alors que la fonction f^n admet un seul point fixe i.e
$f^n(x) = x$
$|f^n(f(x)) - f^n(x)| \leqslant k|f(x) - x|$
$|f(f^n(x)) - f^n| \leqslant k|f(x) - x|$
$|f(x) - x| - f^n(x) \leqslant k|f(x) - x|$ donc $1 \leqslant k$
n'est possible que si $f(x) - x = 0$ i.e $f(x) = x$

2.4 Le théorème des segments emboîtées

Théorème 2.4.1 *(Théorème des segments emboîtes)*
Soit (I_n) *une suite décroissante d'intervalles fermés i.e.* $I_n = [a_n, b_n]$,
avec $a_n \leq b_n$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} \subset I_n$ *oú* $long = b_n - a_n$

$$Si \lim_{n\to\infty} long I_n = 0 \text{ ,} alors \bigcap_{n=0}^{\infty} I_n = \{x\}$$

Démonstration :
<u>Unicité :</u>

$$\text{Soient } x, y \in \bigcap_{n=0}^{\infty} I_n$$

Si $x \neq y$,posons $|x-y| = \varepsilon > 0$

$$\text{Comme } \lim_{n\to\infty} long I_n = 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, long I_n < \varepsilon$$

mais $x, y \in I_{n_0}$,donc $|x-y| \leq long I_{n_0} < \varepsilon$
d'où $\varepsilon < \varepsilon$, contradiction.
<u>Existence :</u>
On a $(a_n) croissante$
(b_n) décroissante
$\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq b_n$ et

$$\lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$$

D'après le théorème des suites adjacentes,(a_n) et (b_n) sont convergentes de même limite x.
donc $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq x \leq b_n$
i.e. $\forall n \in \mathbb{N}, x \in [a_n, b_n]$

$$x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} I_n$$

2.5 La connexité

2.5.1 Intervalles

Les intervalles de $\mathbb{R}$ jouent un rôle fondamental dans l'étude des fonctions numériques (fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$), tant du point de vue global (ensemble de définition) que local (voisinage) : ce sont les parties connexes, c'est à dire d'un seul tenant, de $\mathbb{R}$

Définition 2.5.1 $\forall a \in I, \forall b \in I, a \leq b, \forall x \in \mathbb{R}(a \leq x \leq b) \Longrightarrow x \in I)$

On remarque que l'ensemble vide $\emptyset$ est un intervalle. La propriété de la borne supérieure (resp inférieure) permet de classer les intervalles non vides de $\mathbb{R}$ en neufs types distincts suivant l'existence ou non d'un majorant, d'un minorant, d'un plus grand, d'un plus petit élément.
On montre ainsi que l'ensemble des intervalles de $\mathbb{R}$ est constitué par $\emptyset$
intervalles bornés : (on désigne par a et b des réels $a < b$)
intervalles ouverts bornés $]a, b[= \{x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$
intervalles semi-ouverts bornés $[a, b[= \{x \in \mathbb{R}, a \leq x < b\}$ ou $]a, b] = x \in \mathbb{R}, a < x \leq b$
intervalles fermés bornés $[a, b] = \{x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}$.
intervalles non bornés : (on désigne par a et b des réels)

- minorés, non majorés :
  avec minimum $[a, +\infty[$ intervalles fermés non bornés
  - sans minimum $]a, +\infty[$ intervalles ouverts non bornés
- majorés, non minorés :
  - avec maximum $]-\infty, b]$ intervalles fermés non bornés
  - sans maximum $]-\infty, b[$ intervalles ouverts non bornés
- non minoré, non majoré : $]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$.

Par exemple, montrons qu'un intervalle borné ayant un plus petit élément mais pas de plus grand élément est de la forme $[a, b[$.
Soit I un tel intervalle, a son plus petit élément, b sa borne supérieure, alors
tout x réel vérifiant $x < a$ n'appartient pas à I,
tout x réel vérifiant $x = b$ n'appartient pas à I,
l'intervalle I est inclus dans $[a, b[$ et tout x de $[a, b[$ appartient à I, d'où $I = [a, b[$.
Les intervalles $]a, b[$ et $[a, b](b > a)$ peuvent être encore définis de la façon suivante :

$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} | x - \frac{a+b}{2}| < \frac{b-a}{2}\}$$
$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} | x - \frac{a+b}{2}| \leq \frac{b-a}{2}\}$$

Le réel $\frac{a+b}{2}$ est le centre de l'intervalle ,$\frac{b-a}{2}$ est le rayon.

2.5.2 Non connexité de $\mathbb{Q}$

Théorème 2.5.1 $\mathbb{Q}$ *n'est pas connexe*

Démonstration : Soit $a \notin \mathbb{Q}$. Posons $O_1 =]-\infty, a[$ et $O_2 =]a, +\infty[$.
$O_1 et O_2$ sont deux ouverts disjoints de $\mathbb{R}$, qui recouvrent $\mathbb{Q}$ car $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \setminus \{a\}$.

Comme $\mathbb{Q} \cap O_1 \neq \emptyset \neq \mathbb{Q} \cap O_2$,
on en déduit que $\mathbb{Q}$ n'est pas connexe.

2.5.3 Connexité de $\mathbb{R}$

Définition 2.5.2 *On dit qu'une partie E de $\mathbb{R}$ est connexe si on ne peut pas la diviser en deux ouverts disjoints et non vides.*

Autrement dit, E est non connexe s'il existe A non vide et distinct de E, tel que A soit à la fois ouvert et fermé dans E.

Proposition 2.5.1 *Un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ est connexe si et seulement si c'est un intervalle.*

preuve :un sous ensemble connexe E de $\mathbb{R}$ a la propriété suivante : pour tous $a, b \in E,]a, b[\subset E$
Autrement dit, il est convexe.
Inversement, soit I un intervalle. Soient A et B des parties non vides de I , disjointes, telles que $A \cup B = I$. Soit $a \in A$ et $b \in B$. Quitte à échanger A et B, on peut supposer que $a < b$. On considère $c = \sup\{x \in A \backslash x < b\}$. Comme $a \leq c \leq b, c \in I$. De l'une des caractérisation de la borne supérieure, il résulte qu'il existe une suite (x_n) de points de A qui converge vers c. D'autre part, ou bien $c = b \in B$, ou bien l'intervalle $]c, b[$ est entièrement contenu dans B. Dans les deux cas, il existe une suite (y_n) de points de B qui converge vers c. Par conséquent, l'un des ensembles A et B n'est pas fermé.

2.5.4 Valeur intermédiaire

I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$, non réduit à un point.

Théorème 2.5.2 *(des valeurs intermédiaires)*
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application continue et a et b deux éléments de I tels que $a < b$ et $f(a) \leq f(b)$.
Alors

$$\forall y \in]f(a), f(b)[, \exists x \in]a, b[, f(x) = y$$

Preuve : (Par dichotomie)
On suppose $f(a) < f(b)$ et$m \in]f(a), f(b)[$.
On va définir par récurrence deux suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ et considérer une suite auxiliaire $(c_n)_n$ définie pour $n \geq 0$ par
$c_n = \dfrac{a_n + b_n}{2}$ de la manière suivante :

i) $a_0 = a, b_0 = b$ (donc $c_0 = \dfrac{a+b}{2}$).

- Si $f(c_0) < m$, on pose $a_1 = c_0$ et $b_1 = b_0$.
- Si $f(c_0) \geq m$ on pose $a_1 = a_0$ et $b_1 = c_0$.

de sorte que $a_0 \leq a_1, b_1 \leq b_0, f(a_1) < m \leq f(b_1), b_1 > a_1$ et $(b_0 - a_0) = 2(b_1 - a_1)$.

ii) On suppose qu'au rang $n \geq 1$ on a des réels $a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_netb_n \leq \cdots \leq b1 \leq b_0$ tels que pour tout $k = 1, \cdots, n, f(a_k) < m \leq f(b_k), b_k > a_k$ et $(b_{k-1} - a_{k_1}) = 2(b_k - a_k)$. Au rang $n + 1$:

- Si $f(c_n) < m$ on pose $a_{n+1} = c_n$ et $b_{n+1} = b_n$.
- Si $f(c_n) \geq m$, on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = c_n$.

On a alors $f(a_{n+1}) < m \leq f(b_{n+1}), b_{n+1} > a_{n+1}$ et $(b_n - a_n) = 2(b_{n+1} - a_{n+1})$.
Les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ ainsi construites permettent d'obtenir la suite $([a_n, b_n])_n$ de segments emboités dont la longueur tend visiblement vers 0.
Soit alors c l'unique élément de $\cap_{n\in\mathbb{N}}[a_n, b_n]$.
On a $\lim_{n\to\infty} a_n = c$ et $\lim_{n\to\infty} b_n = c$ donc $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(c)$ et $\lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(c)$ car f est continue .
Mais comme $f(a_n) < m \leq f(b_n)$, par passage à la limite on obtient $f(c) = m$.
Maintenant $c \in [a, b]$ mais c , a et c , b car $f(a) < f(c) < f(b)$, donc $c \in]a, b[$.
Le cas $f(a) > f(b)$ se ramène au précédent en considérant la fonction $-f$.

2.5.5 Composantes connexe

Définition 2.5.3 *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}$, et $x \in U$. On appelle composante connexe de x dans U la réunion de tous les intervalles ouverts contenant x et contenus dans U .*

Exemple 2.5.1
$\mathbb{R}^*$ *n'est pas connexe .*
$\mathbb{R}^*_- =]-\infty, 0[$ *est la composant connexe de tout nombre* $p \in \mathbb{R}^*_-$
$\mathbb{R}^*_+ =]0, +\infty[$ *est la composant connexe de tout nombre* $p \in \mathbb{R}^*_+$

conclusion

Les nombres réels sont intéressants dans tous les domaines par exemple,
dans le domaine mathématique, on les utilise pour étudier la convergence des séries et résoudre certaines équations linéaires et non linéaires de plus ils sont utilisés pour calculer les distances. Dans ce travail, nous avons exposé deux aspects essentiels de l'étude de ces nombres.

1. Le premier, intitulé "Étude algébrique des nombres réels", nous a permis propriétés des lois de composition sur $\mathbb{R}$. Il permet aussi un accès plus direct à certaines propriétés algébrique fondamentales de $\mathbb{R}$.

2.Le second,que nous avons intitulé "Étude topologique des nombres réels " que $\mathbb{Q}$ est insuffisant dans la topologie.Il est nécessaire de la compléter par les nombres irrationnels. Cette étude est traduit par le fait que $\mathbb{R}$ est complet. Cet aspect de completion ou de complétude trouvera des généralisations pour certains espaces fonctionnels. Le plus fonda- mental étant l'espace des atomes L^2 ([a, b])qui est complet pour la 2-norme par construction.

Bibliographie

[1] Analyse réelle ,CAPES de Mathématiques—Le Mans 2009/2010 Version 2.0 Bruno Deschamps

[2] Benchata Abdellah, www.mathématiques.fr.st

[3] TOPOLOGIE DE LA DROITE REELLE ,P. Pansu ,16 mai 2005

[4] Topologie de $\mathbb{R}$ et de $\mathbb{C}$,MP 25 octobre 2012

[5] Wieslawa J. Kaczor, Maria T. Nowak ,NOMBRES RÉELS, DROITE RÉELLE A. Decomps