Remerciement

En préambule à ce mémoire nous remercions ALLAH qui nous aide et nous donne la patience et le courage durant ces années d'étude.

Tout le respect et les mots de remerciement à notre encadreur "CHOUCHA ABD EL BAKI " pour son soutien, son aide, ses conseils directifs, et sont suivi durant la réalisation de ce mémoire de fin d'étude.

Nous remercions l'examinateur Monsieur " LATRACHE SMAIL" , et nous n'oublions pas " Dr GERBATI KADDOR" à ses efforts pour ouvrir branche.

Nous remercions les enseignants qui participé à notre formation et les étudiants du département de Mathématique et de Informatique de d'université de Ghardaïa.

Enfin, nous remercions chaleureusement tous les membres de nos famille, surtout nos pères et nos mères, et tous ceux qui nous aidé de prés ou de loin durant la réalisation de ce travail.

Dédicace

Je dédié ce modeste travail premièrement à DIEU qui ma donné force et vitalité afin d'avoir pu réaliser mes rêves de ce diplôme puis à mes très chère parents ma mère et mon père . en ses tendresses encouragement durant mes études.

A mes Sœurs :Fatma , Aicha ,Bouchra et nôme Rihame Yakine

A mon beau-frère : Abd el kader .

A mes amies et mon amie intime: Om kalthoum.

A toutes mes Sœurs dans le Dieu.

Enfin, je suis reconnaissante à toute personne ayant contribué de près ou de loi à la réalisation de ce travail.

Samia

Dédicace

Avant tous je remercie mon DIEU qui m'a donné la volonté de continuer ce travail.

A qui me remplit par son amour, sa tendresse à qui n'hésite pas de me donner et d'offrir son ma mère ,ma chére.

A qui m'offre tons ce que j'ai besoin pour réaliser ce travail, mon père .

A tous qui ont partagés avec moi, ma joie, mes temps heureux et malheureux : mon frère : Lakhdar , Mohamed, Seghir et mon Sœurs : Fatiha , Sacia.

A qui a resté les veilles pour le sucé de travail : Choucha Abd elbaki.

A mon binômes fidèle : Samia

Atout la famille avec chaque son nom à Geurrara surtout la famille : NOUACER, BOUHANIA.

A mes amies fidèles : Naima, Soumia, Assai, Mbarka, Fatiha, Salma, Hasna, Om elkhir.

A mon professeure : Ouled Naoui Slimane.

A tout qui me connais et je le connais.

Oum kalthoum

Table des matières

Introduction

On applique dans ce rapport le théorème de point fixe de volterra au problème de Cauchy définie par une équation différentielle d'ordre 1, étant données une condition initiale $y(t_0) = y_0$ et une équation définie par : $y'(t) = f(t, y(t))$,existe-il une solution ? et est-elle unique ?
Les réponses à ces questions ,on reparti ce travail en quatre chapitres :

Dans le premier chapitre,on commence par donner des définitions ,ainsi que quelques résultats connus qui nous seront utiles dans la suite du mémoire.

Dans le deuxième chapitre,on commence par poser le problème de Cauchy et on étude l'existence et l'unicité de ce problème.

Dans le troisième chapitre,nous étudions quelques théorèmes du point fixe (théorème générale ,théorème de Picard et théorème de Volterra).

Dans le quatrième chapitre,on applique le théorème de Volterra au problème de Cauchy étant donnés un ensemble E et une application $f : E \to E$ on s'intéresse à donner des conditions sur f .

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Historique

Le mathématicien italien Vito Volterra nait le 03 mai 1860 à Ancône et mort le 11 octobre 1940 à Rome. il se passionne pour les mathématiques dès onze ans, lisant notamment la Géométrie de Legendre et l'arithmétique de Bertrand.À 13 ans, après avoir lu le livre de Jules Verne de la Terre à la Lune,il cherche à calculer la trajectoire d'un projectile balistique de la Terre vers la Lune en considérant les champs gravitationnels de la Terre et de la Lune1.Il développa ainsi une approche visant à considérer une multitude de très courts intervalles de temps à l'intérieur desquels il pouvait faire de plusieurs paramètres des constantes.Il s'agit des premiers balbutiements du développement des équations intégro-différentielles .

Il travail d'assistant dans un laboratoire de physique de l'Université de Florence,qui lui permet de pour suivre parallèlement ses études.Après ses études à Florence,il entre à l'université de Pise en 1878.Il obtient son était doctorat en physique.En 1882,réalisé sous la direction d'Enrico Betti.La thèse porté sur l'hydrodynamique et permit de redécouvrir certains résultats de Stokes.Il est nommé professeur en mécanique rationnelle à l'université de Pise en 1883.Il s'intéresse cette époque aux équations fonctionnelles,et notamment aux opérateurs intégro-différentiels. Prédécesseur de Fréchet et Banach, il est considéré comme l'un des fondateurs de l'analyse fonctionnelle.À la mort de Betti en 1883, il devient professeur de physique mathématique,toujours à Pise.Il occupe ensuite la chaire de mécanique à Turin,avant d'être nommé à la chaire de physique mathématique à

Rome en 1900.En 1905, il devient sénateur du royaume d'Italie,ce qui lui vaut de siéger à vie dans la plus haute chambre du parlement italien. A la même époque,il s'intéresse aux phénomènes de dislocation du cristal.

Volterra est l'un des pères de l'analyse fonctionnelle.Il s'intéresse ainsi aux fonctionnelles (qu'il appelle des fonctions de ligne),qui sont des fonctions définies non pas sur l'ensemble des nombres réels, mais sur des ensembles de fonctions.Il est notamment le fondateur de la théorie des équations intégrales,et publie quelques articles sur les équations aux dérivées partielles.En 1914,il a rejoint les forces aériennes italiennes dans le corps des ingénieurs,et travaillait à l'amélioration technologique de la guerre aérienne.Il travaille au développement des dirigeables avec le général Douhet,étudie les possibilités d'armer les engins aériens et de remplacer l'hydrogène inflammable par de l'hélium.Il travaillait également à l'amélioration des modèles d'avions.

Le nom de Volterra est aussi attaché aux équations de Lotka-Volterra, qui décrivent l'évolution de la population de deux espèces,la proie et son prédateur.Ce n'est qu'assez tardivement,à partir de 1925,à la demande de son futur gendre Ancona,que Volterra s'intéresse à des modèles biologiques.Ancona se demandait pourquoi,après la Première Guerre Mondiale,alors que la pêche avait beaucoup diminué,c'est le nombre des prédateurs (les requins) plus que celui des proies (les sardines) qui avait augmenté dans l'Adriatique. Les équations de Lotka-Volterra permettent d'expliquer cela.

Volterra est la seule personne qui était conférencier en séance plénière au Congrès international des mathématiciens à quatre reprises (1900,1908,1920,1928).Son travail est résumé dans son livre Théorie de fonctionnelles et de Intégral et équations intégro-différentielles(1930).

1.2 Espace Métrique

Définition 1.2.1

Un espace métrique est un couple constitué par un ensemble non vide E et par une distance d sur E.On dit souvent que E est muni de la distance d.

Définition 1.2.2

On appelle distance associée à la norme sur E l'application $d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ *définit par* $d(x, y) = \|y - x\|$.

Proposition 1.2.3

- $\forall x, y \in E, d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ *(séparation),*
- $\forall x, y \in E, d(x, y) = d(y, x)$ *(symétrie),*
- $\forall x, y, z \in E, d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ *(inégalité triangulaire),*
- $\forall x, y, z \in E, d(x + z, y + z) = d(x, y)$ *(invariance par translation).*

Définition 1.2.4

Soit x *un vecteur de* E *et* A *une partie non vide d'un espace vectoriel normé* E *. On appelle distance de a à A. le réel* $d(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y)$.

Définition 1.2.5

Soit A *une partie bornée non vide de* E*.On appelle diamètre de* A *le réel* $\delta(A) = \sup_{x,y \in A} d(x, y)$.

1.2.6 Espace Métrique Complet

Définition 1.2.7

Un espace métrique (E, d) *est dit complet ssi toute suite de Cauchy*[1] *de E converge (c'est-à-dire ssi les suites convergentes de E sont les suites de Cauchy de E).*

Un K-evn E est dit complet (on l'appelle alors un K-evn de Banach) ssi c'est un espace métrique complet.

Une partie F *d'un espace métrique* (E, d) *est dite complète ssi,regardée comme sous-espace métrique de* E*, c'est un espace métrique complet.*

Théorème 1.2.8

Tout K-espace vectoriel normé E de dimension finie est complet.

1. Augustin Louis Cauchy ,né le 21 1789 à Paris et mort le 23 mai 1857 à Sceaux, est le mathématicien Français le plus prolifique. Son œuvre scientifique renferme plus de 800 articles sur les sujets mathématiques physique les plus variés. Il est à l'origine de l'analyse moderne . On lui doit notamment la théorie des équations différentielles.

1.3 Espace de Banach

Commençons par rappeler les définitions et les propriétés d'un espace vectoriel normé et les applications linéaires.

1.3.1 Espaces Vectoriels Normés

Tous les espaces vectoriels sont relatifs au corps $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 1.3.2

Soit E un espace vectoriel.On appelle norme sur E toute application N de E dans $\mathbb{R}_+$,vérifiant :

1. $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$ *[séparation] ;*
2. $\forall x \in E, \forall \lambda \in K \|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ *[homogénéité] ;*
3. $\forall x \in E, \forall y \in E : \|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ *[inégalité triangulaire ou inégalité de convexité].*

Notation :

Quand il n'y a pas d'ambiguïté ,on note : $N(X) = \|x\|$

Définition 1.3.3

Un espace vectoriel muni d'une norme est appelé espace vectoriel normé.

Propriétés 1.3.4 $\forall x \in E, \forall y \in E : \|x-y\| \geq |\|x\|-\|y\||$ *[seconde inégalité triangulaire]*

Démonstrations 1.3.5

on a :

$$y = y - x + x \Longrightarrow \|y\| = \|y - x + x\| \leqslant \|y - x\| + \|x\|.$$

D'où :

$$\|y\| - \|x\| \leqslant \|y - x\| \qquad (*)$$

De même,on a :

$$x = x - y + y \Longrightarrow \|x\| = \|x - y + y\| \leqslant \|x - y\| + \|y\|.$$

D'où :

$$\|x\| - \|y\| \leqslant \|x - y\|. \qquad (**)$$

Les intégralités (*) et (**), prises simultanément,donnent l'égalité cherchée.

1.3.6 Suite de Cauchy

Définition 1.3.7 (suite)

Soit E un espace vectoriel normé. On appelle suite de E toute application de $\mathbb{N}$ (ou d'une partie de $\mathbb{N}$ dans E.

Définition 1.3.8 (convergence d'une suite)

Soit (u_n)une suite d'un espace vectoriel normé E. On dit que la suite (u_n) converge vers élément l de E si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0, \|u_n - l\| \leqslant \epsilon.$$

C'est-à-dire :la suite numérique $(\|u_n - l\|)$ converge vers 0.

On note :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = l.$$

On appelle suite divergente toute suite qui ne converge pas.

Définition 1.3.9

Soit E un espace vectoriel normé.On dit que la suite (u_n) de E est suite de Cauchy si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall p \geq n_0, \forall q \geq n_0, \|u_p - u_q\| \leq \epsilon.$$

Propriétés 1.3.10

Tout suite convergente est une suite de Cauchy.

Tout suite Cauchy est bornée.

Espace de Banach

Cette notion d'espace normé complet est introduite aux alentours de 1922 par S.Banach [2]et N.Wiener [3] indépendamment l'un de l'autre.

Définition 1.3.11

Un espace vectoriel normé E est dit complet si toute suite de Cauchy de E est convergente dans E.On dit aussi que E est un espace de Banach.

Espace complet

Définition 1.3.12

Un espace métrique (E, d) est dit complet ssi toute suite de Cauchy de E converge (c'est-à-dire ssi les suites convergentes de E sont les suites de Cauchy de E).

Un K-e-v-n E est dit complet ssi c'est un espace métrique complet.

Une partie F d'un espace métrique (E, d) est dite complète ssi, regardée comme sous-espace métrique de E, c'est un espace métrique complet.

Théorème 1.3.13 *[11]*

Soit $(E, \|.\|)$ un espace de Banach sur $\mathbb{K}$. Si une série, de terme général u_n, est normalement convergente, elle est convergente. De plus, on a la majoration suivante :

$\| \sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n\| \leqslant \sum\limits_{n=0}^{\infty} \|u_n\|$

Démonstrations 1.3.14

Par hypothèse,la série de terme général $\|u_n\|$ est convergente,ce qui signifie que la suite $s_n = \|u_0\| + \|u_1\| + ... + \|u_n\|$ est convergente,donc de Cauchy :

$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}^*$:

$$n \geq N \Longrightarrow 0 \leq s_{n+p} - s_n = \|u_{n+1}\| + \|u_{n+2}\| + ... + \|u_{n+p}\| \leq \varepsilon.$$

D'où l'on déduit que pour tout $n \geq N$,tout $p \in \mathbb{N}^*$:

$$\|s_{n+p} - s_n\| = \|u_{n+1} + ... + u_{n+p}\| \leq \|u_{n+1}\| + ... + \|u_{n+p}\| = s_{n+p} - s_n \leq \varepsilon.$$

2. Stefan Banach est un mathématicien Polonais, né le 30 mars 1892 à Krakow et mort le 31 aout 1945 à Lvov,(actuelle Ukraine).Il a publié son premier travail avec Steinhauss en 1918 . Il a soutenu sa thèse en 1922 . Elle portait sur la théorie de la mesure . C'est en 1920 qu'il définit axiomatique ce qui est appelé aujourd'hui l'espace de Banach.

3. Norbert Wiener ,mathématicien américain ,est né le 26 novembre 1894 à Columbia (USA) et mort le 18 mars 1964 à Stockholm.Il était chercheur en mathématiques appliquées ,connu ,entre autre ,pour être le fondateur de la cybernétique . Il fut un pionnier dans l'étude de la stochastique et du bruit et a contribué à l'électrotechnique ,les télécommunication et les systèmes de contrôle.

Par conséquent ,$(s_n)_n$ *est une suite de Cauchy dans* E *espace de Banach : elle converge donc dans* E.
la série de terme général u_n *est donc convergente dans* E.
On a pour tout n *:*

$$\|s_n\| = \|u_0 + u_1 + ... + u_n\| \leq \sum_{k=0}^{n} \|u_k\| = s_n.$$

On passe à la limite quand $n \longrightarrow \infty$*, en se rappelant que la norme est une fonction continue et en utilisant le prolongement des inégalités :*

$$\lim_{n\to\infty}(\|s_n\|) = \|\sum_{n=0}^{\infty} u_n\| \leq \lim_{n\to\infty}(s_n) = \sum_{n=0}^{\infty}\|u_n\|.$$

Théorème 1.3.15

Soit la série $\sum\|u_n\|$.*si*$\sum\|u_n\|$ *est converge ,alors* $\lim\limits_{n\to\infty}(\|u_n\|) = 0$

Démonstrations 1.3.16

$S_n = \|u_0\| + \|u_1\| + ... + \|u_n\|$

$S_{n-1} = u_0 + ... + u_{n-1}$

$S_n - S_{n-1} = u_n \Longrightarrow \lim S_n - \lim S_{n-1} = \lim u_n$

$\Longleftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} u_k - \sum\limits_{k=1}^{n-1} u_k\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

$\Longleftrightarrow S - S = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\|u_n\| = 0$

1.4 Applications Linéaires

Définition 1.4.1

Soit E et F deux espaces vectoriels sur le corps K . une application f , de E dans F ,est dite linéaire si elle vérifie les deux propriétés :

$\forall x \in E, \forall y \in F f(x+y) = f(x) + f(y);$

$\forall x \in E, \forall \lambda \in K f(\lambda x) = \lambda f(x).$

une application linéaire de E dans le corps K .considéré comme espace vectoriel sur lui-méme ,est appelée forme linéaire sur E.

Théorème 1.4.2 *[1]*

Soient E et F deux espaces normés sur le même corps $f : E \to F$ une application linéaire. Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) f est continue en tout point ;

b) f est continue à l'origine ;

c) $\sup\limits_{\|x\| \le 1} \|f\| < +\infty$ *(autrement dit : l'image de la boule unité de E est bornée) ;*

d) $\sup\limits_{\|x\| = 1} \|f\| < +\infty$ *(autrement dit : l'image de la sphère unité de E est bornée) ;*

e) il existe une constante M telle que $\|f(x)\| \le M\|x\|$ *pour tout* $x \in E$.

Démonstrations 1.4.3

Évidemment $a \Rightarrow b$.

Montrons $b \Rightarrow c$ *:il existe* $\delta > 0$ *tel que* $|x| \leqslant \delta \Longrightarrow \|f(x)\| \le 1$.

Alors $\|x\| \le 1 \Longrightarrow \|\delta.x\| \le \delta \Longrightarrow \|f(\delta.x)\| \le 1 \Longrightarrow \|f(x)\| \le \delta^{-1}$. *Évidemment* $c \Rightarrow d$.

Montrons que $d \Rightarrow e$ *: soit* $M = \sup\limits_{\|x\|=1} \|f(x)\|$. *Si* $x \neq 0, x/\|x\|$ *est de norme 1, donc*

$$\frac{\|f(x)\|}{\|x\|} \le M \Longrightarrow \|f(x)\| \le M.\|x\|$$

Inégalité encore vérifiée si $x = 0$.

Enfin $e \Rightarrow a$ *résulte de*

$$\|f(x) - f(y)\| = \|f(x-y)\| \le M.\|x-y\|$$

Norme d'une application linéaire continue.

Le nombre $\sup\limits_{\|x\|=1} \|f(x)\|$ s'appelle norme de f et se note $\|f\|$.

La preuve précédente de $d \Longrightarrow e$ montre que $\|f(x)\| \le \|f\|.\|x\|$ pour tout $x \in E$.

Montrons que les application linéaire continue f de E dans F forment un espace vectoriel noté $\mathcal{L}(E,F)$,et que $f \rightsquigarrow \|f\|$ est une norme (ce qui justifiera son application).
Soient $f; g \in \mathcal{L}(E,F), six \in E, \|x\| = 1$,on a :

$$\|(f+g)(x)\| = \|f(x)+g(x)\| \leqslant \|f(x)\| + \|g(x)\| \leqslant \|f\| + \|g\|$$

donc$f + g$ est continue et

$$\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|.$$

D'autre part , si

$$K \in \mathbb{K}, \|(K.f)(x)\| = \|K.f(x)\| = |K|.\|f(x)\|,$$

d'où

$$\sup_{\|x\|=1} \|(K.f)(x)\| = |K|. \sup_{\|x\|=1} \|f(x)\|,$$

c'est -à-dire

$$\|K.f\| = |K|.\|f\|.$$

Enfin $\|f\| = 0 \Longrightarrow f(x) = 0$ pour tout $x \Rightarrow f = 0$.

Remarque 1.4.4

par récurrence sur n, on déduit de la définition de la linéarité de f que ,si $x_1, ..., x_n$ sont des éléments de E et $\lambda_1, ..., \lambda_n$ des éléments de K $f(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$.

Chapitre 2

Problème de Cauchy

2.1 Équations Différentiels Du Premier Ordre

Il s'agit d'équations de la forme

$$\alpha(t)y'(t) + \beta(t)y(t) = \gamma(t). \tag{2.1}$$

On rappelle que :

- si $\gamma(t) = 0$ pour tout t, on dit que l'équation est homogène ou "sans second membre"
- si $\alpha(t) = 1$ pour tout t, on dit que l'équation est résolue.

si α ne s'annule pas,alors (2.1) est équivalente à :

$$y'(t) + \frac{\beta(t)}{\alpha(t)}y(t) = \frac{\gamma(t)}{\alpha(t)}. \tag{2.2}$$

qui est résolue par contre, si α s'annule en un point t_0 par exemple, on est obligé de résoudre (2.1) à droite et à gauche de t_0 puis chercher les solutions de (2.1)en recollant les morceaux trouvés précédemment.

Définition 2.1.1

On appelle problème de Cauchy le problème qui consiste à trouver une solution de l'équation :

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{2.3}$$

Exemple 2.1.2

soit le problème suivant : $\begin{cases} y'^2 = 4y \\ y(-1) = 0 \end{cases}$

la solution du problème de Cauchy est la fonction $y = (x+1)^2$ *en effet :*
$y' = 2(x+1)$ *on substitue dans l'équation on obtient :*

$$(2x+2)^2 - 4(x+1)^2 = 4(x+1)^2 - 4(x+1)^2 = 0$$

$y(-1) = (-1+1)^2 = 0$ *Donc* $y = (x+1)^2$ *est solution du problème de Cauchy.*

2.2 Existence et Unicité

soit l'équation différentiable $y' = f(x,y)$définie sur I.

2.2.1 Cauchy-Lipschitz

Définition 2.2.2
On dit que la fonction $f(x,y)$ *définie sur* I *est* **Lipschitzienne** *en* y *s'il existe une constante* K *telle que* $\forall (x,y_1) \in I; (x,y_2) \in I$

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq K|y_1 - y_2|$$

K *est appelé constante de Lipschitz*[1].

Exemple 2.2.3
soit $f(x,y) = 2ycos(x)$.
vérifie que $f(x,y)$ *est Lipschitzienne en* y *?*
solution :
$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| = |2y_1cos(x) - 2y_2cos(x)| = |2(y_1 - y_2)cos(x)| = |2cos(x)||y_1 - y_2| \leq 2|y_1 - y_2|$.
donc $f(x,y)$ *est Lipschitzienne en* y *avec* $K = 2$.

1. Rudolf otto sigismund Lipschitz est un Mathématicien Allemand né le 14 Mai 1832 à Konigsberg ,Allemagne (actuelle Kaliningrad,Russie)et mort le 7 Octobre 1903 à Bonn.
Ses champs d'investigation sont larges.Ils vont de la théorie des nombres,des fonctions de Bassel et des séries de Fourier,des équations différentielles ordinaires et aux dérivées partielles à la mécanique analytique et la théorie du potentiel.

Théorème 2.2.4 *(Cauchy-Lipschitz)[3]*
Si $f \in C([a,b])$et si f vérifie la condition

$$\forall x \in [a,b], \forall y_1 \in C([a,b]), \forall y_2 \in C([a,b]), \exists K > 0$$

tel que

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq K|y_1 - y_2|$$

Alors,le problème de Cauchy lequel admet une solution et une seule sur [a, b] (et ceci pour tout $y_0 \in R$).

Exemple 2.2.5

$$(1) = \begin{cases} y' = 1 + x^2 + y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Montrer que le problème (1) admet une solution unique ?

solution :
On a $y < b$,$z < b$

$$\|f(x,y) - f(x,z)\| = \|1 + x^2 + y^2 - 1 - x^2 - z^2\|$$

$$= \|y^2 - z^2\| = \|(y+z)(y-z)\| \leq \underbrace{|2b|}_{K} \|y - z\|$$

Donc le problème(1) admet un seule solution.

Théorème 2.2.6
Le problème de Cauchy admet une unique solution globale l'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension n.

2.2.7 L'inégalité de Gronwall

lemme 2.2.8 *[10]***Gronwall** [2]

Pour $K \geq 0$ *et* f, g *sont continues et positifs sur* $\alpha < x < \beta$ *et vérifient :*
$f(x) \leq K + \int\limits_{\alpha}^{x} f(s)g(s)ds.$
Alors $f(x) \leq Ke^{\int\limits_{\alpha}^{x} g(s)ds} \forall \alpha < x < \beta$

Démonstrations 2.2.9 *soit* $K \geq 0$ *et* $h'(x) = f(x)g(x)$

$$f(x) \leq K + \int_{a}^{x} f(s)g(s)ds = h(x) ...(1)$$

$$f(x) \leq h(x)$$

$$\Longrightarrow f(x)g(x) \leq h(x)g(x)/g(x) > 0$$

$$\Longleftrightarrow h'(x) \leq h(x)g(x) \Longrightarrow h'(x) - h(x)g(x) \leq 0$$

$$\overset{\times e^{-\int\limits_{a}^{x} g(s)ds}}{\Longrightarrow} \quad e^{-\int\limits_{a}^{x} g(s)ds}[h'(x) - h(x)g(x)] \leq 0$$

$$[h(x)e^{-\int\limits_{a}^{x} g(s)ds}] \leq 0$$

par Intégration $\int\limits_{a}^{x}$ *:*

$$h(x)e^{-\int\limits_{a}^{x} g(s)ds} \leq h(a)$$

2. Hakon Gronwall (1877-1932), mathématicien suédois.Il diplôme en 1898, sa thèse porte On system of linear total differential equations particularly with 2n-periodic coefficients.En mathématiques, ses travaux portent sur l'analyse (séries de Fourier , phénomène de Gibbs , séries de Laplace et de Legendre), équations différentielles et intégrales, théorie des nombres, fonctions complexes, géométrie différentielle, physique mathématique .Il est surtout connu pour le lemme (ou inégalité) de Gronwall, le théorème de Gronwall et par sa méthode de sommation des séries (qui généralise celles de La Vallée Poussin et de Cesaro)

et

$$h(a) = K + \int_a^a f(s)g(s)ds = K$$

$$\Longrightarrow h(x) \leq Ke^{\int_a^x g(s)ds} \overset{donc}{\Longrightarrow} f(x) \leq h(x) \leq Ke^{\int_a^x g(x)ds}, c.q.f.d$$

2.2.10 L'existence et l'unicité d'une solution de problème de Cauchy

Théorème 2.2.11 *[2]*

L'équation (2.3)

* *si* $f(x,y)$ *et* $\dfrac{df}{dy}(x,y)$ *sont continues et borné en tout les point* (x,y) *de rectangle* R.
  $R = \{(x,y) \in R^2/|x - x_0| < a; |y - y_0| < b\}$
  c.à.d :
* *si on a :pour tout* $(x,y) \in R^2$

$$|f(x,y)| < M$$

et

$$\left|\frac{df}{dy}(x,y)\right| < M$$

Alors le problème (2.3) admet une solution unique sur l'intervalle $|x - x_0| < \alpha$.
telle que :$\alpha = \min(a, \dfrac{b}{M})$
et la suite de récurrence converge vers la solution exacte du problème.

Proposition 2.2.12

Toute solution de l'équation $y' = f(x,y)$ *avec* $y(x_0) = y_0$ *satisfait aussi à l'équation*

$$y = y_0 + \int_{x_0}^x f(s,y)ds$$

et vice versa.

Existence (picard) :

On construite la suite de fonction
par Intégration :

$$y' = f(x,y)$$

$$\Downarrow$$

$$y - y_0 = \int_{x_0}^x f(s,y)ds \tag{2.4}$$

donc

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_0)ds$$

$$y_2 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_1)ds$$

$$\vdots$$

$$y_n = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_{n-1})ds.$$

et montrer que $\begin{cases} \forall(x,y) \in \mathbb{R}(Rectangle). \\ \{y_n\} \text{ continue et convergente vers la solution} \end{cases}$

On a : y_0 est constante $\Longrightarrow$ continue.

et

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_0)ds$$

continue car (y_0) continue.

et par récurrence on trouve : y_n continue $\forall n \in \mathbb{N}$.

La convergence de $\{y_n\}$

On pose :

$$r_n = |y_{n+1} - y_n|$$

$$\Updownarrow$$

Est On a :

$$r_0 = |y_1 - y_0| = \left| \int_{x_0}^{x} f(s, y_0)ds \right| \leq \int_{x_0}^{x} |f(s, y_0)|ds$$

$$\Updownarrow$$

$$\leq M|x - x_0|$$

$$\Updownarrow$$

$$\leq M\alpha$$

et $|x - x_0| \leq \alpha = Min\left(a, \frac{b}{M}\right)$

si $\alpha = a \Rightarrow a \leq \frac{b}{M} \Rightarrow |y_1 - y_0| \leq \alpha M \leq \frac{b}{M}.M = b$

si $\alpha = \frac{b}{M} \Rightarrow |y_1 - y_0| \leq \frac{b}{M}.M = b \Rightarrow (x, y_1) \in \mathbb{R}$
et récurrence trouve $(x, y_n) \in$(rectangle) ;$\forall n$

$$|y_{n+1} - y_n| = |\int\limits_{x_0}^{x} f(s, y_n)ds - \int\limits_{x_0}^{x} f(s, y_{n-1})ds|$$

$$\leq \int\limits_{x_0}^{x} |f(s, y_n) - f(s, y_{n-1})|ds \leq \int\limits_{x_0}^{x} K|y_n - y_{n-1}|$$

$$\overset{f(x) lipschitziene}{\Longrightarrow} r_n(x) \leq K \int\limits_{x_0}^{x} r_{n-1}(s)ds \leq K \int\limits_{x_0}^{x} (K \int\limits_{x_0}^{x} r_{n-1}(s)ds)ds$$

$$r_n \leq K^2 \int\limits_{x_0}^{x} \int\limits_{x_0}^{x} r_{n-1}(s)ds$$

$$\vdots$$

$$K^n \underbrace{\int\limits_{x_0}^{x} \int\limits_{x_0}^{x} .... \int\limits_{x_0}^{x}}_{n fois} r_0(s)ds$$

$$\frac{K^n M |x - x_0^{n+1}|}{(n+1)!}$$

$r_0 = \int\limits_{x_0}^{x} < M$ et $r_0(s) < M$
La somme :

$$\sum_{n=0}^{\infty} r_n \leq \frac{M}{K} \sum_{n \geq 0} \frac{(\alpha K)^{n+1}}{n+1} = \frac{M}{K} \sum_{n \geq 1} \frac{(\alpha K)^n}{n!}$$

$$= \frac{M}{K}(e^{\alpha K} - 1)$$

$\Longrightarrow \sum r_n$ est converge $\Longrightarrow \sum |y_{n+1} - y_n|$ est converge et D'autre par on a :

$$y_n = y_0 + \sum_{k=1}^{n} |y_K - y_{K-1}|$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} y_n = y_o + \sum_{k=1}^{\infty} |y_n - y_{n-1}| \Longrightarrow (y_n)$$

est converge.

La continuité de $y(x)$

$$\forall\varepsilon > 0, |y(x+h) - y(x)| = |y(x+h) - y_n(x+h) + y_n(x+h) + y_n(x) - y_n(x) + y(x)|$$

$$\leq |y_n(x+h) - y(x+h)| + |y_n(x) - y(x)| + |y_n(x+h) - y(x)|$$

on a : $$\left.\begin{array}{r} |y_n(x+h) - y(x+h)| \leq \dfrac{\varepsilon}{3} car(y_n) c.v \\ |y_n(x) - y(x)| \leq \dfrac{\varepsilon}{3} car(y_n) c.v \\ |y_n(x+h) - y(x)| \leq \dfrac{\varepsilon}{3} car(y_n) continue. \end{array}\right\} \Longrightarrow \forall\varepsilon > 0, |y(x+h) - y(x)| < \varepsilon \Rightarrow y(x)$$

et continue

$y(x)$ **Vérifie l'équation différentielle**

$$\lim_{n\to+\infty} \int f(s, y_n) ds = \int \lim_{n\to+\infty} f(s, y_n) ds.$$

$$= \int f(s, y) ds$$

$$\forall\varepsilon > 0, | \int f(s, y_n) ds - \int f(s, y) ds| \overset{?}{<} \varepsilon$$

$$= \left| \int f(s, y_n)ds - \int f(s, y)ds \right| \leq \int |f(s, y_n) - f(s, y)|ds$$

$$\overset{flipschitziene}{\leq} K \int_{x_0}^{x} |y_n - y|ds$$

$$\leq \alpha |y_n - y|$$

et puisque $y_n \longrightarrow y$ Alors

$$|y_n - y| < \frac{\varepsilon}{\alpha} \Rightarrow |\int f(s, y_n)ds - \int f(s, y)ds| < \varepsilon.$$

donc $y(x)$ vérifie 4.1 $\Longrightarrow$ l'existence de solution.

L'unicité

D'après Gronwall

* On suppose :y_1, y_2 deux solutions

$$|y_1(x) - y_2(x)| = \left| \int_{x_0}^{x} f(s, y_1) - \int_{x_0}^{x} f(s, y_2)ds \right|$$

$$\overset{f(x)\ lipschitzienne}{\leq} \int_{x_0}^{x} |f(s, y_1) - f(s, y_2)|ds$$

est car $f$lipschitzienne

On trouve :

$$|y_1(x) - y_2(x)| \leq K \int_{x_0}^{x} |y_1(s) - y_2(s)|ds.$$

On pose :$K = 0$ et $g(x) = 1$ (Gronwall) et $f(x) = |y_1(x) + y_2(x)|$

donc

$$f(x) \leq \int_{x_0}^{x} f(s).1ds.$$

$$f(x) \leq Ke^{\int_{x_0}^{x} 1ds} = 0 \Longrightarrow f(x) = 0$$

Donc

$$|y_1 - y_2| = 0 \Longrightarrow y_1 = y_2$$

D'où l'unicité.

Chapitre 3

Point Fixe

3.1 Définitions Générales

Introduction :

En analyse,les théorèmes de point fixe sont un résultat qui permet d'affirmer qu'une fonction f admet sous certaines conditions un point fixe. Ces théorèmes se révèlent être des outils très utiles en mathématiques, principalement dans le domaine de la résolution des équations différentielles.

Définition 3.1.1 *(***Suite Extraites)**

Soit $(u_n)_n \geq 0$ *une suite d'un ensemble E.*

On appelle suite extraite de la suite u toute suite v de E dont le terme générale peut s'écrire $v_n = u_\varphi(n)$*,ou* φ *est une application strictement croissante de* $\mathbb{N}$ *dans lui-même.*

Proposition 3.1.2

Avec les notations de l'énoncé, et pour tout entier n, $\varphi(n) \geq n$*.*

Remarque 3.1.3

-Si $\varphi(n) = n + p(p \in \mathbb{N}$*, la suite v est notée* $(u_n)_n \geq p$*(son terme initial est* u_p*).*

-On considère souvent $\begin{cases} \textit{La suite}(u_{2n})_{n\geq 0} \textit{des termes d'indices pairs} : \varphi(n) = 2n \\ \textit{La suite}(u_{2n+1})_{n\geq 0} \textit{des termes d'indices impairs} : \varphi(n) = 2n+1 \end{cases}$.

Les définitions et les propriétés qui vont suivre seront données pour des suites $(u_n)_n \geq 0$*.*

Mais elles peuvent être adaptées aux suites $(u_n)_n \geq p$ *, avec des changements de notation évidents.*

Définition 3.1.4 (Suites définies par récurrence)

Soit f une application de E dans E, et soit a un élément de E.

On peut définir une suite $(u_n)_n \geq 0$ *de E par :*

- ◇ *La donnée de son terme initial* $u_0 = a$.
- ◇ *La relation de récurrence* :$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

On dit alors que la suite u est définie par récurrence.

Théorème 3.1.5

Soit une fonction continue

$$f : [a, b] \to [a, b].$$

Alors il existe au moins un point $x' \in [a, b] telque f(x') = x'$. *(Interprétation géométrique : la droit y=x rencontre le graphe de la fonction f.)*

Démonstrations 3.1.6

Posons $\varphi(x) = f(x) - x, x \in [a, b]$. *On doit donc démontrer que*

$$\exists x \in [a, b] : \varphi(x) = 0. \tag{3.1}$$

Raisonnons par l'absurde.Si(3.1.6)

$$\forall x \in [a, b] : \varphi(x) \neq 0 \tag{3.2}$$

ceci implique

$$\exists x \in [a, b] : \varphi(x) < 0) et (\exists x \in [a, b] : \varphi(x) > 0.) \tag{3.3}$$

En effet ,si (3.1.6)était fausse ,on aurait ,compte tenu de(3.1.6).

$$(\exists x \in [a, b] : \varphi(x) < 0) et (\exists x \in [a, b] : \varphi(x) > 0)$$

autrement dit,il existerait deux point $x_1, x_2 \in [a, b]$ *tels que* $\varphi(x_1) < 0$ *et* $\varphi(x_2) > 0$.
La fonction φ *étant continue sur [a,b], il existe dans ce cas ,d'après le théorème*

Définition 3.1.7

Soit E un ensemble quelconque et f :E $\longrightarrow$ *E une application .*
On dit que $x \in E$ *est un point fixe de* f *si* $f(x) = x$.

3.2 Quelque Point Fixe

3.2.1 Application Contractante

Définition 3.2.2

Soit I un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$. une fonction $f : I \longrightarrow I$ est dite contractante (ou contraction), s'il existe une constante $0 < K < 1$ telle que $\forall x', x'' \in I$:

$$|f(x') - f(x'')| \leq K.|x' - x''|.$$

Théorème 3.2.3 *[7]*

Soit Iun intervalle fermé non vide .

Soit $f : I \longrightarrow I$ une application contractante sur I .

Alors :

1) f admet un unique point fixe l dans I .

2) $\forall u_0 \in I$,la suite $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(x_n) \end{cases}$ *converge vers l*

Démonstrations 3.2.4

Remarquons au préalable ,u_0 étant dans Iet I étant stable par f,la suite (u_n) est bien définie et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I$$

Existence d'un point fixe :

Montrons ,par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$,la propriété :

$$P(n) : |u_{n+1} - u_n| \leq K^n |u_1 - u_0|$$

. On a évidemment $P(0)$.

. Montrons que pour toute $n \in \mathbb{N} P(n) \Longrightarrow P(n+1)$:

soit $n \in \mathbb{N}$. supposons $P(n)$

f contractante et$f(I) \subset I$

$$|u_{n+2} - u_{n+1}| = |f(u_{n+1}) - f(u_n)| \leq K|u_{n+1} - u_n| \leq K^{n+1}|u_1 - u_0|$$

D'où $P(n+1)$.

Du principe de raisonnement par récurrence , on déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, P(n) : |u_{n+1} - u_n| \leq K^n |u_1 - u_0|$$

Déduisons -en que (u_n) est de **Cauchy** *:*

soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*.$, $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ avec $q > p \geq 0$.

Notons $r = q - p$.

on a :

$$|u_q - u_p| = |u_{p+r} - u_p| = \left|\sum_{i=p}^{p+r-1} u_{i+1} - u_i\right| \leq \sum_{i=p}^{p+r-1} |u_{i+1} - u_i| \leq \sum_{i=p}^{p+r-1} K^i |u_1 - u_0|$$

$$\sum_{i=p}^{p+r-1} K^i |u_1 - u_0| = K^p |u_1 - u_0| \sum_{i=0}^{r-1} K^i$$

Et comme $K \in [0,1[$

la série géométrique de terme général K^i converge et majorée par $\dfrac{1}{1-K}$

D'où

$$|u_q - u_p| \leq \frac{K^p}{1-K} |u_1 - u_0|$$

Et enfin ,toujours par ce que $K \in]0,1[$:

$$\frac{K^p}{1-K} \xrightarrow[p\to\infty]{} 0$$

En conséquence :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, (p \geq N \Rightarrow \frac{K^p}{1-K}|u_1 - u_0| \leq \varepsilon \Rightarrow |u_q - u_p| \leq \varepsilon)$$

Ce qui prouve que la suite (u_n) est de Cauchy.

Et comme $\mathbb{R}$ est complet ,(u_n) converge .

Notons l sa limite . comme I est fermé , on a $l \in I$

Or, f est continue en l (puisque contractante sur I) donc :

$$\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\lim_{n\to+\infty} u_n)$$

$$\lim_{n \to +\infty} f(l)$$
$$l = f(l)$$

On a donc prouvé que f admet un point fixe l dans I et que (u_n) converge vers l.

Unicité du point fixe :

Supposons :

$$\exists l, l' \in I, f(l) = l et f(l') = l'$$

Comme f est contractante sur I :

$$f(l) - f(l')| \leq K|l - l'|$$
$$|l - l'| \leq K|l - l'|$$
$$(1 - K)|l - l'| \leq 0$$

Or $K \in]0, 1[$, donc :

$$|l - l'| \leq 0$$
$$l = l'$$

3.2.5 Théorème de Picard

Théorème 3.2.6 *[6](***Picard**[1]*)*

soient (E, d) est espace métrique complet et $\varphi : E \longrightarrow E$ une application contractante ,i-e,Lipschitzienne de rapport $K < 1$.
Alors ,φ admet un unique point fixe $a \in E$.De toute point initial $x_0 \in E$, la suite itérée $(x_p)_{p \in N}$,avec $x_0 \in E$ quelconque et $x_{p+1} = \varphi(x_n)$ converge vers a .

Démonstrations 3.2.7

On monter d'abord l'existence d'un point fixe ,puis l'unicité.

1. **Existence :**

   Soit x_0 un point initial quelconque et (x_p) la suite itérée associée .

   On a $d(x_p, x_{p+1}) = d(\varphi(x_{p-1}), \varphi(x_p)) \leq K d(x_{p-1}, x_p)$.

   On va monter par récurrence sur p que $d(x_p, x_{p-+}) \leq k^n d(x_0, x_1)(p)$:

1. Emile Picard est un mathématicien Français ,né le 24 juillet 1856 à Paris et mort le 11 décembre 1920 à paris.Diplômé de la prestigieuse École Normal Supérieure de Paris ,il avait à son actif plusieurs contribution dans la théorie des fonction ,des équations différentielles et de la géométrie analytique.

- *Initialisation :Évident pour* $p = 0$.
- *Généralisation : supposons que pour un certain entier p quelconque mais fixé on ait la propriété(p).Alors*

$$d(x_{p+1}, x_{p+2}) = d(\varphi(x_p), \varphi(x_{p+1}))$$

$$\leq Kd(x_p, x_{p+1})$$

$$\leq K.K^p d(x_0, x_1)$$

$$\leq K^{p+1}$$

ce qui achève la récurrence. On a alors $\forall q > p$:

$$d(x_p, x_q) \leq \sum_{l=p}^{q-1} d(x_l, x_{l-1}) \leq \left(\sum_{l=p}^{q-1} K^l\right) d(x_0, x_1)$$

De plus , pour tout $p > q$, $\sum_{l=p}^{q-1} K^l \leq \sum_{l=p}^{\infty} K^l = \frac{K^p}{1-K}$, *d'où* $d(x_p, x_q) \leq \frac{K^n}{1-k} d(x_0, x_1)$. *On en déduit alors que* (x_p) *est une suite de Cauchy .*

comme (E, d) *est complet , la suite* (x_n) *converge vers un point limites* $a \in E$. *De plus on a* $\varphi(x_p) \longrightarrow \varphi(a)$ *quand* $p \longrightarrow +\infty$ *car* φ *est continue et* $\varphi(x_p) = x_{p+1}$.

Or $x_{p+1} \to a$ *quand* $p \to +\infty$, *d'où par unicité de la limite on a* $\varphi(a) = a$.

2. **Unicité :**

Supposons qu'il existe a , $b \in E$, $a \neq b$, *tels qu'on ait* $\varphi(a) = a$ *et* $\varphi(b) = b$.

Alors on a $d(\varphi(a), \varphi(b)) = d(a, b)$ *et donc* $\frac{d(\varphi(a), \varphi(b))}{d(a,b)} = 1 > K$ *ce qui contredit le fait que soit* K*- Lipschitzienne .*

3.3 Théorème de Volterra

Théorème 3.3.1

Soit E espace de Banach, $z_0 \in E$ *et* $S \in \mathscr{L}(E)$ [2] *Tel que :* $1 + \sum_{1}^{+\infty} \|S^n\| = A < \infty$

Alors :la transformation T définie par : $T(x) = z_0 + S(x)$.

admet un point fixe unique x_0,*définie par :* $x_0 = z_0 + \sum_{1}^{+\infty} S^n(z_0)$

Démonstration :

3.3.2 Existence

On suppose $x_1 \in E$,S linéaire.[3]

et prendre une suite $(x_n)_n \geq 1$ tel que :$x_{n+1} = T(x_n)$

on a : $x_n = T(x_{n-1}) \Rightarrow x_2 = T(x_1) = z_0 + s(x_1)$

$$\begin{aligned} x_3 = T(x_2) &= z_0 + S(x_2) \\ &= z_0 + S(z_0 + s(x_1)) \\ &= z_0 + S(z_0) + S^2(x_1) \\ &\vdots \\ x_n &= z_0 + \sum_{k=1}^{n-2} S^k(z_0) + S^{n-1}(x_1). \end{aligned}$$

et par récurrence on démontre p_n : $(x_n = z_0 + \sum_{k=1}^{n-2} S^k(z_0) + S^{n-1}(x_1))$. est vraie

Pour $n = 2$:

$$x_2 = T(x_1) = z_0 + S(x_1)$$
$$p_2 : (x_2 = z_0 + S^{2-1}(x_1)) = z_0 + S(x_1)$$

On suppose p_n vérifie pour n ,on démontre pour $n+1$:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= T(x_n) \\ &= z_0 + S(z_0) + S(\sum_{k=1}^{n-2} S^k(z_0)) + S(S^{n-1}(x_1)) \\ &= z_0 + S(z_0) + \sum_{k=1}^{n-2} S^{k+1}(z_0)) + S^n(x_1)) \\ &= z_0 + S(z_0) + \sum_{m=2}^{n-1} S^m(z_0)) + S^n(x_1)).(k+1=m) \\ &= z_0 + S(z_0) + S(\sum_{k=1}^{n-2} S^k(z_0)) + S(S^{n-1}(x_1)) \\ &= z_0 + \sum_{k=1}^{n-1} S^k(z_0)) + S^n(x_1)) \end{aligned}$$

2. $S \in \mathscr{L}(E)$ est un application linéaire de E dans E
3. $\forall n \in N; S^{n+1} = S \circ S^n$

donc p_n vérifie pour $n+1$

Donc le propriété vraie $\forall n \geq 2$ et l'existence de la suite (x_n)

l'étude de la convergence de suite (x_n).(critère de Cauchy pour la convergence)par utilisée (p_n)

on a :

$$\begin{aligned}
\|x_{n+p} - x_n\| &= \|z_0 + \sum_{k=1}^{n+p-2} S^k(z_0) + S^{n+p-1}(x_1) - z_0 - \sum_{k=1}^{n-2} S^k(z_0) - S^{n-1}(x_1)\| \\
&= \| \sum_{n-1}^{n+p-2} S^k(z_0) + S^{n+p-1}(x_1) - S(x_1)\| \\
&\leq \| \sum_{n-1}^{n+p-2} S^k(z_0)\| + \|S^{n+p-1}(x_1)\| + \|s^{n-1}(x_1)\| \\
&\leq \sum_{n-1}^{n+p-2} \|S^k\|\|z_0\| + \|S^{n+p-1}\|\|x_1\| + \|s^{n-1}\|\|x_1\| \\
&\leq \sum_{n-1}^{n+p-2} \|S^k\|[\|z_0\| + \|x_1\|] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0
\end{aligned}$$

on par condition

$$\sum_{n-1}^{n+p-2} S^k = \sum_{0}^{n+p-2} S^k - \sum_{0}^{n-1} S^k \xrightarrow[n\to\infty]{} A - A = 0$$

donc la suite (x_n) de Cauchy dans l'espace E complet (Banach).

Alors la suite (x_n) est converge vers x_0 définie par :

$$x_0 = \lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} T(x_{n-1})$$

$$= \lim_{n\to+\infty} (z_0 + \sum_{k=1}^{n-2} S^k(z_0) + S^{n-1}(x_1))$$

$$= z_0 + \sum_{k=1}^{\infty} S^k(z_0) + \lim_{n\to+\infty} S^{n-1}(x_1)$$

mais :

$$(\lim_{n\to+\infty} S^{n-1}(x_1) = 0 car \lim_{n\to+\infty} S^n)$$

Donc

$$x_0 = z_0 + \sum_{k=1}^{\infty} S^k(z_0).$$

de plus :on a :

$$\begin{aligned}
x_0 = \lim_{n\to+\infty} x_n &= T \lim_{n\to+\infty} (x_{n-1}), (T continue) \\
&= T(x_0)
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow x_0$ est un point fixe de l'application T

3.3.3 Unicité

On suppose deux points fixes de T : x_0 et y_0

$$x_0 - y_0 = T(x_0) - T(y_0)$$

$$= z_0 + S(x_0) - z_0 - S(y_0)$$

$$= S(x_0) + S(y_0)$$

$$= S(x_0 - y_0).$$

et par composition S :

$$x_0 - y_0 = S(x_0 - y_0)$$

$$S(x_0 - y_0) = S^2(x_0 - y_0)$$

$$S^2(x_0 - y_0) = S^3(x_0 - y_0)$$

$$\vdots$$

$$x_0 - y_0 = S^n(x_0 - y_0) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

par la condition

$$(\sum_{n=0}^{+\infty} \|S^n\| < \infty \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} \|S^n\| = 0)$$

Donc

$$x_0 - y_0 = 0 \Longrightarrow x_0 = y_0$$

D'où l'unicité du point fixe.

3.4 Exemples

Théorème du point fixe

soit E un espace vectoriel normé de dimension finie A une partie fermée non vide de E et $f : A \longrightarrow A$ une application lipschitzienne de rapport $K < 1$ .On note $\underbrace{f^n = f \circ ... \circ f}_{nfois}$

1. Montrez que, pour tout$X_0 \in A$, la suite $(f^n(x_0))$ converge vers une limite $l \in A$.

2. Montrez que l est l'unique point fixe de f.

3. Donnez une majoration de$||x_n - l||$.

solution :

1. Posons $x_n = f^n(x_o)$, donc $x_{n+1} = f(x_n)$pour tout$n \in N$. Comme $f(A) \subset A$, la suite (x_n)

est bien définie.

On a $||x_2 - x_1|| = ||f(x_1 - f(x_o)|| \leq k||x_1 - x_o||$, et par récurrence :

$$\forall n \in N, ||x_{n+1} - x_n|| \leq k^n ||x_1 - x_o||.$$

Montrons que (x_n)est une suite de Cauchy. Pour n et $p$dans N , on a :

$$||x_{n+p} - x_n|| \leq ||x_{n+p} - x_{n+p-1}|| + ... + ||x_{n+1} - x_n||$$

$$\leq (k^{n+p-1} + ... + k^n)||x_1 - x_0||$$

$$\leq k^n \frac{1 - k^P}{1 - k} ||x_1 - x_0||$$

$$\leq \frac{K^n}{1 - K} ||x_1 - x_0||.$$

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} k^n = 0$, pour $\varepsilon > 0$ donné, il existe $r \in N$ tel que, pour tout $n \geq r$ et pour tout $p \in N$, on ait :

$||x_{n+p} - x_n|| \leq \varepsilon$. Ainsi (x_n) est bien de Cauchy et donc convergente, puisque E est de dimension finie.

Posons $l = \lim\limits_{n \to +\infty} x_n$; comme $x_n \in A$ pour tout n et que A est fermé, on a bien $l \in A$.

2.- Existence :

f est continue car lipschitzienne, d'où :

$$f(l) = f(\lim_{n \to +\infty} x_n) = \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = \lim_{n \to +\infty} x_{n+1} = l$$

donc l est un point fixe de f.

Unicité :

Soit l un point fixe de f. On a :

$$||l' - l|| = ||f(l') - f(l)|| \leq k||l' - l||$$

d'où$(1 - k)||l' - l|| \leq 0$, donc $l' = l$.

3.On avait

$$||x_{n+p} - x_n|| \leq K^n \frac{||x_1 - x_0||}{1 - K}$$

d'où, en faisant tendre p tend vers $+\infty$

$$||x_n - l|| \leq K^n \frac{||x_1 - x_0||}{1 - K}.$$

Chapitre 4

Application

4.1 l'application de théorème de point fixe de Volterra

On applique le théorème de Volterra au problème de Cauchy associe à des équations sous forme :

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{4.1}$$

Par Intégration :

$$\int_{t_0}^{t} y'(s)ds = \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds$$

$$\Updownarrow$$

$$y(t) = y(x_0) + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds$$

On applique le théorème de point fixe de Volterra pour : $\begin{cases} z_0 = y(x_0) \\ S(y) = \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds \end{cases}$

Si $\|S\| < 1$.Alors le problème 4.1 admet une solution unique définie par :

$y(t) = z_0 + \sum_1^\infty S^n(z_0)$

$= y(x_0) + \sum_1^\infty \left(\int_{t_0}^{t} f(s, y(x_0)ds \right)^n$ (la composition)

Théorème 4.1.1

S opérateur si : $\|S\| < 1$: alors :

1. *$(I - S)^{-1}$ existe.*
2. *$(I - S)^{-1} = \sum_0^\infty S^n$*

Théorème 4.1.2

soit S un application dans$\mathcal{L}(E)$

1. $\|S\| < 1 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S^k = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \|S^k\| = 0$
2. $\sum\limits_{0}^{\infty} S^k(x) = M < \infty \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S^k = 0 \Leftrightarrow \|S\| < 1$

Théorème 4.1.3

$A \in M_{n\times n} \setminus \|A\| < 1$

1. $\lim\limits_{n\to\infty} A^n = 0$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} A^n x = 0$
3. $\rho(A) < 1$
4. $\exists norme \setminus \|A\| < 1.$

Soit E espace de Banach, $z_0 \in E$ et $S \in \mathscr{L}(E)$ Tel que : $\sum\limits_{1}^{+\infty} ||S^n|| < \infty = \sum\limits_{1}^{+\infty} || \int f(s,y)ds||^n < \infty$

$$|| \int\limits_{t_0}^{t} f(s,y)ds|| \leq \int\limits_{t_0}^{t} ||f(s,y)||ds = ||f(s,y)|||x - x_0| < 1$$

Alors $T(y)$ admet un point fixe unique définie par :

$$y = z_0 + \sum S^n(z_0)$$

$$y = y_0 + \sum (\int\limits_{t_0}^{t} f(s,y)ds)^n.$$

4.2 Exemples

Exemple 1 : $\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$

Ona :

$$y' = y \Longrightarrow y(t) - y(0) = \int\limits_{0}^{t} y(s)ds$$

$$\Longleftrightarrow y(t) = y(0) + \int\limits_{0}^{t} y(s)ds$$

On pose :

$$S : E \longrightarrow E$$
$$y \longmapsto S(y) = \int\limits_0^t y(s)ds$$

$0 \leqslant t \leqslant a$ et $E = C([0,a]); z_0 = y(0) = 1 \in E$ Donc :$y(t) = y(0) + \sum\limits_1^\infty S^n(y(0))$.(par théorème de Volterra)
$1 + \sum \left(\int\limits_0^t y(0)ds \right)^n$ (S^n la composition)

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int\limits_0^t 1ds \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n\,!} = e^t$$

Car :

$$\left(\int\limits_0^t 1ds \right)^n = \int\limits_0^t \int\limits_0^t ... \int\limits_0^t 1ds...ds = \frac{1}{n\,!} t^n$$
$$t \xrightarrow{\int(2)} \frac{t^2}{2} \xrightarrow{\int(3)} \frac{t^3}{2 \times 3} \xrightarrow{\int(4)} \frac{t^4}{2 \times 3 \times 4}$$

La solution directe :

$$y' = y \Longrightarrow \frac{y'}{y} = 1 \Longrightarrow log(y) = x + k$$
$$\Rightarrow \begin{cases} y(x) = e^x.e^k \\ y(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow e^k = 1 \Rightarrow k = 0$$

Donc la solution est

$$y(x) = e^x$$

Exemple 2 : $\begin{cases} y' = 2y \\ y(0) = 1 \end{cases}$ On applique la théorème de Volterra.pour l'équation

$$y(t) = y(0) + \underbrace{\int\limits_0^t 2y(s)ds}_{S(y)}$$

Avec $\begin{cases} z_0 = y(0) = 1 \\ S(y) = \int\limits_0^t 2y(s)ds \end{cases}$
La solution donnée :

$$y(t) = y(o) + \sum_1^{\infty} \left(\int\limits_0^t 2y(0)ds \right)^n$$

$$= \sum_{1}^{\infty} \frac{(2t)^n}{n!} = e^{2t}$$

Car

$$S^2(y(0)) = S^2(1) = S\left(\int_0^t 2(1)\right) ds = S(2t)$$

$$\int_0^t 2(2s)ds = 2t^2 = \frac{4t^2}{2} = \frac{(2t)^2}{2}$$

$$S^3(y(0)) = S(S^2(1)) = \int_0^t 2\left(\frac{(2s)^2}{2}\right) ds = \frac{4}{3}t^3 = \frac{8}{3 \times 2} = \frac{(2t)^3}{3!}$$

$$\vdots$$

$$S^n(y(0)) = \frac{(2t)^n}{n!}$$

Exemple 3 :

$$\begin{cases} f = g + f' \\ f(x_0) = y_0 \end{cases}$$

On a :

$$\int_{t_0}^t f(s)ds = \int_{t_0}^t g(s)ds + \int_{t_0}^t f'(s)ds$$

$$\iff f(t) = \underbrace{f(x_0) - \int_{t_0}^t g(s)ds}_{z_0} + \underbrace{\int_{t_0}^t f(s)ds}_{S(f)}$$

et $E = C^1([0,1])$

Donc la solution donnée par : (théorème de Volterra)

$$f(t) = f(x_0) - \int_{t_0}^t g(s)ds + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{t_0}^t\right)^n \textit{(la composition)}$$

$$\iff f(t) = z_0 + \sum_{1}^{\infty} S^n(z_0)$$

Conclusion

Le principe du point fixe joue un rôle crucial dans le domaine des applications. Il intervient dans la résolution de plusieurs équations différentielles, pour les problèmes d'existence et d'unicité.

Dans ce mémoire on aborde l'application en particulier le théorème du point fixe de Volterra pour la résolution des équations de problème de Cauchy .

Mais cette application $S^n(z_0)$ est difficile pour le calcul. On peut utilise une méthode numérique pour calculer une valeur d'erreur ε,(On peut programmée un Algorithme pour calcule $S^n(z_0)$)

Bibliographie

[1] **A.Avez**,Calcul Différentiel.Masson.Paris.1983.

[2] **Alfed Wohlhauser**,Aide-mémoire d'analyse.PResses polytechniques et universitaires Romands.2000.

[3] **C. Brezinski**, Analyse Numérique Discrète. Publications du Laboratoire de Calcul de l'Université des Sciences et Techniques de Lille.

[4] **Daniel Fredon et Michel bridier**,Aide-mémoire Mathématiques pour les sciences de l'ingénieur.Dunod.Paris.2003.

[5] **G.A.Sedogbo**,Analyse DEUG Sciences 2^e année,BELIN.2000.

[6] **J.P. Demailly**, Analyse numérique et équations différentielles . collection Grenoble Sciences. presses universitaires de Grenoble. Grenoble. 1996.

[7] **Kada.Allab**, Éléments d'analyse (fonction d'une variable réelle)Tom1. office des publication universitaires.12-2009 .

[8] **Mohamed.Hazi** ,Topologie Au delà des travaux Dirigés.Alger. 11- 2009.

[9] **Povl Thomsen**,Analyse 1.Espaces vectoriels normées Séries à termes constants Dérivation. Intégration SPE-PC-PSI-PT.Masson.Paris.1997.

[10] **Struble. Raimond A.**, Nonlinear Differential Equations. McGraw-Hill. New York. 1962.

[11] **Yves. Sonntag** ,Topologie et analyse fonctionnelle.Les Pennes Mirabeau. 07- 1997.