Journal of Advanced Research in Science and Technology
ISSN: 2352-9989

La Méthode d'Adomian Appliquée à L'équation de Bernoulli

Choucha Abdelbaki [1*] and Guerbati Kaddour [2]
[1,2] Laboratoire de Mathématiques et Sciences Appliquées, Université de Ghardaia

Abstract. In this work we used Adomian decompositional method to solve Bernoulli equation in the form:

$$u' + a(t)u = b(t)u^m / \quad m \in \mathbb{N}^*$$

Keywords: *Adomian method, decompositional, Bernoulli equation*

Résumé. Dans ce travail on veut utiliser la méthode décompositionnelle d'Adomian pour résoudre l'équation de Bernoulli sous la forme:

$$u' + a(t)u = b(t)u^m / \quad m \in \mathbb{N}^*$$

Mots clés: *Méthode d'Adomian, décompositionnelle, équation de Bernoulli*

1. Introduction

Dans les années 80 G.Adomian a proposé une nouvelle méthode pour résoudre les équations différentielles et aux dérivées partielles linéaires et non linéaires.
La technique utilise une décomposition de l'opérateur non linéaire en série defonctions (les polynômes d'Adomian)[4,5].
K.Abbaoui et Y.Cherrault, dans les années 90 travaillent sur la convergence de série d'Adomian [1,2,3,6].
L'équation de Bernoulli à été proposée par Jaques-Bernoulli en 1695, et résolue un an plus tart par Libniz, grâce à un changement de fonction qui ramène à une équation différentielle linéaire.
On va appliquer la méthode d'Adomian pour résoudre l'équation de Bernoulli sous forme d'une série convergente.

2. Méthode d'Adomian

On considère l'équation suivante:

$$\mathbf{Fu} = \mathbf{G} \qquad (1)$$

La Méthode d'Adomian consiste à chercher la solution **u**sous la forme d'une série en**t**.

$$\mathbf{u} = \sum_{n\geq 0} \mathbf{u_n t^n} \qquad (2)$$

et à décomposer l'opérateur non linéaire **N** (la partie non linéaire de **F**) en série d'Adomian

$$\mathbf{Nu} = \sum_{n\geq 0} \mathbf{A_n t^n} \qquad (3)$$

* Corresponding author.
E-mail: chouchaof@yahoo.com (Choucha A.).
Address: Laboratoire de Mathématiques et Sciences Appliquées, Université de Ghardaia, 47000, Algerie

avec les $\mathbf{A_i}$sont appelés polynômes d'Adomian et les termes du série de solution définie par:

$$\begin{cases} \mathbf{u_0 = \Phi + L^{-1}G} \\ \mathbf{u_{n+1} = -L^{-1}Ru - L^{-1}A_n} \end{cases} \qquad (4)$$

Avec $\mathbf{L^{-1}}$: l'inverse de la partie linéaire de l'operateur .

2.1 Convergence

Théorème 1:

Soit l'opérateur N définie sur H espace de Hilbert et u la solution de (1),

La série $u = \sum_{n\geq 0} u_n t^n$ donnée par (4) est convergente si

$$\exists 0 \leq \alpha < 1 \quad , \qquad \|u_{n+1}\| \leq \alpha \|u_n\| \quad , \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Définition:[6]

Pour toute $i \in \mathbb{N}$ on définit:

$$\begin{cases} \alpha_i = \dfrac{\|u_{i+1}\|}{\|u_i\|} & , \|u_i\| \neq 0. \\ \alpha_i = 0 & , \quad \|u_i\| = 0. \end{cases}$$

Corollaire:[6]

Dans le théorème 1, la série$u = \sum_{n\geq 0} u_n t^n$est convergente vers la solution exacte si $\exists 0 \leq \alpha_i < 1 \ , \quad \forall i \in \mathbb{N}$

3. Equation différentielle de Bernoulli

C'est une équation différentielle de premier ordre de la forme:

$$\mathbf{u' + a(t)u = b(t)u^m} / \ \ \mathbf{m} \in \mathbb{N}^* \qquad (5)$$

Ou $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ sont des fonctions continues définies sur un intervalle ouvert $\mathbf{I} \subseteq \mathbb{R}$.

En général **m** est un entier naturel, mais on peut prendre **m** réel à condition de

Chercher **u** à valeurs strictement positives.

Cette équation se ramène à une équationlinéaire par la transformation suivante:

Divisant tous les termes de l'équationpar $\mathbf{u^m}$, on obtient:

$$\mathbf{u^{-m} + a(t)u^{-m+1} = b(t)} \qquad (6)$$

Faisant ensuite la substitution: $\mathbf{z = \frac{1}{u^{m-1}}}$

Alors:

$$\mathbf{z' = (-m+1)u^{-m}u'} \qquad (7)$$

On obtient en substitution (7) dans l'équation (6)

$$\mathbf{z' + (-m+1)a(t)z = (-m+1)b(t)} \qquad (8)$$

C'est une équationlinéaire.

Donc la solution générale est :

$$\mathbf{z(t) = e^{-(1-m)\int a(s)ds}(c + (1-m)\int b(t)e^{(1-m)\int a(s)ds}dt)} \qquad (9)$$

Et la solution de l'équation (6), est la fonction **u** donnée par:

$$\mathbf{u(t) = e^{-\int a(s)ds}(c + (1-m)\int b(t)e^{(1-m)\int a(s)ds}dt)^{\frac{1}{1-m}}} \qquad (10)$$

4. Application

On considère le problème suivant (équation de Bernoulli) :

$$\begin{cases} \mathbf{u' + a(t)u = b(t)u^m} / \ \ \mathbf{m} \in \mathbb{N}^* \\ \mathbf{u(0) = u_0} \end{cases} \qquad (11)$$

On a l'équation:

$$\mathbf{u' = -a(t)u + b(t)u^m} / \ \ \mathbf{m} \in \mathbb{N}^* \qquad (12)$$

On applique la méthode d'Adomian avec $\mathbf{F = L + R + N}$ tel que:

$$\begin{cases} \mathbf{L = D^1 = \frac{d}{dt}} \\ \mathbf{Ru = -a(t)u} \\ \mathbf{Nu = b(t)u^m} \end{cases}$$

on a

$$\mathbf{L = \frac{d}{dt} \Rightarrow L^{-1} = \int_0^t . ds}$$

On applique $\mathbf{L^{-1}}$dans l'équation (12) on obtient:

$$\mathbf{L^{-1}u' = L^{-1}Ru + L^{-1}Nu}$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{u - u(0) = L^{-1}(-a(t)u) + L^{-1}(b(t)u^m)} \qquad (13)$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{\sum_{n\geq 0} u_n t^n = u(0) - L^{-1}(a(t)\sum_{n\geq 0} u_n t^n) + L^{-1}(b(t)\sum_{n\geq 0} A_n t^n)}$$

On utilise le D.L au voisinage de 0 des fonctions **a** et **b**:

$$\mathbf{a(t) = \sum_{n\geq 0} a_n t^n}$$

$$\mathbf{b(t) = \sum_{n\geq 0} b_n t^n}$$

Et on obtient:

$$\mathbf{\sum_{n\geq 0} u_n t^n = u(0) - L^{-1}(\sum_{n\geq 0} a_n t^n \sum_{n\geq 0} u_n t^n) + L^{-1}(\sum_{n\geq 0} b_n t^n \sum_{n\geq 0} A_n t^n)}$$

$$\mathbf{= u(0) - L^{-1}\left(\sum_{n\geq 0} t^n . (\sum_{k=0}^{n} a_k u_{n-k})\right) + L^{-1}\left(\sum_{n\geq 0} t^n . (\sum_{k=0}^{n} b_k A_{n-k})\right)}$$

$$\mathbf{= u(0) - \left(\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n+1} t^{n+1} . (\sum_{k=0}^{n} a_k u_{n-k})\right) + \left(\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n+1} t^{n+1} . (\sum_{k=0}^{n} b_k A_{n-k})\right)}$$

$$= \mathbf{u(0)} - \left(\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} t^n . \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k u_{n-1-k} \right) \right) + \left(\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} t^n . \left(\sum_{k=0}^{n-1} b_k A_{n-1-k} \right) \right)$$

Donc:

$$\begin{cases} u_0 = u(0) \\ u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (b_k A_{n-1-k} - a_k u_{n-1-k}), \ \forall n \geq 1 \end{cases} \quad (14)$$

Et la solution donnée par:

$$u(t) = \sum_{n\geq 0} u_n t^n$$

Avec les $\mathbf{A_i}$ sont des polynômes d'Adomian de la fonction $\mathbf{u^m}$[4,5].

5. Exemple

5.1.Solution directe

On considère le problème suivant[7]:

$$\begin{cases} u' + tu = t^3 u^3 \\ u(0) = 1 \end{cases} \quad (15)$$

On pose:

$$z = \frac{1}{u^2} \Rightarrow z' = \frac{-2u'}{u^3}$$

On obtient en substitution dans l'équation (15)

$$z' - 2tz = -2t^3$$

C’est une équationlinéaire et la solution généraledonnée par

$$z(t) = t^2 + 1 + ce^{t^2}$$

Et la solution de (15):

$$u(t) = \frac{1}{\sqrt{z}} = \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1 + ce^{t^2}}} \text{ ,avec } u(0) = 1 \quad (16)$$

Et on utilise le D.L on trouve: ($\mathbf{c = 0}$)

$$u(t) = \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} = 1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{3}{8}t^4 - \frac{5}{16}t^6 + \cdots \quad (17)$$

5.2.Méthode d'Aomian

On applique (14) dans l'équation (15) on trouve:

$$\mathbf{u}' = -\,\mathbf{tu} + \mathbf{t}^3\mathbf{u}^3 \tag{18}$$

$\mathbf{u(0) = 1}$

Et par suite:

$$\mathbf{u} = \sum_{n\geq 0} \mathbf{u_n t^n} = \mathbf{u(0)} - \mathbf{L^{-1}}(\mathbf{t}.\sum_{n\geq 0} \mathbf{u_n t^n}) + \mathbf{L^{-1}}(\mathbf{t^3}.\sum_{n\geq 0} \mathbf{A_n t^n})$$

$$= \mathbf{u(0)} - \mathbf{L^{-1}}(\sum_{n\geq 0} \mathbf{u_n t^{n+1}}) + \mathbf{L^{-1}}(\sum_{n\geq 0} \mathbf{A_n t^{n+3}})$$

$$= \mathbf{u(0)} - \left(\sum_{n\geq 0} \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n+2}} \mathbf{u_n t^{n+2}}\right) + \left(\sum_{n\geq 0} \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n+4}} \mathbf{A_n t^{n+4}}\right)$$

$$= \mathbf{u(0)} - \left(\sum_{n\geq 2} \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}} \mathbf{u_{n-2} t^{n}}\right) + \left(\sum_{n\geq 4} \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}} \mathbf{A_{n-4} t^{n}}\right)$$

Donc la solution donne par : $\mathbf{u(t)} = \sum_{n\geq 0} \mathbf{u_n t^n}$

tel que:

$$\begin{cases} \mathbf{u_0 = 1} \\ \mathbf{u_1 = 0} \\ \mathbf{u_2} = \frac{-\mathbf{u_0}}{2} = \frac{-1}{2} \\ \mathbf{u_3} = \frac{-\mathbf{u_1}}{3} = \mathbf{0} \\ \mathbf{u_n} = \frac{1}{n}(-\mathbf{u_{n-2}} + \mathbf{A_{n-4}}) \quad , \quad \forall \mathbf{n} \geq \mathbf{4} \end{cases} \quad (19$$

$$\text{Et} \begin{cases} \mathbf{u_4} = \frac{1}{4}(-\mathbf{u_2} + \mathbf{A_0}) = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{3}{8} \\ \mathbf{u_5} = \frac{1}{5}(-\mathbf{u_3} + \mathbf{A_1}) = \mathbf{0} \\ \mathbf{u_6} = \frac{1}{6}(-\mathbf{u_4} + \mathbf{A_2}) = \frac{1}{6}\left(-\frac{3}{8} - \frac{3}{2}\right) = -\frac{5}{16} \\ . \end{cases}$$

Finalement la solution donnée par:

$$\mathbf{u(t)} = \mathbf{u_0} + \mathbf{u_1 t^1} + \mathbf{u_2 t^2} + \mathbf{u_3 t^3} + \mathbf{u_4 t^4} + \mathbf{u_5 t^5} + \mathbf{u_6 t^6} \ldots$$

$$= \mathbf{1} + \mathbf{0}.\mathbf{t} + \left(-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)\mathbf{t}^{\mathbf{2}} + \mathbf{0}.\mathbf{t}^{\mathbf{3}} + \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{8}}\mathbf{t}^{\mathbf{4}} + \mathbf{0}.\mathbf{t}^{\mathbf{5}} + \left(-\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{16}}\right)\mathbf{t}^{\mathbf{6}} + \cdots$$

$$= \mathbf{1} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{t}^{\mathbf{2}} + \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{8}}\mathbf{t}^{\mathbf{4}} - \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{16}}\mathbf{t}^{\mathbf{6}} + \cdots$$

5.3.Convergence

On a

$$\begin{cases} \boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{0}} = \left|\frac{\mathbf{u}_{\mathbf{1}}}{\mathbf{u}_{\mathbf{0}}}\right| = \mathbf{0} < 1 \\ \boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{1}} = \left|\frac{\mathbf{u}_{\mathbf{2}}}{\mathbf{u}_{\mathbf{1}}}\right| = \mathbf{0} < 1 \\ \boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{2}} = \left|\frac{\mathbf{u}_{\mathbf{3}}}{\mathbf{u}_{\mathbf{2}}}\right| = \mathbf{0} < 1 \\ \boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{3}} = \left|\frac{\mathbf{u}_{\mathbf{4}}}{\mathbf{u}_{\mathbf{3}}}\right| = \mathbf{0} < 1 \\ \quad\quad\vdots \end{cases}$$

Donc $\mathbf{0} \leq \boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{i}} < \mathbf{1}$, $\forall \boldsymbol{i} \in \mathbb{N}$

Alors la série d'Adomian d'équation de Bernoulli est convergente vers la solution.

6. Conclusion

Dans ce travail, nous avons appliqué la méthode décompositionelle d'Adomian pour trouver la solution générale approchée de l'équation différentielle de Bernoulli, avec l'utilisation des D.L, son application à des exemples numériques, révele qu'elle est efficace, utile et plus rapide. Et pour réduire les calculs on peut programmer un algorithme.

7. Références

[1] K.Abbaoui,Y.Cherruault, New Ideas for proving convergence of decomposition Methods, computers math.applic.vol.29,No7,pp.103-108,1995

[2] K. Abbaoui,Y.Cherruauit,The Decomposition Method Applied to the Cauchy Problem,Kybernetes. Vol. 28,No.1 , pp. 68-74,1999.

[3] K. Abbaoui,Y.CherruaultG.Adomian et R.Rach, Further Remarks on Conuergence ofDecomposition Method, Computing InternationalJornal of Bio-Medical. 38 (1995) 89-93.

[4] G.Adomian,solving frontier of physics:the Decompsition method,Kluwer Academic Publishers, 1994.

[5] G. Adomian, Nonlinear Stochastic Operator Equation, Copyright , 1986 .by Academic PressInt.

[6] M.M. Hosseini, H.Nasabzadeh, On the convergence of Adomian decomposition method. AppliedMathematics and Computation 182, pp. 536-543,2006.

[7] N. Piskounov, Calcul différentiel et intégration,Tome2(Mir,Ellipses,1988)