République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université de Ghardaia

Faculté des Sciences et de Technologie
Département de Mathématiques et Informatique

Projet de fin d'étude en vue de l'obtention de diplôme de

MASTER

Domaine : Mathématiques et Informatique
Spécialité : Analyse Fonctionnelle et applications

THÈME

Sur les dérivées fractionnaires et application

Présnté par :

FIHAKHIR Mabrouka

Soutenu le ..../..../....... devant le jury :

Présidente :	Mme. Hadda Hammouche	M.C.A (Univ. Ghardaia)
Examinateur :	M. Ismaïl Latrech	M.A.A (Univ. Ghardaia)
Encadreur :	M. Kaddour Guerbatti	M.C.A(Univ. Ghardaia)

Année Universitaire : 2016/2017

Remerciements

Mes vifs remerciements au bon Dieu Le plus puissant, qui m'a donné la volonté et la patience pour terminer ce travail.

En préambule à ce mémoire, je souhaite adresser mes remerciements les plus sincères aux personnes qui m'ont apporté leur aide et qui ont contribué à l'élaboration de ce modeste travail ainsi qu'à la réussite de cette formidable formation.

Je tiens à remercier sincèrement Monsieur GUERBATI Kaddour, en tant qu'encadreur de mon mémoire, pour sa générosité et la grande patience dont il a su faire preuve malgré ses charges académiques et professionnelles tout au long de la réalisation de ce projet, j'exprime mes profondes gratitudes aux membres du jury d'avoir d'examiné ce travail, et aux tous mes enseignants.

Je n'oublie pas mes parents pour leur contribution, leur soutien et leur patience.

Enfin, j'adresse mes plus sincères remerciements à tous mes proches et amis, qui m'ont toujours soutenu et encouragé au cours de la réalisation de ce mémoire.

Merci

FIHAKHIR Mabrouka

Dédicace

A toute personne chère à mon cœur :

"Mes parents"

je leurs dédie ce travail parce qu'il est le résultat de tous qu'ils me fournissaient et mon succès est grâce à ses invocations.

Ma grand-mère : Aichaoui.

"Ma sœur" : Soumia.

"Mes chéres frères" :

Krimou, Abbas, Dirar, Anas.

"Mes amis proches"

qui j'ai passé avec leurs les meilleurs moments de ma vie :

Souhila, Zohra, Meriem, Mardia, Safia, Aiacha, Dhaiba, Zakia, Lamia

Bouchra, Siham, Mabrouka, Alia, Chahra, Hind, Ouda.

Et pour tous les amis que j'ai connu tout le long de ma vie et que je n'ai pas cité leurs noms.

Table des matières

Introduction générale

La théorie de dérivation fractionnaire est un sujet presque aussi ancien que le calcul classique,l'origine du calcul classique connaissant aujourd'hui, remontent au 17^{me} siècle ou Newton et Leibniz on développé le calcul différentiel et intégrale Leibniz à présenté le symbole $\frac{d^n}{dt^n}f$ pour designer la même dérivée d'une fonction f. Quand il a il a demandé à l'hôpital dans une lettre (apparemment avec hypothèse implicite que $n \in \mathbb{N}$).
Il lui a répondu que signifie $\frac{d^n}{dt^n}f \quad$ si $n = \frac{1}{2}$?.
La lettre de l'Hospital admise aujourd'hui comme le premier incident de ce que nous appelons la dérivation fractionnaire demandée par l'hypothèse spécifiquement $n = \frac{n}{2}$ c-à-d une fraction (nombres actuel)ç donné à cette partie des mathématique

$\frac{d^nf}{dt^n}$ si $n = \frac{1}{2}$?	$\frac{d^nf}{dt^n}$
	
Guillaume de L'Hospital (1661-1704)	Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646 - 1716)

TABLE 1 – •

Que signifie $\frac{d^nf}{dt^n}$ si $n = \frac{1}{2}$?

Cette lettre de l'Hospital, écrite en 1695, est aujourd'hui admise comme le premier incident de ce que nous appelons la dérivation fractionnaire, et le fait que l'Hospital a demandé spécifiquement pour n $= \frac{1}{2}$, c'est-à-dire une fraction (nombre rationnel) a en fait donné lieu au nom de cette partie des mathématiques.

Les dérivées non entières possèdent un effet de mémoire qu'elles partagent avec plusieurs matériaux tels que les matériaux viscoélastiques ou polymères. Ce fait est également une des raisons pour lesquelles le calcul fractionnaire a connu récemment un grand intérêt. L'utilisation de l'effet mémoire des dérivées fractionnaires dans la construction des modèles matériels simples est livrée avec un coût élevé en ce qui concerne la résolution numérique. Tout en utilisant un algorithme de discrétisation des dérivées non entières on doit tenir compte de sa structure non locale qui signifie en général un haut stockage d'information et une grande complexité de l'algorithme. De nombreuses tentatives pour résoudre les équations faisant intervenir différents types d'opérateurs d'ordre non entier peuvent être trouvées dans la littérature.

Une liste de mathématiciens qui ont fourni des contributions importantes au caclul fractionnaire jusqu'au milieu du 20^{eme} siècle, inclut :

P.S. Laplace (1812), J.B.J. Fourier (1822), N.H. Abel (1823-1826), J. Liouville (1832-1873), B. Riemann (1847), H. Holmgren (1865-67), A.K. Grunwald (1867-1872), A.V. Letnikov (1868-1872), H. Laurent (1884), P.A. Nekrassov (1888), A. Krug (1890), J. Hadamard (1892), O. Heaviside (1892-1912) S. Pincherle (1902), G.H. Hardy et J.E. Littlewood (1917-1928), H. Weyl (1917), P. L'evy (1923), A. Marchaud (1927), H.T. Davis (1924-1936), A. Zygmund (1935-1945) E.R. Amour (1938-1996), A. Erd'elyi (1939- 1965), H. Kober (1940), D.V. Widder (1941), M. Riesz (1949).
[6] Cependant, cette théorie peut être considérée comme un sujet nouveau aussi, depuis seulement un peu plus de trente années elle a été objet de conférences spécialisées. Pour la première conférence, le mérite est attribué à B. Ross qui a organisé la première conférence sur les calculs fractionnaires et ses applications à l'université de New Haven en juin 1974, et il a édité les débats. Pour la première monographie le mérite est attribué à K.B. Oldham et J. Spanier, qui ont publié un livre consacré au calcul fractionnaire en 1974 après une collaboration commune, commencé en 1968.

Dans ce mémoire nous nous intéressons à l'étude de la dérivée fractionnaire et application, il est composé de trois chapitres :
Le Premier, intitulé préliminaire, comporte quelques notions de bases ainsi que toutes les notations et définitions qui nous serons utiles.

Le Deuxième, est consacré pour étudier les approches Riemann-Liouville et Caputo et l'intégral fractionnaire et ses propriétés.

le troisième, est ensacré à la résolution de problème fractionnaire

$$\begin{cases} U''(t) = f(t, U^{\alpha}(t)) \\ U'(0) = 0 \quad \alpha \leq 2 \\ U(0) = 0 \end{cases}$$

dans le cas de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo.

Chapitre 1

Préliminaire

1.1 Notations générales

Nous présentons ici les notations utilisées dans notre mémoire. Pour avoir plus des détails nous renvoyons le lecteur aux passages correspondants dans le texte. Nous avons numéroter les différents lemmes, propositions, remarques et théorèmes dans chaque chapitre de maniérer séquentielle. Quant aux formules, elles sont aussi numéroterais dans chaque chapitre d'une maniérer séquentielle.

Notation

- $\mathbb{R}$: ensemble des nombres réels.

- $\mathbb{C}$: ensemble des nombres complexes.

- $\mathbb{N}$: ensemble des nombres entiers naturels.

- $N^* = N \setminus \{0\}$.

- $Lp[a; b] = \{f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}, f$est mesurable sur $[a, b]et \displaystyle\int_a^b |f(x)|^p \, dx < \infty\}$.

- $L_\infty[a, b] = \{f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}, f$ est mesurable et essentiellement bornée sur $[a, b]\}$.

- $C^n[a, b] = \{f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}, f$ dérivable n fois et $f^{(n)}$ continue$\}$.

- $\Gamma(.)$: la fonction Gamma.

- $\beta(.)$: la fonction Bêta.

- $\Re(.)$: la partie réel de nombre complexe.

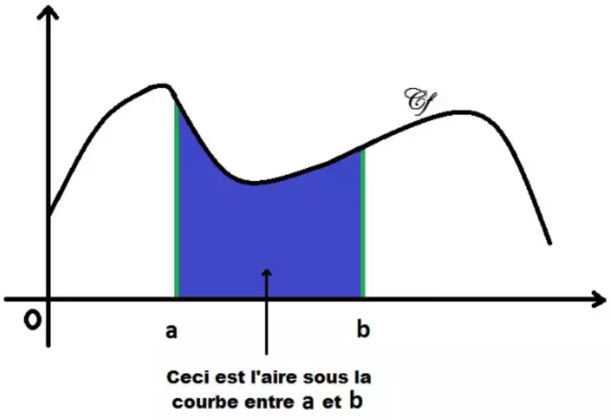
- $\mathcal{A}$: une algèbre.

- $PC([a; b]; E)$: espace des fonctions continues par morceaux sur [a, b] à valeurs dans un espace de Banach E.

- I_a^α : intégrale fractionnaire à gauche d'ordre $\alpha > 0$.
- ${}^cD_a^\alpha$:la dérivée fractionnaire au sens de Caputo.
- D_a^α : la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville.

1.2 Approche Historique[3]

Pour une fonction f continue sur un segment $[a, b]$le nombre $\int_a^b f(t)dt$ représente ,la portion du plan limité par l'axe des x,et les droites d'équation $x = a$ et, $x = b$ et le graphe



qui se calcule par une primitive Fde $f$sur $[a, b]$ suivant la formule :

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

En fait le nombre $\int_a^b f(t)dt$ est défini de façon assez compliqué par le passages à la limite suivant :

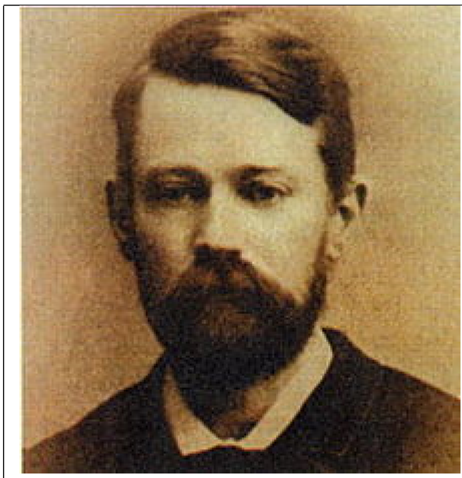
$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{n \to +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a + k\frac{b-a}{n})$$

en démontrant que cette limite existe.

Cette définition de l'intégrale permet de montrer que si f est continue sur un intervalle σ et si a est un point fixé dans cet intervalle, la fonction $x \to \int_a^x f(t)dt$ est une primitive de f sur σ. Il s'agit du théorème fondamental du calcul intégral.
en déduit alors que si F est une primitive de f sur [a, b], nous avons $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$.
Rappelons la propriété d'ordre absolument fondamentale que nous allons utiliser en permanence : si nous avons $f(t) \leq g(t) \leq h(t)$ sur le segment [a, b], avec $a < b$, alors :

$$\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt \leq \int_a^b h(t)dt$$

Intégrale de Stieltjes : [7]



Thomas Stieltjes(1856-1894)

L'intégrale de Stieltjes constitue une généralisation de l'intégrale ordinaire, ou intégrale de Riemann. En effet, considérons deux fonctions réelles bornées f et g définies sur un intervalle fermé [a, b] ainsi
qu'une subdivision$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b$ de cet intervalle. Si la somme de Riemann

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi)(g(x_{i+1}) - g(x_i))$$

avec $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$, tend vers une limite fixe S lorsque le pas $max(x_{i+1} - x_i)$ tend vers 0, alors S est appelé l'intégrale de Stieltjes (ou parfois l'intégrale de Riemann-Stieltjes) de la fonction f par rapport à g. On la note

$$\int_a^b f(x)dg(x)$$

ou simplement

$$\int_a^b fdg$$

Si les fonctions f et g possèdent un point de discontinuité en commun, alors l'intégrale n'existe pas. Cependant, si f est continue et $g' = dg/dx$ possède une intégrale de Riemann sur l'intervalle considéré, alors

$$\int_a^b f(x)dg(x) = \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

Ainsi, si f est continue et si g(x)=x, on retrouve la définition classique de l'intégrale de f au sens de Riemann, puisque $g'(x) = 1$ alors que dg(x)=dx. L'intégrale de Stieltjes étend donc la définition de Riemann.
Plus généralement, si f est continue et g à variations bornées, cette intégrale est bien définie.

1.3 Les espaces $L^p[10]$

Soit$[a,b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$

Définition 1.3.1. *Soit $1 \leqslant p < \infty$ on note par L^p l'espace des fonctions p-intégrables sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$:*

$$L^p([a,b]) = \{f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}, f \ mesurable, ||f||_{L^p} < \infty\}$$

Avec

$$||f||_{L^p([a,b])} = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

L'espace $||f||_{L^p([a,b])}$ muni de la norme $||.||_{L^p}$ est un espace de Banach
Soit $J = [0,b]$ et E est un espace de Banach, on note $C(J,E)$ l'espace de Banach des fonctions continues $y : J \longrightarrow E$ muni de la norme :

$$||y||_\infty = sup\{||y(t)||, t \in J\}$$

et soit l'intervalle $J_k = [t_k, t_{k+1}]$:
On définit l'espace :
$PC(J,E) = \{y : J_k \longrightarrow E$ est continue sur J_k et $y(t_k^-), y(t_k^+)$ existent et $y(t_k^-) = y(t_k), k = 1, \ldots\ldots, n\}$.
tel que :$y(t_k^-)$, et $y(t_k^+)$ sont les limites à gauche à droite de y en $t = t_k$.
L'espace $PC(J,E)$ muni de la norme :

$$||y|| = sup_{t \in J} ||y(t)||$$

est un espace de Banach.

1.4 Fonctions absolument continues[10]

Définition 1.4.1. *: Une fonction $f : J \longrightarrow E$, est dite absolument continue si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que pour toute partition définie $[a_i, b_i], i = 1, \ldots., p$ vérifiant :*

$$\sum_{i=1}^{p} (b_i - a_i) < \delta$$

,
alors

$$\sum_{i=1}^{p} ||f(b_i) - f(a_i)|| < \varepsilon$$

Définition 1.4.2. *: On note par $AC([a,b])$ l'espace des fonctions absolument continues sur $[a,b]$ constitué des fonctions f qui sont des primitives de fonctions Lebesgue-sommables* *i.e :*

$$f \in AC([a,b]) \Longleftrightarrow \varphi \in L^1([a,b]) telle que f = c + \int_a^x \varphi(t)dt$$

Ainsi, toute fonction f absolument continue possède une dérivée sommable $f' = \varphi$, presque partout sur $[a,b]$, et donc $c = f(a)$.

Définition 1.4.3. *: On note par $AC^n([a,b]), n \in \mathbb{N}^*$ l'espace des fonctions f définies sur $[a,b]$à valeurs dans C qui ont des dérivées continues sur $[a,b]$ jusqu'à l'ordre $(n-1)$ et telles que $f^{(n-1)} \in AC([a,b])$, ie :*

$$AC^n([a,b]) = \{f : [a,b] \longrightarrow c : f^{(k)} \in C([a,b]), k = 0, ..., n-1, f^{(n-1)} \in AC([a,b])\}$$

Remarque 1.4.1. *on a $AC^1([a,b]) = AC([a,b])$*

1.5 Outils de base

1.5.1 La fonction Gamma[6]

La fonction Γ d'Euler est une fonction qui prolonge la factorielle aux valeurs réels ou complexes.

Définition 1.5.1. *pour $\alpha > 0$ on définie $\Gamma(\alpha)$ par*

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx \tag{1.1}$$

la fonction Γ est bien définie pour tout $\alpha > 0$.

Exemple 1.5.1. *Évaluons $\Gamma(\frac{1}{2})$ par définition*

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}e^{-x}dx \tag{1.2}$$

posons $x = y^2$ alors

$$dx = 2ydy$$

d'où

$$\begin{aligned}\Gamma(\tfrac{1}{2}) &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{y}e^{-y^2}2ydy \\ &= 2\int_0^{+\infty} e^{-y^2}dy\end{aligned}$$

Calculons $[\Gamma(\frac{1}{2})]^2$ *, on trouve*

$$\begin{aligned}
[\Gamma(\frac{1}{2})]^2 &= [2\int_0^{+\infty} e^{-y^2}dy]^2 \\
&= [2\int_0^{+\infty} e^{-y^2}dy][2\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt] \\
&= 4\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-(t^2+y^2)}dtdy
\end{aligned}$$

C'est une intégrale double sur le premier quadrant du plan, on peut la calculer plus aisement en passant aux coordonnées polaires, posons $\begin{cases} x = rcos\theta \\ y = rsin\theta \end{cases}, \theta \in [0, \frac{\pi}{2}], r \in [0, +\infty]$

on aura

$$\begin{aligned}
[\Gamma(\frac{1}{2})]^2 &= 4\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{r=0}^{+\infty} e^{-r^2} rdrd\theta \\
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} [-\frac{e^{-r^2}}{2}]_0^{+\infty} d\theta \\
&= 4\left[-\frac{e^{-r^2}}{2}\right]_0^{+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \\
&= 4\frac{1}{2}\frac{\pi}{2} = \sqrt{\pi}
\end{aligned}$$

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi} \tag{1.3}$$

1.5.2 Propriété de la fonction Gamma

1. On remplace α par $\alpha + 1$ dans (1.6) et on intègre par partie, on obtient

$$\begin{aligned}
\Gamma(\alpha+1) &= \int_0^{\infty} x^{\alpha}e^{-x}dx = [-x^{\alpha}e^{-x}]_0^{+\infty} + \alpha\int_0^{\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx \\
&= 0 + \alpha\Gamma(\alpha)
\end{aligned}$$

alors

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha) \Rightarrow \Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha} \tag{1.4}$$

2. soit $\alpha > 0, \alpha \notin \mathbb{N}$ ona

$$(-1)^j\binom{\alpha}{j} = \binom{j-\alpha-1}{j} = \frac{\Gamma(-\alpha+j)}{\Gamma(j+1)\Gamma(-\alpha)} \tag{1.5}$$

3.
$$\Gamma(\alpha) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{n^{\alpha} n!}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)....(\alpha+n)} \tag{1.6}$$

Quelque valeurs particulières de la fonction Gamma

Proposition 1.5.1. *On donne quelques valeurs particulières de la fonction* Γ

1.$\Gamma(\frac{-3}{2}) = \frac{4}{3}\sqrt{\pi}$
2.$\Gamma(-1) = +\infty$
3.$\Gamma(\frac{-1}{2}) = -2\sqrt{\pi}$
4.$\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$
5.$\Gamma(n+\frac{1}{2}) = (n-\frac{1}{2})\Gamma(n-\frac{1}{2}) = (n-\frac{1}{2})(n-\frac{3}{2}).... - \frac{1}{2}\frac{3}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}$
6.$\frac{1}{\Gamma(0)} = 0$
7.$\Gamma(\frac{5}{2}) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}$
8.$\Gamma(1) = 0! = 1.$

1.5.3 La fonction Bêta[5]

Définition 1.5.2. *La fonction Bêta est une intégrale de type Euler définie pour tous nombres positives* $p > 0; q > 0$ *par*

$$\beta(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt$$

Proposition 1.5.2. *ona*

$$\beta(p,q) = \beta(q,p) \tag{1.7}$$

La Relation entre les fonctions Gamma et Bêta

La fonction Bêta est liée à la fonction Gamma par la relation suivante

$$\beta(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \tag{1.8}$$

1.6 Théorème de l'application contractante[2]

Définition 1.6.1. *Soit (M; d) un espace métrique complet et l'application* $T : M \longrightarrow M$, *on dit que* T *est une application Lipschitzienne s'il existe une constante positive* $k \geqslant 0$ *telle que l'on ait, pour tout couple d'éléments* x, y *de*M, *l'inégalité*

$$d(T(x).T(y)) \leqslant K(d(x,y)). \tag{1.9}$$

Si $k \leqslant 1$, *l'application* T *est appelée non expansive.*
Si $k < 1$, *l'application* T *est appelée contraction.*

Théorème 1.6.1. *(Théorème du point fixe de Banach)*
Soit $(M; d)$ un espace métrique complet et soit $T : M \longrightarrow M$ une application contractante avec la constante de contraction k ; alors T a un unique point fixe $x \in M$. De plus on a

$$si\ x_0 \in M \quad et \quad x_n = T(x_{n-1})$$

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} x_n = x \quad et \quad d(x_n, x) \leqslant k^n (1-k)^{-1} d(x_1, x_0) \quad n \geqslant 1$$

x étant le point fixe de T.

1.7 Intégrale dépendant d'un paramètre[15]

Soient $I = [a, b]$ et E étant un intervalle
soit

$$f : I \times E \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(t, x) \longrightarrow f(t, x)$$

On considère la fonction

$$\phi : E \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longrightarrow \int_a^b f(t, x) dt$$

$\phi(x)$ est une intégrale dépendant d'un paramètre.

Proposition 1.7.1. *: Si f est continue sur $I \times E$,alors ϕ est continue sur E.*

Proposition 1.7.2. *soient $I = [a, b[$, et E un intervalle de $\mathbb{R}$*
soit

$$f : I \times E \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(t, x) \longrightarrow f(t, x)$$

Si f est continue sur $I \times E$ et si $(t, x) \to \frac{df}{dx}(t, x)$ est continue sur $I \times E$, alors la fonction

$$\phi : E \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \to \int_a^b f(t, x) dt$$

est de classe C^1 sur E.
De plus $\forall x \in J$, $\phi'(x) = \int_a^b \frac{df}{dx}(t, x) dt$

1.7.1 Intégrale impropre d'un paramètre

Soient a un réel, E une partie de $\mathbb{R}$, et f une application de $[a,+\infty[\times E$ dans $\mathbb{R}$
On considère la fonction

$$\begin{array}{c} \phi : E \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow \int_a^{+\infty} f(t,x)dt \end{array}$$

ϕ est une intégrale impropre dépendant d'un paramètre.

1.7.2 Convergence simple

On dit que l'intégrale converge simplement sur E si :

$$\forall x \in E, \lim_{\alpha \longrightarrow +\infty} \int_a^{\alpha} f(t,x)dt$$

existe et est finie.

1.7.3 Convergence uniforme

On dit que l'intégrale converge uniformément sur E si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists c \geq a / \forall \alpha \geq c, \sup_R |\int_\alpha^\beta f(t,x)dt| \leq \varepsilon$$

1.7.4 Convergence normale

On suppose que pour tout $x \in E$, l'application $t \to f(t,x)$ de $[a;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ est localement intégrable.
s'il existe une application localement intégrable

$$g : [a;+\infty[\to \mathbb{R}_+$$

vérifiant :
(i) $\int_a^{+\infty} g(t)dt$ converge.
(ii) $\forall (t,x) \in [a;+\infty[\times E, \ |f(t,x)| \leq g(t)$
alors l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t,x)dt$ est dite normalement convergente.

Proposition 1.7.3. *:*
la convergence normale implique la convergence uniforme.

Proposition 1.7.4. *: soient a un réel, I un intervalle de $\mathbb{R}$, et f un application continue de $[a;+\infty[\times I$ dans $\mathbb{R}$*
si $\int_a^{+\infty} f(t,x)dt$ converge uniformément sur I, alors l'application

$$\begin{array}{c} \phi : I \to \mathbb{R} \\ x \to \int_a^{+\infty} f(t,x)dt \end{array}$$

est continue sur I.

1.8 La transformée de Laplace[1]

1. Si la fonction f est d'ordre exponentiel α (c'est à dire qu'il existe deux constantes positives M et T telles que $|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$ pour $t > T$) alors la fonction F de la variable complexe s, définie par :

$$F(s) = Lf(t)(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt$$

   est appelée la transformée de Laplace de la fonction f.

2. On peut reconstituer f à partir de sa transformée F à l'aide de la transformée de Laplace inverse
$$f(t) = L^{-1}F(\alpha)(t) = \int_{c+\infty}^{c-\infty} e^{st}F(s)ds \; c = Re(s)$$
3. La transformée de Laplace du produit de deux fonction f et g qui sont nulles pour $t < 0$ est égale au produit de leur transformées de Laplace.

4. La transformée de Laplace d'un dérivée d'ordre entier est :

$$\begin{aligned} L[f^{(n)}(t)](s) &= s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0) \\ &= s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-k-1)}(0) \end{aligned}$$

5. La transformée de Laplace de la fonction t^{p-1} est :

$$L[t^{p-1}](s) = \Gamma(p)s^{-p}$$

1.9 L'algèbre de Banach[9]

Définition 1.9.1. *:*
On appelle algèbre $\mathcal{A}$ sur $\mathbb{C}$ toute espace vectoriel $\mathcal{A}$ sur le corps $\mathbb{C}$ muni d'une troisième opération, nommée multiplication et vérifie pour tout x, y et $z \in \mathcal{A}$ les axiomes suivants :

1. $(xy)z = x(yz)$ *(associative),*
2. $x(y + z) = xy + xz, \quad (y + z)x = yx + yz,$
3. $\forall \alpha \in \mathbb{C}, \alpha(xy) = x(\alpha y)$ *(distributive).*

Si la multiplication est commutative, c-à-d $xy = yx$ pour tout $x, y \in \mathcal{A}$, on dit que $\mathcal{A}$ est une algèbre commutative.
si $\mathcal{A}$ complet, alors $\mathcal{A}$ algèbre de Banach

1.10 Les fonctions holomorphes[4]

Définition 1.10.1. *(fonction analytique)*
Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert et soit $f : U \to \mathbb{C}$ une application.
Soit $z_0 \in U$, On dit que f est analytique en z_0 s'il existe :

1) Un nombre $r > 0$ tel que le disque $|z - z_0| < r$ soit contenu dans U.

2) Une série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n w^n$ de rayon de convergence $\rho \geqslant r$ tels que, pour $|z-z_0| < r$, on a :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

On dit que f est analytique sur U si elle est analytique en tout point de U.

Définition 1.10.2. *(Fonctions holomorphes) Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$, z_0 un élément de U et $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction complexe. On dit que f est holomorphe au point z_0, si*

$$\lim_{\substack{u \to 0 \\ u \neq 0}} \frac{f(z_0 + u) - f(z_0)}{u} \quad \textit{existe.}$$

On dit que f est holomorphe dans l'ouvert U si elle est holomorphe en chaque point de U.

1.10.1 Équivalences entre holomorphes et analytiques

Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe sur l'ouvert Ω.
Alors f est analytique sur Ω
plus précisément, pour $a \in \Omega$,

$$f(z) = \sum_{n \geqslant 0} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z - a)^n \quad \textit{pourtout} \quad z \in D(a, \delta(a)).$$

De plus,pour tout $n \geqslant 0$ et $0 < R < \delta(a)$

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2i\pi} \int_{c(a,r)} \frac{f(w)}{(w - a)^{n+1}} dw.$$

En particulier f admet des dérivée de tout ordre $k \in \mathbb{N}^*$ et ces dérivées $f^{(k)}$ sont holomorphes sur Ω.

Chapitre 2

Calcul fractionnaire

2.1 L'intégrale fractionnaire [8, 14]

La notion d'intégrale fractionnaire d'ordre ($\alpha \in \mathbb{C}\ \Re(\alpha) > 0$), selon l'approche de Riemann-Liouville, généralise la célèbre formule (attribuée à Cauchy) d'intégrale répétée n-fois

$$(I_a^n f)(x) = \int_a^x dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 ... \int_a^{t_{n-1}} f(t_n) dt_n$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt \qquad (n \in \mathbb{N}^*)$$

Définition 2.1.1. *Soit $f \in L^1([a,b])$ l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville de la fonction f d'ordre ($\alpha \in \mathbb{C}\ \Re(\alpha) > 0$) notée I_a^α est défini par*

$$(I_a^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt \qquad x > a \tag{2.1}$$

Théorème 2.1.1. *Si $f \in L^1([a,b])$, alors $I_a^\alpha f$ existe pour presque tout $x \in [a,b]$ et de plus $I_a^\alpha f \in L^1([a,b])$*

Démonstration 2.3 : En introduisant la définition (2.1.1) puis an utilisant le théorème de Fubini, on trouve

$$\int_a^b |(I_a^\alpha f)(x)| dx \leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} |f(t)| dt dx$$

$$\leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b |f(t)| \int_t^b (x-t)^{\alpha-1} dx dt$$

$$\leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_a^b |f(t)| (b-t)^\alpha dt$$

$$\leqslant \frac{(b-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \int_a^b |f(t)| dt$$

puisque $f \in L^1([a,b])$, la dernière quantité est fini, ce qui établit le résultat désiré.

Proposition 2.1.1. *:*

1. $I_0^0 f(t) = I_d f(t) = f(t)$

2. $I_0^\alpha I_0^\beta f(t) = I_0^{\alpha+\beta} f(t)$

3. *L'opérateur intégral* I_0^α *est linéaire.*

Exemple 2.1.1. *Soient* $\alpha > 0$, $\beta > -1$ *et* $f(x) = (x-a)^\beta$, *alors*

$$(I_a^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1}(t-a)^\beta dt \tag{2.2}$$

En effectuant le changement de variable

$$t = a + (x-a)y \qquad (0 \leqslant y \leqslant 1)$$

alors (2.2) *devient*

$$\begin{aligned}
(I_a^\alpha f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1}(t-a)^\beta dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (x-a-(x-a)y)^{\alpha-1}[x+(x-a)y-x]^\beta (x-a)dy \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 [(x-a)(1-y)]^{\alpha-1}(x-a)^{\beta+1} y^\beta dy \\
&= \frac{(x-a)^{\beta+1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-y)^{\alpha-1} y^\beta dy \\
&= \frac{(x-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-y)^{\alpha-1} y^{(\beta+1)-1} dy
\end{aligned}$$

En tenant compte de la définition la fonction Bêta (1.15) *puis de la relation* (1.16) *on arrive à :*

$$\begin{aligned}
(I_a^\alpha (f)(x) &= \frac{(x-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} B(\alpha, \beta+1) \\
&= \frac{(x-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} \\
&= \frac{\Gamma(1+\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} (x-a)^{\alpha+\beta}
\end{aligned}$$

Ainsi on obtient

$$(I_a^\alpha (t-a)^\beta)(x) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} (x-a)^{\alpha+\beta} \tag{2.3}$$

cas particulier : Soit $f(x) = x^\beta$ avec $\beta > -1$ on a

$$(I_0^\alpha f)(x) = I^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x t^\beta (x-t)^{a-1} dt \tag{2.4}$$

En posant : $t = xu$, (2.4) devient

$$I^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (xu)^\beta (1-u)^{\alpha-1} x du$$

En utilisant la définition de la fonction Bêta puis de la relation on arrive à :

$$\begin{aligned}
I^\alpha f(x) &= \frac{x^{\beta+a}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 u^\beta (1-u)^{\alpha-1} du \\
&= \frac{x^{\beta+a}}{\Gamma(\alpha)} B(\beta+1, \alpha) \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} x^{\alpha+\beta}
\end{aligned}$$

Proposition 2.1.2. *Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tels que $\Re(\alpha), \Re(\beta) > 0$, pour toute fonction $f \in L^1([a,b])$, on a :*

$$I_a^\alpha (I_a^\beta f) = I_a^{\alpha+\beta} f = I_a^\beta (I_a^\alpha f) \tag{2.5}$$

pour presque tout $x \in [a,b]$. Si de plus $f \in C([a,b])$, alors cette identité est vraie pour tout $x \in [a,b]$

Démonstration 2.6 :
Supposons d'abord que $f \in L^1([a,b])$, on a :

$$\begin{aligned}
[I_a^\alpha (I_a^\beta f](x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-s)^{\alpha-1} (I_a^\beta f)(s) ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\beta)} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-s)^{\alpha-1} \int_a^s (s-t)^{\beta-1} f(t) dt ds
\end{aligned}$$

En vertu de théorème (2.3), les intégrale figurant dans l'égalité précédente existent pour presque tout $x \in [a,b]$, et le théorème de Fubini permet donc d'écrire :

$$[I_a^\alpha (I_a^\beta f)](x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(t) \left[\int_t^x (x-s)^{\alpha-1} (s-t)^{\beta-1} ds \right] dt$$

En effectuant le changement de variable

$$s = t + (x-t)y \quad (0 \leqslant y \leqslant 1)$$

on obtient

$$[I_a^\alpha (I_a^\beta f)](x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(t)(x-t)^{\alpha+\beta-1} \int_0^1 (1-y)^{\alpha-1} y^{\beta-1} dy dt$$

Enfin, en tenant de la définition (1.15) puis de la relation (1.16) on obtient :

$$[I_a^\alpha(I_a^\beta f)](x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(\beta)}\int_a^x f(t)(x-t)^{\alpha+\beta-1}dt = (I_a^{\alpha+\beta}f)(x)$$

supposons maintenant que $f \in C([a,b])$, alors (d'après les théorèmes sur les intégrale dépendant de paramètre) $I_a^\beta f \in C([a,b])$, et par suite

$$I_a^{\alpha+\beta}f, I_a^\alpha I_a^\beta f \in C([a,b])$$

Ainsi, d'après ce qui précède, les deux fonctions continues $I_a^{\alpha+\beta}f$, $I_a^\alpha I_a^\beta f$ presque partout sur $[a,b]$, elles doivent donc coincider partout sur $[a,b]$.

le théorème suivant fournit un résultat concernant l'inversion de la limite et de l'intégrale fractionnaire.

Théorème 2.1.2. *Soient $\alpha > 0$, et $(f_k)_{k=1}^{+\infty}$ est une suite de fonction continues et simplement convergentes sur $[a,b]$. Alors on peut invertir l'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville et la limite comme suit :*

$$[I_a^\alpha(\lim_{k\longrightarrow+\infty} f_k)](x) = \lim_{k\longrightarrow+\infty}(I_a^\alpha f_k)(x)$$

Démonstration 2.8 :
Soit f_k une suit converge vers f alors

$$\begin{aligned}
|I_a^\alpha f_k(x) - I_a^\alpha f(x)| &= |\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x |f_k(t)-f(t)|(x-t)^{\alpha-1}dt| \\
&\leqslant \frac{||f_k-f||_\infty}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}dt \\
&\leqslant \frac{||f_k-f||_\infty}{\Gamma(\alpha)}\frac{1}{\alpha}(x-a)^\alpha \\
&\leqslant \frac{(x-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}||f_k-f||_\infty \\
&\leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}||f_k-f||_\infty(b-a)^\alpha k \longrightarrow +\infty \longrightarrow 0
\end{aligned}$$

2.2 La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville[8, 14]

Définition 2.2.1. *Soit $f \in L^1([a,b])$ une fonction intégrable sur $[a,b]$, la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville de la fonction f d'ordre $\alpha \in C(\Re(\alpha) > 0)$ notée $D_a^\alpha f$est définie par :*

$$(D_a^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1}f(t)dt \tag{2.6}$$

où $n-1 < [\Re(\alpha)] < n$ et $x > a$.
En particulier, pour $\alpha = n \in \mathbb{N}$, on a

$$(D_a^0 f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1)}(\frac{d}{dx})\int_a^x f(t)dt = f(x) \tag{2.7}$$

$$(D_a^n f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1)}\left(\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\right)\int_a^x f(t)dt = \frac{d^n}{dx^n}f(x) \tag{2.8}$$

par suite la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville coincide avec la dérivée classique pour $\alpha \in \mathbb{N}$

Remarque 2.2.1.

$$(D_a^\alpha f)(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n (I_a^{n-\alpha} f)(x)$$

tel que :$n = [\Re(\alpha)] + 1, x > a$

Exemple 2.2.1. *:[13] Reprenons l'exemple de la fonction $f(x) = (x-a)^\beta$ alors :*

$$D_a^\alpha f = \left(\frac{d}{dx}\right)^n \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+n-\alpha)}(x-a)^{\beta+n-\alpha}$$

$$= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+n-\alpha)}\frac{\Gamma(\beta+1+n-\alpha)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)}(x-a)^{\beta-\alpha}$$

$$= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)}(x-a)^{\beta-\alpha}$$

où nous avons utilisé la formule

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n (x-a)^\lambda = \lambda(\lambda-1)....(\lambda-n+1)(x-a)^{\lambda-n} = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+1-n)}(x-a)^{\lambda-n}$$

pour $\alpha = 1$

$$D_a^{(1)} = \left(\frac{d}{dx}\right)^n \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+n-\alpha)}(x-a)^{\beta+n-1}$$

$$= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta)}(x-a)^{\beta-1}$$

$$= \beta(x-a)^{\beta-1} = \frac{d}{dx}(x-a)^\beta$$

.

Si on pose $\beta = 0$ dans l'égalité précédent, on obtient

$$D_a^{(\alpha)}(1) = \frac{(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}.$$

C'est -à-dire que la dérivée de Riemann-Liouville d'une constante n'est pas nulle ! est en général infinie pour $x = a$:

Proposition 2.2.1. *: Soient $\alpha \geqslant 0$ et $n = [\alpha] + 1$. Si $f \in AC^n([a, b])$, alors la dérivée fractionnaire $D_a^\alpha f$ existe presque partout sur $[a, b]$ et de plus, elle est donnée par*

$$D_a^\alpha f(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(a)}{\Gamma(j - \alpha + 1)}(x - a)^{j-\alpha} + \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^x (x - t)^{n-\alpha-1} f^n(t) dt$$

Lemme 2.2.1. *[13] L'opérateur de dérivation de Riemann-Liouville D_a^α possède les propriétés suivantes :*

1. D_a^α est linéaire
2. $\lim\limits_{\substack{> \\ \alpha \longrightarrow n-1}} D_a^\alpha f = f^{(n-1)} \quad , \lim\limits_{\substack{< \\ \alpha \longrightarrow (n)}} D_a^\alpha f = f^{(n)}$
3. $D_a^\alpha o I_a^\alpha = id.$

Preuve :

1. (pour la linéarité) :on a

$$\begin{aligned}
D_a^\alpha(\lambda f(x) + \mu g(x)) &= \left(\frac{d}{dx}\right)^n (I_a^{n-\alpha}(\lambda f(x) + \mu g(x))) \\
&= \left(\frac{d}{dx}\right)^n \left[\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1}(\lambda f(t) + \mu g(t))\right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \left[\lambda \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} g(t) dt + \mu \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} g(t) dt\right] \\
&= \lambda \left(\frac{d}{dx}\right)^n \left[\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t) dt\right] + \mu \left(\frac{d}{dx}\right)^n \left[\int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} g(t\right. \\
&= \lambda D_a^\alpha f(x) + \mu D_a^\alpha g(x)
\end{aligned}$$

2. Supposons que est f de classe C^n, alors

$$f(x) = (I_a^\alpha f^{(n)})(x) + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^j(a)}{j!}(x - a)^j$$

et donc

$$I_a^{n-\alpha} f(x) = I_a^{n-\alpha}(I_a^n f^{(n)})(x) + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^j(a)}{j!} I_a^{n-\alpha}(x - a)^j$$

$$= I_a^{2n-\alpha}(f^{(n)})(x) + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^j(a)}{\Gamma(j + 1 + n - \alpha)}(x - a)^{j+n-\alpha}$$

donc

$$\begin{aligned} D_a^{(\alpha)} f(x) &= \left(\frac{d}{dx}\right)^n I_a^{n-\alpha} f(x) \\ &= \left(\frac{d}{dx}\right)^n \left[I_a^{2n-\alpha}(f^{(n)}(x) + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^j(a)}{\Gamma(j+1+n-\alpha)}(x-a)^{j+n-\alpha} \right] \\ &= I_a^{n-\alpha}(f^{(n)})(x) + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^j(a)}{\Gamma(j+1-\alpha)}(x-a)^{j-\alpha} \end{aligned}$$

Par passage a la limite quand $\overset{<}{\alpha \longrightarrow (n)}$ on obtient

$$\lim_{\overset{<}{\alpha \longrightarrow n}} D_a^{\alpha} f(x) = \lim_{\overset{<}{\alpha \longrightarrow n}} I_a^{n-\alpha}(f^{(n)})(x) + \lim_{\overset{<}{\alpha \longrightarrow n}} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^j(a)}{\Gamma(j+1-\alpha)}(x-a)^{j-\alpha} = f^{(n)}(x)$$

3.

$$\begin{aligned} D_a^{(\alpha)} f(x) &= \left(\frac{d}{dx}\right)^n I_a^{n-\alpha}\Big(I_a^{\alpha} f(x)\Big) \\ &= \left(\frac{d}{dx}\right)^n I_a^{n} f(x) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

2.3 La dérivée fractionnaire au sens de Caputo[10, 16]

Définition 2.3.1. *: Pour une fonction donnée f sur l'intervalle $[a,b]$ la dérivée d'ordre fractionnaire au sens de Caputo de f, d'ordre $\alpha > 0$ est définie par :*

$${}^cD_a^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} D^{(n)} f(t) dt$$

où $n = [\alpha] + 1$ et $[\alpha]$ désigne la partie entière de α.

Théorème 2.3.1. *: Soit $\alpha > 0$, si $f \in AC^n([a,b])$, alors la dérivée fractionnaire de Caputo ${}^cD_a^{\alpha} f(t)$ existe presque partout sur $[a,b]$, et on a :*

1.si $\alpha \notin \mathbb{N}$, alors ${}^cD_a^{\alpha} f(t)$ est donnée par :

$${}^cD_a^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} D^{(n)} f(t) dt$$

$$= I_a^{n-\alpha} D^n f(x)$$

En particulier, lorsque $0 < \alpha < 1$ et $f \in AC([a,b])$ alors :

$$D_a^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{-\alpha} f'(t) dt$$

$$= I_a^{1-\alpha} f'(t)$$

2.si $\alpha = n \in \mathbb{N}$ alors ${}^cD_a^{n} f(x) = f^{(n)}(x)$

Exemple 2.3.1. *[13]*
Reprenons l'exemple de la fonction $f(x) = (x-a)^{\beta}$.
Alors

$$\begin{aligned}
{}^cD_a^{(\alpha)}(x-a)^\beta &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t)dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1}\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-n)}(x-a)^{\beta-n}dx \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta+1+n-\alpha)}\int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1}(x-t)^{\beta-n}dt \\
&= \left(\frac{d}{dt}\right)^n \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+n-\alpha)}(x-t)^{\beta+n-\alpha} \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+n-\alpha)}\frac{\Gamma(\beta+1+n-\alpha)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)}(x-a)^{\beta-\alpha} \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)}(x-a)^{\beta-\alpha}
\end{aligned}$$

Remarque 2.3.1. *:[10]*
La dérivée fractionnaire de Caputo d'une constante est nulle :

$$\forall C \in \mathbb{R}, \quad {}^cD_a^\alpha C = 0$$

Lemme 2.3.1. *:[10]*
Soient $\alpha > 0$ et $f \in L^\infty[a,b]$alors :

$${}^cD_a^\alpha(I_a^\alpha)f(x) = f(x) + c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \ldots.. + c_{n-1}t^{n-1}$$

pour certaines constantes $c_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, ..., n-1, n = [\alpha]+1$

Proposition 2.3.1. *[11] on a :*

1. ${}^cD_a^\alpha[I_a^\alpha f] = f$
2. $I_a^\alpha[{}^cD_a^\alpha f](x) = f(x) + \sum_{j=0}^{n-1}\frac{(x-a)^j}{j!}f^{(j)}(a)$
3. *Si*$0 \leqslant \alpha, \beta \leqslant 1$ *avec* $\alpha+\beta \leqslant 1$ *et* f *de classe* C^1

$$({}^cD_a^\alpha \circ {}^c D_a^\beta)f = {}^c D_a^{\alpha+\beta} = ({}^cD_a^\beta \circ {}^c D_a^\alpha)f$$

Preuve :

1.
$$
\begin{aligned}
{}^{C}D_a^{\alpha}[I_a^{\alpha} f](x) &= I_a^{n-\alpha}\left[\left(\frac{d}{dx}\right)^n I_a^{\alpha} f(x)\right] \\
&= I_a^{n-\alpha}\left[\left(\frac{d}{dx}\right)^n \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt\right)\right] \\
&= I_a^{n-\alpha}\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{\Gamma}{\Gamma(\alpha-n)}(x-t)^{\alpha-1-n} f(t)dt\right] \\
&= I_a^{n-\alpha}\left[\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^n \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{\Gamma(\alpha-n)}{\Gamma(\alpha-n)}(x-t)^{\alpha-1-n} f(t)dt\right] \\
&= (I_a^{n-\alpha}[I_a^{n-\alpha} f])(x) = I_a^0 f(x) = f(x)
\end{aligned}
$$

$$
\Longrightarrow^{c} D_a^{\alpha}[I_a^{\alpha} f](x) = f(x) \tag{2.9}
$$

2. D'après (2.5) on a

$$
\begin{aligned}
I_a^{\alpha}[{}^{c}D_a^{\alpha} f](x) &= I_a^{\alpha}[I_a^{n-\alpha} f^n(x)] \\
&= I^n f^{(n)}(x) \\
&= f(x) + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(a)(x-a)^j}{j!}
\end{aligned}
$$

3. En utilisant la règle de composition de l'intégrale de Riemann-Liouville et la définition de la dérivée de Caputo, on peut écrire.

$$
\begin{aligned}
({}^{c}D_a^{\alpha} \circ^{c} D_a^{\beta})f &= ((I_a^{1-\alpha} \circ D^1) \circ (I_a^{1-\beta} \circ D^1))f \\
&= \left(I_a^{1-\alpha-\beta} \circ \underbrace{I_a^{\beta} \circ D^1}_{{}^{c}D_a^{1-\beta}} \circ I_a^{1-\beta} \circ D^1\right) f \\
&= \left(I^{1-\alpha-\beta} \circ \underbrace{{}^{c}D_a^{1-\beta} \circ I_a^{1-\beta}}_{id} \circ D^1\right) f \\
&= \left(I^{1-(\alpha+\beta)} \circ D^1\right) f \\
&= {}^{c}D_a^{\alpha+\beta} \\
\Longrightarrow ({}^{c}D_a^{\alpha} \circ^{c} D_a^{\beta})f &= {}^{c}D_a^{\alpha+\beta}
\end{aligned}
$$

2.4 Propriété des dérivée fractionnaire[2]

2.4.1 Linéarité :

La dérivation fractionnaire est une opération linéaire

$$D^{\alpha}(\lambda f(t) + \mu g(t)) = \lambda D^{\alpha} f(t) + \mu D^{\alpha} g(t) \tag{2.10}$$

2.5 La règle de Leibniz

Pour n entier on a

$$\frac{d^n}{dt^n}(f(t)g(t)) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(t) g^{n-k}(t)$$

La généralisation de cette formule nous donne

$$D^p(f(t)g(t)) = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} f^{(k)}(t) D^{(p-k)} g(t) + R_n^p(t) \tag{2.11}$$

où $n \geqslant p+1$ et

$$R_n^p(t) = \frac{1}{n!\Gamma(-p)} \int_a^t (t-\tau)^{-p-1} g(\tau) d\tau \int_\tau^t f^{(n+1)}(\varsigma)(\tau - \varsigma)^n d\varsigma$$

avec $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} R_n^p(t) = 0$. Si f et g sont continues dans $[a;t]$ ainsi que toutes leurs dérivées ; la formule devient :

$$D^p(f(t)g(t)) = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} f^{(k)}(t) D^{(p-k)} g(t).$$

2.6 Relation entre L'approche de Riemann-Liouville et celle de caputo [8, 14]

Le théorème suivants établit le lient entre la dérivée fractionnaire au sens de Caputo et celle au sens de Riemann-Liouville.

Théorème 2.6.1. *: Soient $\alpha \geqslant 0, n = [\alpha]+1$. Si f possède $(n-1)$ dérivée en a et si $D_a^{\alpha} f$ existe, alors :*

$$({}^{c}D_a^{\alpha} f)(x) = D_a^{\alpha}[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^k(a)}{k!}(x-a)^k]$$

presque par tout sur $[a, b]$

Proposition 2.6.1. *[11]*

Si ${}^{C}D_a^{\alpha} f = 0$ alors $f(x) = \sum_{j=0}^{n-1} C_j (x-a)^j$

Démonstration :

$$\left({}^{c}D_a^{\alpha} f\right)(x) = D_a^{\alpha}\left[f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(x-a)^j}{j!} f^{(j)}(a)\right] \tag{2.12}$$

$$\left({}^{c}D_a^{\alpha} f\right)(x) = 0 \Longleftrightarrow D_a^{\alpha}\left[f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(x-a^{(j)})(a)}{j!}\right] = 0$$

$$\Longleftrightarrow D_a^{\alpha} f(x) - D_a^{\alpha}\left(\sum_{j=0}^{n-1} \frac{(x-a)^{(j)}}{j!} f^{j}(a)\right) = 0$$

$$\Longrightarrow f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(x-a)^j}{j!} f^{(j)}(a) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1+\alpha-n)} (x-a)^{j+\alpha-n}$$

$$\Longrightarrow f(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(x-a)^j}{j!} f^{(j)}(a) + \sum_{j=0}^{n-1} c_j \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1+\alpha-n)} (x-a)^{j+\alpha-n}$$

$$\Longrightarrow f(x) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1+\alpha-n)} (x-a)^{j+\alpha-n)} + \frac{(x-a)^j}{j!} f^{(j)}(a)$$

Remarque 2.6.1. *:*
Le résultat du théorème (3.4.1) *signifie que la dérivation au sens de Caputo d'une fonction f est une dérivation fractionnaire du reste dans le développement de Taylor de f.*

Chapitre 3

L'applications des dérivées fractionnaire

Dans ce chapitre, on s'intéresse au problème pour équations différentielles d'ordre fractionnaire :

$$(I)\begin{cases} U''(t) = f(t, U^{\alpha}(t)) \\ U'(0) = 0 \quad \alpha \leqslant 2 \\ U(0) = 0 \end{cases}$$

on a

$t \in [0, R[\qquad D = \frac{\partial}{\partial t}$

$D^{-1}u$ la primitive de u par rapport à t qui s'anulle avec t, la fonction f est une fonction de t et de y
la condition $\{u'(0) = 0, u(0) = 0\}$ signifie que $u(t) = t^2 g(t)$, où g est analytique à l'origine de 0
on a $D^{\beta}u(0) = 0$ pour tout $\beta < 2$, nous supposerons donc f analytique au voisinage positif de 0
on pose

$$A_y = D_y f(0,0)$$

pour tout $\xi \in {}_{\mathbb{R}^*{}_+}$ tq

$$\rho(\xi) = |A_y|\xi^{\alpha-2} \tag{3.1}$$

on peut énoncer alors le théorème :

Théorème 3.0.2. *S'il existe $\xi \in (\mathbb{R}^*{}_+)$ tq $\rho(\xi) < 1$, le problème de Cauchy (I)admet une unique solution analytique au voisinage positif de l'origine.*
Pour prouver ce théorème on peut supposer $\alpha \leqslant 0$ suffit de prendre $u''(t)$ comme inconnue, on peut supposer en outre

$$f(0,0) = 0. \tag{3.2}$$

En effet, si $c = f(0,0)$ et $v(t) = u(t) - c$; on a alors

$$v = f(t, v^{(\alpha)} + c^{(\alpha)}) - c = g(t, v^{(\alpha)}) \tag{3.3}$$

où $g(t,y) = f(t, y + c^{(\alpha)}) - c$
d'où $g(0,0) = f(0,0) - c = 0$
vu que $c^{(\alpha)}(0) = 0$ pour tout $\alpha < 2$, on constate enfin que la fonction spectral du problème de Cauchy (3.4) coïncide avec celle de problème initial
En résumé il s'agit de prouver le théorème pour le problème

$$u(t) = f(t, u^{(\alpha)}(t))$$

où

$$\alpha < 0 \quad et \quad f(0.0) = 0$$

A cet effet, nous allons montrer que l'application

$$T : u \longrightarrow f(t, u^{(\alpha)}(t))$$

est une contraction stricte dans un espace métrique complet,
cet espace métrique complet sera tout simplement une boule fermé dans une algèbre de Banach qui sera définie par l'intermédiaire de certaines fonctions majorantes.

FONCTION MAJORANTES[17] :

si $u = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} u_\alpha x^\alpha, \Phi = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} \Phi_\alpha x^\alpha$sont deux séries formelles avec $u_\alpha \in \mathbb{C}, \Phi_\alpha \in \mathbb{R}_+$ on note $u << \Phi$ la relation $(\forall\alpha \in \mathbb{N}^n(|u_\alpha| \leqslant \Phi_\alpha)$ si Φ est une série convergente, on note B_Φ l'espace de Banach

$$B_\Phi = \{u \in \mathbb{C}\{x\}, (\exists c \geqslant 0)(u << c\Phi)\}$$

pour la norme

$$||u||_\Phi = Min\{c \geqslant 0, u << c\Phi\}$$

Nous utiliserons la fonction majorante

$$\theta(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{(n+1)^2}$$

dont voici une propriété essentielle

Proposition 3.0.2. *il existe une constante $K > 0$ telle que*

$$\theta^2(t) << K\theta(t).$$

Preuve :
Majorons le coefficient de t^n dans θ^2 :

$$\sum_{j=0^n} \frac{1}{(j+1)^2}\frac{1}{(n-j+1)^2} \leqslant 2\sum_{0\leqslant j\leqslant \frac{n}{2}} \frac{1}{(j+1)^2}\frac{1}{(n-j+1)^2} \leqslant 2\Big(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{(j+1)^2}\Big)\frac{1}{((n/2)+1)^2}$$

et ceci permet de conclure
Nous utiliserons alors la fonction majorante

$$\varphi_R(t) = K^{-1}\theta(\frac{t}{R}), R > 0 \tag{3.4}$$

qui dépend du paramètre réel $R > 0$.
On notera que

$$\varphi_R(0) = K^{-1}. \tag{3.5}$$

La proposition précédente prouve que

$$\varphi_R^k(t) << \varphi_R(t) \quad pourtout \quad k \geqslant 1 \quad et \quad tout \quad R > 0. \tag{3.6}$$

Étant donné un paramètre $\xi \in (\mathbb{R}^*{}_+)$, on notera $B_R(\xi)$ l'espace de Banach associé à la fonction majorante $\varphi(\xi t)$

Corollaire : les espace $B_R(\xi)$ sont algèbre de Banach .

Note : si $u \in B_R(\xi)$, on notera $||u||_{R,\xi}$ la norme de u dans l'espace $B_R(\xi)$ et, si aucune confusion n'est a craindre, cette norme sera simplement notée $||u||$.

Voici une conséquence importante de ce qui précède.

Proposition 3.0.3. *:*
Soient $u \in B_r(\xi)$ et $R' > 0$ tels que $||u|| < R'$, alors la fonction $\frac{R'}{R'-u}$ appartient à $B_R(\xi)$ et

$$\frac{R'}{R'-u} << (K + \frac{||u||}{R' - ||u||})\varphi_R(\xi t)$$

Preuve :
si $||u|| < R'$ on a $|u(0)| \leqslant ||u||\varphi_R(0) < R'$ car $\varphi_R(0) \leqslant 1$vu l'inégalité $\varphi_R^2 << \varphi_R$. Ceci preuve que la fonction $x \longrightarrow R'/[R' - u(t)]$ est définie et analytique au voisinage de l'origine.
En outre

$$\frac{R'}{R'-u} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{u}{R'}\right)^n \ll \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{||u||}{R'}\right)^n \varphi_R(\xi t) \ll 1 + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{||u||}{R'}\right)^n \varphi_R(\xi t)$$

Remarque 3.0.2. *:*

$$1 = k\varphi_R(0) \ll K\varphi_R(\xi t)$$

Toute fonction de l'espace $B_R(\xi)$ est analytique au voisinage de l'origine,
inversement, ξ étant fixé, toute fonction analytique au voisinage de l'origine appartient à l'espace$B_R(\xi)$ dés que R est suffisamment petit, pour vérifier cette propriété nous utiliserons le :

Lemme 3.0.1. *pour tout $\eta > 1$, il existe $c = c(\eta) > 0$ tel que*

$$\frac{\eta R}{\eta R - t} << c\varphi_R(t).$$

Preuve :
cette inégalité signifie que

$$\frac{1}{(\eta R)^n} \leqslant c(\eta)k^{-1}\frac{1}{R^n}\frac{1}{(n+1)^2} \quad pourtout \quad n \in \mathbb{N}$$

elle est donc vérifiée avec

$$c(\eta) = supK\frac{(n+1)^2}{\eta}$$

u est une fonction analytique est bornée dans le disque

$$\Delta = \{x \in \mathbb{C}, \xi|t| < \eta R\},$$

L'inégalité de Cauchy :

$$|D^\alpha u(0)| \leqslant M\frac{\xi^\alpha}{(\eta R)^{|\alpha|}}\alpha! \;\; \alpha \in \mathbb{N}^n \quad M = \sup_\Delta |u|.$$

Signifient que :

$$u \ll M\frac{\eta R}{\eta R - \xi t}$$

. d'où

$$u \ll M\frac{\eta R}{\eta R - \xi t} \ll c(\eta)M\varphi_R(\xi t)$$

Ceci prouve qu'une telle fonction u appartient à l'espace $B_R(\xi)$ et, par suite

$$c\{x\} = \cup_{R>0}B_R(\xi).$$

Lemme 3.0.2. *il existe une constante $c > 0$ telle que*

$$D^{-k}\varphi_R(\xi t) \ll cR^k\varphi_R(\xi t) \quad pourtout \quad R > 0 \quad et \quad tout \quad k \in \mathbb{N}$$

Preuve :
on a en effet

$$D^{-k}\varphi_R(\xi t) = K^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}\frac{1}{R^n}\frac{n!}{(n+k)!}t^{n+k}$$

et l'inégalité cherchée s'écrit :

$$c \geqslant \left(\frac{n+k+1}{n+1}\right)^2\frac{n!}{(n+k)!} \quad (n, k \in \mathbb{N})$$

cette dernière fonction étant décroissante par rapport à n, il suffit de choisir

$$c = \sup_k\frac{(k+1)^2}{k!}$$

Proposition 3.0.4. *:*
si

$$u \ll ||u||\varphi_R(\xi t) \qquad \alpha \leqslant 0$$

alors :

$$^cI^\alpha u \ll c||v||\frac{R^{2-\alpha}}{\xi^{2-\alpha}}$$

Démonstration :
on a :

$$v = u'' \Longrightarrow u = v^{(-2)}$$

$$^cD^\alpha v^{(-2)} = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^x (x-t)^{n-\alpha-1}D^nD^{-2}v(t)dt$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha}\int_0^x (x-t)^{n-\alpha-1}D^{n-2}v(t)dt$$

d'après le lemme (3.0.2)*,on a :*

$$D^{n-2}v \ll ||v||D^{n-2}\varphi_R(\xi,t) \ll cR^{2-n}\xi^{n-2}\varphi_R(\xi t)||v||$$

$$= c||v||R^{2-n}\xi^{n-2}\varphi_R(\xi t)$$

et part suite :

$$D^\alpha v^{-2} \ll \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^x (x-t)^{n-\alpha-1}c||v||R^{2-n}\xi^{n-2}\varphi_R(\xi t)$$

$$= \frac{c||v||R^{2-n}\xi^{n-2}}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^x (x-t)^{n-\alpha-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\xi t)^k}{R^k(k+1)^2}dt$$

comme la série :

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\xi t)^k}{R^k(k+1)^2}$$

et uniformément converge on a :

$$D^\alpha v^{-2} \ll \frac{c||v||R^{2-n}\xi^{n-2}}{\Gamma(n-\alpha)}\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^x (x-t)^{n-\alpha-1}\frac{(\xi t)^k}{R^k(1+k)^2}dt$$

$$= \frac{c||v||R^{2-n}\xi^{n-2}}{\Gamma(n-\alpha)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\xi^k}{R^k(1+k)^2}\int_0^x (x-t)^{n-\alpha-1}t^k dt$$

et posant, $t = xu$ *alors* $dt = xdu$

et on a :

$$\int_0^x (x-t)^{n-\alpha-1}t^k dt = \int_0^1 (x-xu)^{n-\alpha-1}(xu)^k x du$$

$$= x^{n-\alpha-1+k+1}\int_0^1 (1-u)^{n-\alpha-1}u^k du$$

$$= x^{n-\alpha+k}\beta(n-\alpha, k+1)$$

donc :

$$\begin{aligned}
D^\alpha v^{-2} &= c||v||R^{2-n}\xi^{n-2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\xi}{R}\right)^k\frac{1}{(1+k)^2}x^{n-\alpha+k}\frac{\beta(n-\alpha,k+1)}{\Gamma(n-\alpha)}\\
&= c||v||R^{2-n}\xi^{n-2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\xi}{R}\right)^k\frac{1}{(1+k)^2}x^{n-\alpha+k}\frac{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(k+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(n-\alpha+k+1)}\\
&= c||v||R^{2-n}\xi^{n-2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\xi}{R}\right)^k\frac{1}{(1+k)^2}x^{n-\alpha+k}\frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(n-\alpha+k+1)}
\end{aligned}$$

et en se seposant sur le fait que : $\forall k > 0 \quad et \quad \alpha < n$

$$\Gamma(k+1) \leqslant \Gamma(n-\alpha+k+1)$$

on trouve alors,

$$D^\alpha v^{-2} \ll c||v||R^{2-n}\xi^{n-2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\xi}{R}\right)^k\frac{1}{(1+k)^2}x^{n-\alpha+k}$$

$$= c||v||R^{2-n}\xi^{n-2}x^{n-\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\xi x}{R}\right)^k\frac{1}{(1+k)^2}$$

elle en tenant compte que

$$\xi x < R \Longrightarrow x < \frac{R}{\xi}$$

on déduit,

$$D^\alpha v^{-2} \ll c||v||R^{2-n}\xi^{n-2}\left(\frac{R}{\xi}\right)^{n-\alpha}\varphi_R(\xi x)$$

$$\ll c||v||\frac{R^2}{R^n}\frac{\xi^n}{\xi^2}\frac{R^{n-\alpha}}{\xi^{n-\alpha}}\varphi_R(\xi x)$$

$$\ll c||v||\frac{R^{2-\alpha}}{\xi^{2-\alpha}}\varphi_R(\xi x)$$

$$D^\alpha v^{-2} \ll c||v||\frac{R^{2-\alpha}}{\xi^{2-\alpha}}\varphi_R(\xi x).$$

Preuve du théorème :
par hypothèse, il existe $\xi \in (\mathbb{R}^*{}_+)$ tel que

$$\rho(\xi) = |A_\alpha|\xi^\alpha < 1;$$

le paramètre ξ est ainsi fixé.
Nous omettrons d'indiquer les éventuelles dépendances par rapport à ξ, en particulier l'algèbre $B_R(\xi)$ sera simplement notée B_R.

Proposition 3.0.5. *il existe des nombres $R_0 > 0$ et $a > 0$ tels que pour tout $R \in]0, R]$, l'application $T : u \longrightarrow f(t, u^{(\alpha)}(t))$*
soit une contraction stricte dans la boule fermée $B'(0; a) = \{u \in B_R; ||u|| \leqslant 0\}$ de l'algèbre de Banach B_R.

Preuve :

$$f(t, y) = f(t, 0) + A_\alpha y + F_\alpha(t, y)y \tag{3.7}$$

$$f(t,y) = f(t,0) + yf'_y(t,0) + \sum_{k\geqslant 2} \frac{y^k}{k!} f_y^{(k)}(t,0)$$

$$= f(t,0) + y[f'_y(0,0) + \sum_{i\geqslant 1} \frac{x}{i!} f_{ty}^{(i)}(0,0)] + \sum_{k\geqslant 2} \frac{y^k}{k!} f_y^{(k)}(t,0)$$

$$= f(t,0) + yf'_y(0,0) + \left[y \sum_{i\geqslant 1} \frac{x^i}{i!} f_{ty}^{(i)}(0,0) + \sum_{k\geqslant 2} \frac{y^k}{k!} f_y^{(k)}(t,0) \right]$$

$$f(t,y) - f(t,z) = A_\alpha(y-z) G_\alpha(t,y,z)(y-z); \tag{3.8}$$

les fonction$f(t,0), F_\alpha(t,y)$ *et* $G_\alpha(t,y,z)$ *sont analytique au voisinages positif de 0 on a*

$$f(0,0) = F_\alpha(0,0) = G_\alpha(0,0,0) = 0. \tag{3.9}$$

Étant donnée un nombre $\eta > 1$ *, il existe* $R_1 > 0$ *et* $R'_1 > 0$ *tels que ces fonctions soient analytique et bornée dans le disque*

$$\Delta(R_1, R'_1) = \{(t,y,z) \in \mathbb{C}, 0 < \xi t < \eta R, |y| < R'_1; |z| < R'_1\}.$$

pour tout $0 < R \leqslant R_1, 0 < R' \leqslant R'_1$.
posons

$$\begin{cases} \varepsilon(R) = \sup\limits_{\Delta(R)} |f(t,0)|, \quad \Delta(R) = \{t \in \mathbb{C}[0,R[, 0 < \xi t < \eta R\}, \\ \qquad\qquad \varepsilon(R,R') = \sup\limits_{\beta} \sup\limits_{\Delta(R,R')} (|F_\alpha|, |G_\alpha|) \end{cases}$$

vu(3.9) *, on remarque ces fonctions* $\varepsilon(R)$ *et* $\varepsilon(R,R')$ *tendent vers zéro, plus généralement, toute fonction de* R*, ou de* (R,R')*, ayant cette propriété sera notée* $\varepsilon(R)$*, ou* $\varepsilon(R,R')$*.*

D'après les inégalités de Cauchy et le lemme (3.0.1), on a donc

$$\begin{cases} f(t,0) \ll \varepsilon(R)\varphi_R(\xi t), \\ F_\alpha(t,y) \ll \varepsilon(R,R')\varphi_R(\xi t) \prod\limits_{\gamma\in\alpha} \dfrac{R'}{R' - y_\gamma}, \\ G_\alpha(t,y,z) \ll \varepsilon(R,R')\varphi_R(\xi t) \prod\limits_{\gamma\in\alpha} \dfrac{R'}{R' - y_\gamma} \dfrac{R'}{R' - z_\gamma}. \end{cases} \tag{3.10}$$

1. Cherchons d'abord des conditions (suffisantes) sur $a > 0$ et $R \in]0, R_1]$ pour que $T(B'(0,a)) \subset B'(0,a)$.
Dans les majorations qui suivent, seule sera explicitée la dépendance par rapport à R, R', a et ξ, tout constante indépendante de ces paramètres sera notée c.
Soit $u \in \beta'(0,a)$, d'après le lemme 2.5, on a pour tout $\alpha < 0$:

$$y_\alpha = D^\alpha u \ll a\varepsilon(R)\varphi_R(\xi t) \tag{3.11}$$

la proposition (3.0.3) montre que

$$\frac{R'}{R'-y} \leqq c\varphi_R(\xi t) \quad (c = K+1).$$

D'après (3.8), (3.11) et (3.7), on a donc

$$Tu \ll [\varepsilon(R) + a\rho(\xi) + \varepsilon(R, R'))]\varphi_R(\xi t),$$

et ceci prouve que $T(B'(0,a)) \subset B'(0,a)$ si

$$\varepsilon(R) + a(\rho(\xi) + \varepsilon(R+R')) \leqq a. \tag{3.12}$$

2. Écrivons ensuite les conditions pour que T soit une contraction stricte. Soient $u,\ u' \in \beta'(0,a)$, les conditions (3.14) étant supposées réalisées, on a

$$\frac{R'}{R'-y_\gamma} \ll c\varphi_R(\xi.t) \quad et \quad \frac{R'}{R'-z_\gamma} \ll c\varphi_R(\xi.t) \quad avec \quad y_\gamma = D^\gamma u, z_\gamma = D^\gamma u', \gamma \leq \alpha.$$

et

$$y_\gamma - z_\gamma = D^\alpha(u-u') \ll ||u-u'\|\varepsilon(R)\varphi_R(\xi t) \quad si \quad \alpha < 0$$

D'après (3.9), (3.11) et (3.7), on a donc

$$Tu - Tu' \ll \|u-u'\|[\rho(\xi) + \varepsilon(R, R')]\varphi_R(\xi t).$$

pour $\rho(\xi) < \rho < 1$, pour que T soit une contraction stricte, il suffit que

$$\rho(\xi) + \varepsilon(R, R') \leqq \rho.$$

En résumé, il suffit de satisfaire aux inégalités

$$\begin{cases} \varepsilon(R) + a\rho(\xi) + \varepsilon(R, R') \leqslant a \\ \quad et \quad \rho(\xi) + \varepsilon(R, R') \leqslant \rho \end{cases}$$

On procède comme suit. Il existe $R_2 \in]0, R_1]$ et $R' \in]0, R_2]$ tel que

$$\rho(\xi) + \varepsilon(R, R') \leqq \rho \qquad pour \quad tout R \in]0, R_2],$$

R' étant ainsi fixé, on choisit a tel que $0 < a \leqq cR'$, puis $R_0 \in]0, R_2]$ assez petit pour que

$$a\varepsilon(R) \leqq R', \qquad \varepsilon(R) \leqq (1-\rho)a \quad pour\ tout \quad R \in]0, R_0].$$

La proposition précédente prouve le théorème d'existence, elle prouve également l'unicité. En effet, si u et u' sont deux fonctions analytique à l'origine positif de 0 telles que $u = f(t, u^{(\alpha)})$, $u' = f(t, u'^{(\alpha)})$, on a $u(0) = f(0,0) = 0$ d'où (lemme 3.0.1) $u \ll \varepsilon(R)\varphi_R(\xi.t)$ et de même $u' \ll \varepsilon(R)\varphi_R(\xi t)$, pour tout $R > 0$ suffisamment petit. En particulier, on peut choisir
$R \in [0, R_2[$ tel que $\varepsilon(R) \leqslant a$ et ceci preuve que, u, u' sont deux points fixes de la contraction stricte T.

Bibliographie

[1] ABEDLOUAHAB MOHAMED SALAH, Les systèmes chaotiques à dérivées fractionnaires, Mémoir de Magistère, Université MENTOURI CANSTANTINE 2009.

[2] Belakroum Kheireddine, Existence et positivité de la solution d'un problème aux limites fractionnaire, MÉMOIRE MAGISTER, UNIVERSITÉ BADJI MOKHTAR ANNABA 2013.

[3] Boeck et Larcier s.a, Analyse (Cours et Exercice corrigés), paris Sebtembre 2005.

[4] J.Dieudonné, Calcul infinitésimal, Hermann, Paris 1968.

[5] Erdelyi A, Magnus W, Oberhettinger F and Tricomi F, higher Transcendental Functions, Vol.III, Krieger Pub, Melbourne, florida 1981.

[6] Keith B.Oldham, Jerome Spanier, The fractionnal calculs theory and applications of différentiation and integration to arbitrary order.

[7] H.Kestelman, Rieman-Stieltjes Integration ,modem theories of Integration, New York 1960.

[8] A.Kilbas, H.M.Srivastava and J.J.Trujillo, Theory and applications of fractional differential Equations, North-Holland Mathamatical studies 204, ED van Mill, Amsterdam 2006.

[9] A.Kolmogorov, S.Fomine, Eléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle.

[10] Medjekal Hamza, Existence et unicité de la solution d'une équation différentielle fractionnaire impulsive de temps dans un espace de Banach, Mémoire de doctorat, Université Badji Mokhtar Annaba 2015.

[11] I.Podlubny, Fractional Diffrential Equations, Academic press, San Diego 1999.

[12] Claude Portenier, Analyse fonctionnelle 347 Chapitre 6 algèbre de Banach et spectre, Version du 5 juillet 2004.

[13] ABEDLKADER SAADI, Existence de solutions positives pour certaines classes d'équations différentièlles d'ordre fractionnaire, Mémoire de doctorat, Université de Houari-Boumediène 2016.

[14] Samko S.G, Kilbas A.A and Marichev O.I, Fractional integrals and derivatives, Theory and applications, Gordon and Breach, New York.

[15] G.A.Sedogbo, ANALYSE DEUG SCIENCES2emeannée. http ://www. edition-belin. com, paris 3 Janvier 1994.

[16] Slimane Mehdi, Équations différentielles d'ordre fractionnaire dans des espaces de Banach, Mémoire de Magistère, Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen 2012.

[17] claude wagschal J.Math.pure et application 58,1979, P.309 à 337.

Résumé

Dans ce travail, je vais étudier l'existence et l'unicité de la solution d'un problème de Cauchy d'ordre fractionnaire, où la dérivée est prise au sens de Caputo. Cette étude est faite en utilisant les techniques de Wagschal.