

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieure et de la Recherche Scientifique
Université de Ghardaia



Faculté des Science et de Technologie
Département de Mathématique et Informatique
&
Laboratoire de Mathématiques et Sciences Appliquées



Projet de fin d'étude présenter en vue de l'obtention de diplôme de

MASTER

Domaine : Mathématiques et Informatiques
Spécialité : Analyse Fonctionnelle et Applications

THÈME

Intégration d'une p -forme différentielle sur une variété différentielle

Présenté par :

GUERBOUY Billal

Soutenu publiquement le : 04/ 07/ 2019

Devant le jury :

MERABET Brahim :	(MCB, Univ. Ghardaia)	Présidente
CHIKH SALAH Abdelouahab :	(MCB, Univ. Ghardaia)	Encadreur
KHELLAF Yasmina :	(MAA, Univ. Ghardaia)	Examinateur

Année universitaire 2018/2019

Dedicace

Je dédie ce travail

A Ma mère, qui a oeuvré pour ma réussite, de par son amour, son soutien, tous les sacrifices consentis et ses précieux conseils, pour toute son assistance et sa présence dans ma vie, reçois à travers ce travail aussi modeste soit-il, l'expression de mes sentiments et de mon éternelle gratitude. A Mon père, qui peut être fier et trouver ici le résultat de longues années de sacrifices et de privations pour m'aider à avancer dans la vie. A mes chères soeurs : Aicha, Habiba, Kouider Karim, . A mon encadreur :Mr. Abdelouahab Chikh Salah. A toute la famille Guerbouy grands et petits Enfin je le dédie à tous mes amis que je n'ai pas cités et à tous ceux qui me connaissent. Qu'ils trouvent à travers ce travail ma sincère reconnaissance.

Billal Guerbouy
Ghardaia 2019

Remerciement

Au terme de la rédaction de ce mémoire, je remercie **ALLAH** qui m'a toujours donné la patience et le courage durant ces longues années d'étude, et la force d'accomplir ce Modeste travail.

Je remercie mon encadreur Monsieur **Chikh Salah Abdelouahab** pour le sujet qu'il m'a proposé et pour le temps qui a sacrifié et pour l'attention et la disponibilité dont il a su faire preuve au long de la préparation de ce mémoire et pendant mon parcours de master .

Je voudrais également remercier Monsieur **Merabet Brahim** et Madame **Khellaf Yasmîna** pour l'honneur qu'ils m'ont fait en portant leurs attention sur ce travail.

Merci à tous ceux qui m'ont enseigné en primaire, collège, lycée, université et ailleurs, et tous les personnels de ces établissements, sans eux je suis rien. Merci à tous les mathématiciens...

Et enfin Merci mes amis, merci à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin dans ce travail.

Billal Guerbouy
Ghardaia 2019

Résumé

Dans ce mémoire, nous allons donner tous les détails pour calculer les intégrales d'une p-formes différentielles sur une variété différentielle non plate et non régulière, qui est une généralisation de l'intégrale de Riemann et de Lebesgue sur un pavé rectangulaire plat.

Abstract

In this thesis, we will give all the details to compute the integrals of a non-flat and non-regular differential manifolds, which is a generalization of the Riemann and Lebesgue integral on rectangular block a flat.

Table des matières

Introduction	v
0 Préliminaires	1
0.1 Rappels de notions de géométrie différentielle	1
0.2 Espaces tangent et cotangent	4
0.3 Champ de vecteurs	5
0.4 Variété à Bord de \mathbb{R}^n	8
1 Formes Multilinéaires	11
1.1 Groupe Symétrique S_n	11
1.2 forme k -linéaire	14
1.3 Image Réciproque	16
1.4 Produit Tensoriel	17
1.5 Produit extérieur	18
1.6 Produit Intérieure	21
2 Formes Différentielles	22
2.1 Formes Différentielles sur \mathbb{R}^n	22
2.2 Caractérisation des formes différentielles	23
2.3 Dérivée Extérieure	24
2.4 Forme Différentielle Exacte	27
2.5 Dérivée Intérieure de Forme Différentielle	28
2.6 Image Réciproque de Forme Différentielle	29
2.7 Formes Différentielles sur une variété différentielle	31
3 Intégration des n-formes différentielle sur \mathbb{R}^n	33
4 intégrale d'une n-forme différentielle	37
4.1 Lemme de Poincaré	38
4.2 Formule de Stokes	40
Conclusion	45

Introduction

L'intégral !

L'intégrale est une notion très connue en mathématique, elle est utilisée presque dans tous les domaines qui utilisent les mathématiques, pour le calcul des surfaces, les volumes, la résolution des équations différentielles, et bien d'autres.

On intègre des fonctions dans des intervalles pour le cas d'une variable, et dans le cas de plusieurs variables on intègre dans un rectangle plat. Et aussi dans des cas particuliers comme une surface plate mais avec des bords qui ne sont pas droits, on divise la surface en morceaux rectangulaires et on fait la somme des intégrales pour chaque morceau avec une petite incertitude...

Si on veut intégrer sur une surface qui n'est pas plate!, comme par exemple la surface d'une sphère, une surface sous forme de vague, ou bien sur un espace-temps dans le cas relativiste, ou bien dans le cas où le repère est non défini dans le cas quantique. Dans ce cas, on ne peut plus travailler avec les lois d'intégrations analytiques.

Dans ce mémoire on va donner des méthodes du calcul des intégrales non seulement dans le cas des intégrations sur un ensemble non régulier et non plat, mais aussi dans le cas où l'on utilise des formes différentielles au lieu des fonctions. Pour cela on va en premier donner dans les trois premiers chapitres les définitions et notions nécessaires sur les variétés, les formes différentielles dans le cas de \mathbb{R}^n et dans le cas d'une variété quelconque. Et dans les deux derniers chapitres on donne des méthodes du calcul d'intégrale des formes différentielles dans le cas de \mathbb{R}^n après dans le cas général, avec toutes les démonstrations détaillées, et suffisamment d'exemples.

Les références de ce chapitre sont [6, 15, 10, 1, 13, 3]

0.1 Rappels de notions de géométrie différentielle

Définition 0.1.1. Soient E et F deux ensembles

Une application $f : E \rightarrow F$ est injective si deux éléments distincts de E ont des images distinctes par f .

$$\forall (p_1, p_2) \in E \times E \quad (p_1 \neq p_2) \Rightarrow f(p_1) \neq f(p_2)$$

ceci est équivalent à

$$\forall (p_1, p_2) \in E \times E \quad f(p_1) = f(p_2) \Rightarrow (p_1 = p_2)$$

Définition 0.1.2. Soient E et F deux ensembles.

Une application $f : E \rightarrow F$ est surjective si tout élément de F admet au moins un antécédent par f dans E .

$$\forall q \in F \quad \exists p \in E \quad q = f(p)$$

Définition 0.1.3. f est bijective si f est injective et surjective

$$\forall q \in F \quad \exists! p \in E \quad q = f(p)$$

Définition 0.1.4. M, N sont deux espace topologique, une application continue $f : M \rightarrow N$ est un homéomorphisme si en plus elle est inversible et sa réciproque $f^{-1} : N \rightarrow M$ est aussi continue.

Définition 0.1.5. Une application f d'un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ dans un ouvert $V \subset \mathbb{R}^n$ est un difféomorphisme si

- f est bijective

- f est différentiable sur U
- sa réciproque est différentiable sur V

Remarque 0.1.1. On dit qu'une application f est un difféomorphisme de classe C^k , $k > 0$, si f est différentiable de classe C^k , et si $\exists g : V \subset \mathbb{R}^n \rightarrow U \subset \mathbb{R}^n$ différentiable de classe C^k telle que $g \circ f = Id_{\mathbb{R}^n}$ et $f \circ g = Id_{\mathbb{R}^n}$ on note $g = f^{-1}$. Dans le cas $k = 0$ on dit que f est un homéomorphisme

Définition 0.1.6. Une immersion de classe C^k d'un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une application $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, tel que pour tous $p \in U$, sa différentielle en p , Df_p est injective

Définition 0.1.7. Une submersion de classe C^k d'un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une application $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ classe C^k , tel que pour tous $p \in U$, sa différentielle en p , Df_p est surjective.

Théorème 0.1.8. (Le théorème d'inversion locale)

Soit f une application d'un ouvert U de \mathbb{R}^n dans un ouvert V de \mathbb{R}^n de classe C^k ($k \geq 1$), soit $a \in U$ tel que df_a soit inversible. alors il existe un voisinage U_a de a dans U et un voisinage $V_{f(a)}$ de $f(a)$ dans V tel que la restriction de f à U_a soit un C^k -difféomorphisme de U_a vers $V_{f(a)}$

Définition 0.1.9. (Variété topologique)

Un espace topologique séparé, séparable M est une variété topologique de dimension n si pour tout $p \in M$, il existe un voisinage ouvert U de p , il existe un ouvert V de \mathbb{R}^n , et il existe $\varphi : U \rightarrow V$ un homéomorphisme.

Le couple (U, φ) est appelé carte locale de M au point p . Pour tout $p \in U$, les coordonnées de $\varphi(p)$ dans \mathbb{R}^n sont les coordonnées de p dans la carte (U, φ) .

Définition 0.1.10. (Atlas)

Soient M une variété topologique et, $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ une famille de cartes locales de M , on dit que, \mathcal{A} est un atlas de M si $M = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$.

Définition 0.1.11. (Applications de changement de cartes)

Soit maintenant, $\mathcal{A} = (U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in I}$ un atlas de M et $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, (U_β, φ_β) deux cartes tel que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$; les applications

$$\Phi_{\alpha\beta} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) :$$

sont appelées applications de changement de cartes

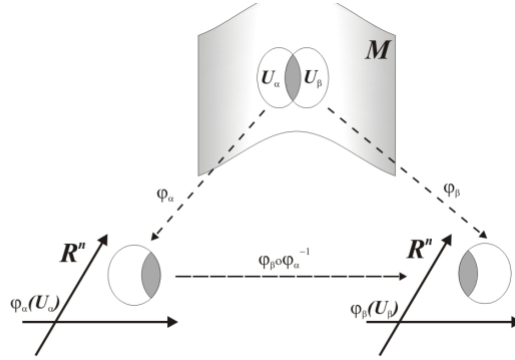


FIGURE 1 – L'homéomorphisme de de changement de cartes

Définition 0.1.12. Soient M une variété topologique et $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ un atlas de M . On dit que \mathcal{A} est de classe C^k , $1 \leq k \leq \infty$, si pour tous α et β dans I , les applications de changement de cartes $\Phi_{\alpha\beta}$ sont des difféomorphismes de classe C^k de $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ sur $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$

Définition 0.1.13. Soient M une variété topologique et $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ deux atlas de classe C^k sur M . On dit que $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ sont C^k -compatibles si $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ est encore un atlas de C^k classe sur M

Remarque 0.1.2. La relation de C^k -compatibilité est une relation d'équivalence sur l'ensemble des atlas de classe C^k de M . La réunion des atlas d'une même classe d'équivalence est appelée un C^k -atlas saturé (ou complet).
Tout atlas de classe C^k sur M est alors contenu dans un unique C^k -atlas saturé.

Définition 0.1.14. (Variété différentielle)

Une variété différentielle de classe C^k est une variété topologique munie d'un C^k -atlas saturé. A titre de remarque préliminaire, on notera que l'existence d'un atlas implique automatiquement l'existence d'un atlas maximal donc ,
Dans la pratique il suffit de prouver l'existence d'un atlas de classe C^k pour prouver qu'une variété topologique est en fait différentiable !

Exemple 0.1.1.

1. Un exemple est donné par l'espace \mathbb{R}^n lui-même. L'ensemble à un élément $\{(\mathbb{R}^n, Id)\}$ est un atlas de classe C^∞ .

Le C^∞ -atlas saturé correspondant est constitué des couples (U, φ) où U est un ouvert de \mathbb{R}^n et φ un difféomorphisme de classe C^∞ de U sur un ouvert de \mathbb{R}^n .

2. Soit I un ouvert de \mathbb{R}^n ; ($n \geq 1$) et soit j l'injection canonique de I dans \mathbb{R}^n c.a.d :

$$\begin{aligned} j : I &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto j(x) = x \end{aligned}$$

La carte (I, j) définit une structure de variété différentiable sur I , c'est une variété de dimension n .

3. La sphère unité \mathbb{S}^n définie par :

$$\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} / \|x\| = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

est une variété différentiable de dimension n .

Définition 0.1.15. (Applications différentiables entre variétés)

Soient M et N deux variétés de dimensions m et n respectivement , et $f : M \rightarrow N$ une application. On dit que f est de classe C^k sur M , $k > 1$, si pour tout point $p \in M$, toute carte (U, φ) de M au point p , et toute carte (V, ψ) de N au point $f(p)$ vérifiant $f(U) \subset V$, l'application $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \psi(V)$ est de classe C^k . f est une submersion tel que $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ est une application submersion de $\varphi(M)$ dans $\psi(N)$. puisque les applications de changement de cartes sont de classe C^1 , f est de classe C^k sur M si et seulement si pour tout point p de M , il existe une carte (U, φ) de M au point p , et il existe une carte (V, ψ) de N au point $f(p)$ vérifiant $f(U) \subset V$, telles que $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \psi(V)$ est de classe C^k .

En particulier , si $N = \mathbb{R}$, sous entendu muni de sa structure naturelle de variété de classe C^k , alors $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^k .

0.2 Espaces tangent et cotangent

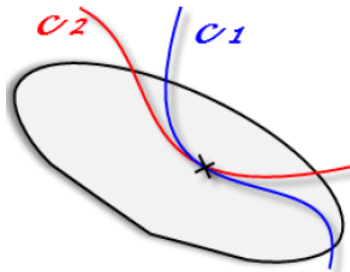
Première définition : tangente à une courbe

Considérons maintenant une variété différentiable M et un point p de M de classe C^k . On s'intéresse aux courbes dans M qui sont différentiables et qui passent par p

$$c : [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow M \\ t \mapsto c(t) \quad , \quad c(0) = p$$

Définition 0.2.1. Deux courbes c_1 et c_2 sont tangentes au point p si $c_1(0) = c_2(0) = p$ et s'il existe une carte locale (U, φ) telle que $p \in U$ et

$$\frac{d}{dt}(\varphi \circ c_1)(0) = \frac{d}{dt}(\varphi \circ c_2)(0)$$



On définit ainsi une relation d'équivalence (c.a.d- une relation qui est transitive, symétrique et réflexive) sur l'ensemble des courbes passant par p : $c_1 \sim c_2$ elles sont tangentes en p .

Définition 0.2.2. Un vecteur tangent à M en p est une classe d'équivalence de courbes tangentes en p .

L'espace tangent à M en p , noté T_pM , est l'ensemble des vecteurs tangents à M en p .

Seconde définition : dérivation

Définition 0.2.3. Soit M une variété différentiable et $p \in M$. Une application $D_p : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ est appelée une dérivation en p , si elle satisfait les règles suivantes : pour tous $f, g \in C^\infty(M)$.

- 1) $D_p(f + g) = D_p(f) + D_p(g)$.
- 2) $D_p(f \cdot g) = D_p(f) \cdot g(p) + f(p) \cdot D_p(g)$.
- 3) f est constante $\Rightarrow D_p(f) = 0$

L'ensemble de toutes les dérivations en p , s'appelle l'espace tangent de M en p , il est noté T_pM . Par définition un vecteur tangent à M en p est un élément de T_pM

Définition 0.2.4. (fibré tangent)

Soit M une variété de dimension n . par définition, le fibré tangent de M , noté TM , est la réunion des espaces tangents T_pM , $p \in M$. On écrit :

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_pM$$

0.3 Champ de vecteurs

Soit M une variété différentiable. Un champ de vecteurs de classe C^k sur M est une application

$$\begin{aligned} X : M &\rightarrow TM \\ p &\mapsto (p, X_p) \end{aligned}$$

de classe C^k qui associe à tout point p de M un vecteur tangent X_p à M au point p . Où

$$X_p = \sum_{k=1}^n f_k(p) \frac{\partial}{\partial x_k}$$

Où $p = (x_1, \dots, x_n)$: et $\{\frac{\partial}{\partial x_k}\}_{k=1 \dots n}$ la base de T_pM et les fonctions $f_k \in C^k(M)$ et $f_k : M \rightarrow \mathbb{R}$

$\chi(M)$ désigne l'ensemble des champs de vecteurs de classe C^∞ sur M

Définition 0.3.1. On appelle projection canonique sur TM la projection

$$\begin{aligned} \Pi : TM &\rightarrow M \\ (p, X_p) &\mapsto p \end{aligned}$$

telque $X \circ \Pi = Id_M$

Remarque 0.3.1. - On a que X est de classe C^k sur une carte locale (U, φ) si et seulement si les fonctions f_k de X dans (U, φ) sont de classe C^k sur U .

Définition 0.3.2. (Crochet de Lie)

Soient M une variété de dimension n , et X, Y deux champs de vecteurs sur M de classe C^k .

Le crochet des champs X et Y , noté $[X, Y]$, est le champ de vecteurs de classe C^{k-1} sur M dont l'expression dans une carte locale (U, φ) de M est donnée par : $\forall p \in U$

$$[X, Y](p) = \sum_{i=1}^n \left\{ \sum_{j=1}^n \left(X_j(p) \left(\frac{\partial Y_i}{\partial x_j} \right)_p - Y_j(p) \left(\frac{\partial X_i}{\partial x_j} \right)_p \right) \right\} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p$$

avec $X_p = \sum_{j=1}^n X_j(p) \frac{\partial}{\partial x_j}$, $Y_p = \sum_{j=1}^n Y_j(p) \frac{\partial}{\partial x_j}$ et les X_i, Y_i sont les fonctions coordonnées de X et Y dans la carte (U, φ) , et les x_i sont les coordonnées associées à la carte (U, φ) .

Remarque 0.3.2. Remarquons que pour toute fonction f de classe C^2 sur M ,

$$[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$$

où $X(f)$ (resp. $Y(f)$) est la fonction de M dans \mathbb{R}

Propriété 0.3.1. (crochet de Lie)

Pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $f, h \in C^\infty(M)$, $X, Y, Z \in \chi(M)$ on a

- 1). $[\alpha X + \beta Y, Z] = \alpha[X, Z] + \beta[Y, Z]$
- 2). $[X, Y] = -[Y, X]$, (antisymétrique)
- 3). $[fX, hY] = f.h.[X, Y] + f.(Xh).Y - h.(Yf).X$
- 4). $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$, c'est l'identité de Jacobi.

Définition 0.3.3. L'espace cotangent

Soient M une variété de dimension n , dans un point p de M , et (U, φ) une carte de M au point p de coordonnées associées (x_1, \dots, x_n) . On note T_p^*M l'espace dual de T_pM , et pour tout $i = 1, \dots, n$ on note $dx^i|_p$ la 1-forme différentielle en p de T_p^*M qui est définie par : $\forall j = 1, \dots, n$

$$dx^i|_p \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right)_p = \delta_{ij}$$

où $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$, et 0 sinon. La famille $\{dx^i|_p\}_{i=1, \dots, n}$ est alors une base de T_p^*M .

Remarque 0.3.3. Dans tous ce qui suit on omet la lettre p et on note tous simplement la famille $\{dx^i|_p\}_{i=1\dots n}$ par $\{dx_i\}_{i=1\dots n}$

Définition 0.3.4. On définit le fibré cotangent de M , que l'on note T^*M , comme étant la réunion (disjointe) des T_p^*M $p \in M$ qui définit par :

$$T^*M = \bigcup_{p \in M} T_p^*M$$

Définition 0.3.5. On appelle tenseur T du type (r, q) (ou (r, q) -tenseur) au dessus de p , un élément de l'espace vectoriel $T_p^{(r,q)}M$, avec

$$T_p^{(r,q)}M = \underbrace{T_pM \otimes \dots \otimes T_pM}_{(r \text{ fois})} \otimes \underbrace{T_p^*M \otimes \dots \otimes T_p^*M}_{(q \text{ fois})}$$

Théorème 0.3.6. Soit M une variété différentiable de dimension n . Son fibré cotangent T^*M possède une structure naturelle de variété de dimension $2n$

Définition 0.3.7. Une 1-forme (ou covecteur) en $p \in M$ est une forme linéaire sur T_pM , c.a.d une application linéaire

$$\begin{aligned} \omega_p &: T_pM \rightarrow \mathbb{R} \\ X_p &\mapsto \omega_p(X_p) \end{aligned}$$

On note $\omega_p(X_p) = \langle \omega_p, X_p \rangle$ le crochet étant ici le crochet de dualité.

- L'espace cotangent à M en p , noté T_p^*M , est l'espace vectoriel des 1-formes en p .
- C'est l'espace vectoriel dual de T_pM (c.a.d $T_p^*M = (T_pM)^*$)

Exemple 0.3.1.

- Le fibré tangent à \mathbb{R}^n admet une trivialisatoin globale $T\mathbb{R}^n \approx \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ via l'identification canonique $T_p\mathbb{R}^n \approx \mathbb{R}^n$
- Le fibré tangent au cercle S^1 admet une trivialisatoin globale car il est difféomorphe au cylindre : $TS^1 \simeq S^1 \times \mathbb{R}$. En revanche le fibré tangent TS^2 n'admet pas de trivialisatoin global

Remarque 0.3.4. En utilisant les différentielles des cartes, nous allons étendre le calcul en coordonnées locales à l'espace tangent. On commence par traiter le cas de \mathbb{R}^n .

Description de $T_p\mathbb{R}^n$ On a vu plusieurs propriétés de $T_p\mathbb{R}^n$: il est canoniquement isomorphe à \mathbb{R}^n et il peut être identifié à l'ensemble des dérivées partielles en x . Il est temps maintenant d'en donner une description facile à utiliser. Soit $p \in \mathbb{R}^n$. Considérons les dérivées partielles en p , c'est-à-dire les dérivations sur \mathbb{R}^n

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p : g \mapsto \frac{\partial g}{\partial x_i}(p) \quad , i = 1, \dots, n.$$

Ces dérivées partielles forment une base de l'ensemble $T_p \mathbb{R}^n$ des dérivées directionnelles en p et donc une base est dite base naturelle. Ainsi tout vecteur tangent $v_p \in T_p \mathbb{R}^n$ s'écrit :

$$v_p = v^1 \frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_p + \dots + v^n \frac{\partial}{\partial x_n} \Big|_p$$

0.4 Variété à Bord de \mathbb{R}^n

Définition 0.4.1. Le demi-espace ou le demi-plan H^n est sous-espace de \mathbb{R}^n défini par

$$H^n = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, x_n \geq 0. \right\}$$

On définit une topologie sur H^n par la topologie induite par celle de \mathbb{R}^n

$V \subset H^n$ est ouvert ssi $\exists V' \subset \mathbb{R}^n$ ouvert tel que

$$V = H^n \cap V'$$

Définition 0.4.2.

i) Le bord du demi-plan H^n noté par ∂H^n est défini par

$$\partial H^n = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, x_n = 0. \right\}$$

ii) H^n est un sous ensemble fermé c.a.d $H^n = \overline{H^n}$

iii) L'intérieur de H^n qui noté $\text{int}(H^n)$ est défini par

$$\text{int}(H^n) = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, x_n > 0. \right\}$$

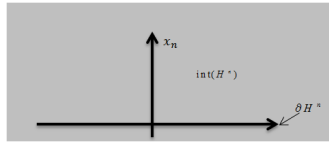


FIGURE 2 – Demi-espace H^n

Définition 0.4.3. On définit une variété à bord M de dimension n , de la même manière qu'une variété abstraite de dimension n , sauf que son atlas \mathcal{A} est défini par $(V, \varphi) \in \mathcal{A}$ est une carte de M elle satisfait une des deux conditions

1) (V, φ) est dite cartes régulier si $V \in M$

$$\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ est homeomorphisme et } \varphi(V) \text{ ouvert de } \mathbb{R}^n$$

2) (V, φ) est dite cartes à bord si $V \in M$

$$\varphi : V \rightarrow H^n \text{ est homeomorphisme et } \varphi(V) \text{ ouvert de } H^n \text{ et } \exists p \in V \text{ tq } \varphi(p) = 0$$

Définition 0.4.4. M une variété à bord de dimension n , on dit que $p \in M$ est un point régulier s'il existe une carte (V, φ) si

$$\begin{aligned} \varphi : V &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ p &\mapsto \varphi(p) \subset \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

$p \in M$ est une point de bord tel que (V, φ) une carte de M si

$$\begin{aligned} \varphi : V &\rightarrow H^n \\ p &\mapsto \varphi(p) \subset H^n \quad x_n(p) = 0 \end{aligned}$$

tq $\varphi := (x_1, \dots, x_n)$

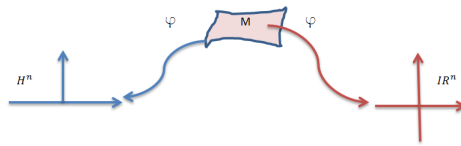


FIGURE 3 – Homéomorphisme φ d'un variété à bord

L'ensemble de tous les points de bord de M est noté ∂M et l'ensemble de tous les points réguliers de M sont notés $int(M)$

Exemple 0.4.1.

(1) Si M est une variété abstraite de dimension n , alors M est une variété à bord de dimension n avec $int(M) = M$ et $\partial M = \emptyset$

(2) $M = [0, 1]$ est une variété à bord de dimension 1 tel que $int(M) =]0, 1[$ et $\partial M = \{0, 1\}$

(3) La boule fermée $D_n := \{x \in \mathbb{R}^n \text{ tq } \|x\| \leq 1\}$ est une variété à bord de dimension n avec $int(D_n) = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ tq } \|x\| < 1\}$ et $\partial D_n = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ tq } \|x\| = 1\} = S^{n-1}$

Définition 0.4.5. M est une variété à bord de dimension n on définit $T_p M$ dans la carte (V, φ) de M par

a) Si $p \in \text{int}(M)$ alors $T_p M = \left\{ \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial x_i} \mid v^i \in \mathbb{R} \right\}$

b) Si $p \in \partial M$ alors $T_p M = \left\{ \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial x_i} \mid v^n < 0 \right\}$

Propriété 0.4.1. Soit M est une variété à bord de dimension n alors on a

1. ∂M est une variété abstraite de dimension $(n - 1)$

2. $\text{int}(M)$ est une variété de dimension n

3. $\partial \partial M = \emptyset$

4. Si $p \in \text{int}(M)$ alors $T_p M = T_p(\text{int}(M))$.

5. Si $p \in \partial M$ alors $T_p(\partial M) = \left\{ \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial x_i} \mid v^n = 0 \right\}$

6. Si M est une variété à bord compacte de dimension n alors ∂M est aussi compacte

Formes Multilinéaires

Dans tout le chapitre, \mathbb{K} représente un corps commutatif et E, F sont \mathbb{K} -espace vectoriel, les références [11, 5, 9, 8]

1.1 Groupe Symétrique S_n

Définition 1.1.1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note par S_n l'ensemble des bijections de l'ensemble $A_n = \{1, \dots, n\}$ dans lui même. S_n est un ensemble fini de cardinal $\text{card}(S_n) = n!$. Les éléments de S_n sont appelés permutations. Un élément $\sigma \in S_n$ est représenté par la matrice

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

S_n muni de la loi de composition des applications "o" est un groupe non commutatif. Si $\sigma, \mu \in S_n$ on note $\sigma\mu := \sigma \circ \mu$

Définition 1.1.2. (support d'une permutations)

Soit $\sigma \in S_n$, on appelle support de σ l'ensemble, noté $\text{supp}(\sigma)$, des éléments de A_n qui ne sont pas fixés par σ , c.a.d

$$\text{supp}(\sigma) = \{i \in A_n, \sigma(i) \neq i\}$$

Deux permutations de A_n sont pas égaux si leurs supports sont disjoints.

Définition 1.1.3. (p-cycle)

Un cycle de longueur p est une permutation $\sigma \in S_n$ définie par un sous ensemble $\{i_1, \dots, i_p\} \subseteq A_n$ tel que

$$\begin{cases} \sigma(i_1) = i_2, \dots, \sigma(i_{p-1}) = i_p, & \sigma(i_p) = \sigma(i_1) \\ \sigma(j) = j, & \forall j \notin \{i_1, \dots, i_p\} \end{cases}$$

Le cycle σ est représenté par la matrice ligne (i_1, \dots, i_p) . Deux cycles (i_1, \dots, i_p) et (j_1, \dots, j_q) sont dit disjoint si $\{i_1, \dots, i_p\} \cap \{j_1, \dots, j_q\} = \emptyset$

Définition 1.1.4. (Transposition)

Une transposition est un cycle τ de longueur 2 définie par (i, j) i.e.

$$\tau(i) = j, \tau(j) = i, \quad \text{et} \quad \tau(k) = k, \forall k \notin \{i, j\}$$

Remarque 1.1.1. Si σ est un cycle de longueur p et τ une transposition, alors

1. $\sigma^p = \underbrace{\sigma \circ \dots \circ \sigma}_{(p\text{-fois})} = Id .$
2. $\sigma^{-1} = \sigma^{p-1}$
3. $\tau^{-1} = \tau.$

Lemme 1.1.1. Tout cycle $\sigma = (i_1, \dots, i_p)$ se décompose en transpositions

Démonstration. Il suffit d'écrire σ sous la forme

$$\sigma = (i_1, i_2)(i_2, i_3) \dots (i_{p-1}, i_p)$$

□

Définition 1.1.5. (Signature d'une permutation)

. La signature d'une permutation $\sigma \in S_n$ est définie par la formule

$$sign(\sigma) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j}$$

On note $\varepsilon(\sigma) = sign(\sigma)$

Remarque 1.1.2.

- 1) $sign(\sigma) = \pm 1.$

Théorème 1.1.6. La signature d'un p -cycle de $\{1, \dots, n\}$ est $(-1)^{p-1}$

Démonstration. D'après la définition d'un p -cycle :

$$(i_1, \dots, i_p) = (i_1, i_2)(i_2, i_3) \dots (i_{p-1}, i_p)$$

Un p -cycle fait intervenir $(p-1)$ transpositions d'où une signature de $(-1)^{p-1}$ □

Lemme 1.1.2. Soient σ et μ deux permutations, alors

$$sign(\sigma\mu) = sign(\sigma \circ \mu) = sign(\sigma)sign(\mu)$$

Démonstration. On a

$$\frac{\sigma(\mu(i)) - \sigma(\mu(j))}{\mu(i) - \mu(j)} = \frac{\sigma(\mu(j)) - \sigma(\mu(i))}{\mu(j) - \mu(i)}, \quad \forall i \neq j$$

d'où

$$\begin{aligned} \text{sign}(\sigma\mu) &= \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(\mu(i)) - \sigma(\mu(j))}{i - j} \\ &= \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(\mu(i)) - \sigma(\mu(i))}{\mu(j) - \mu(i)} \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\mu(i) - \mu(j)}{i - j} \\ &= \prod_{1 \leq \mu(i) < \mu(j) \leq n} \frac{\sigma(\mu(i)) - \sigma(\mu(i))}{\mu(j) - \mu(i)} \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\mu(i) - \mu(j)}{i - j} \\ &= \text{sign}(\sigma)\text{sign}(\mu) \end{aligned}$$

□

Remarque 1.1.3.

1. Si τ est une transposition alors $\text{sign}(\tau) = -1$.
2. Si σ est une permutation alors $\text{sign}(\sigma) = (-1)^k$, où k est le nombre de transpositions décomposant σ , (i.e. $\sigma = \tau_1 \dots \tau_k$).
3. $\varepsilon(\text{Id}) = 1$.
4. $\varepsilon(\sigma^{-1}) = \varepsilon(\sigma)$.

Exemple 1.1.1. Soit $\sigma \in S_7$ défini par

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 3 & 5 & 1 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

$\text{supp}(\sigma) = \{1, 2, 4, 5, 6, 7\}$
pour calculer $\varepsilon(\sigma)$ On a la décomposition en produit de transpositions :

$$\sigma = (1, 2, 4, 5)(6, 7) = (1, 2)(2, 4)(4, 5)(6, 7)$$

donc $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{4-1}(-1)^{2-1} = (-1)^4 = 1$
calculer σ^{-1}

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 1 & 3 & 2 & 4 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

1.2 forme k -linéaire

Définition 1.2.1. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n .
 ω une application $\omega : E \rightarrow F$ est dit linéaire si

$$\forall x, y \in E \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} \quad \omega(\lambda x + \mu y) = \lambda \omega(x) + \mu \omega(y)$$

On noté l'ensemble des applications linéaires de E ver $F : \mathcal{L}(E, F)$

Remarque 1.2.1. Si $F = \mathbb{K}$ on dit que ω est une forme linéaire noté par

$$E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$$

Définition 1.2.2. (Formes k -linéaires)

Soient E un espace vectoriel sur \mathbb{K} et $k \geq 1$ un entier naturel. On appelle forme multilinéaire dordre k ou simplement forme k -linéaire sur E une application

$$\begin{aligned} \omega : \overbrace{E \times \dots \times E}^{k \text{ fois}} = E^k &\rightarrow \mathbb{K} \\ (x_1, x_2, \dots, x_k) &\mapsto \omega(x_1, x_2, \dots, x_k) \\ \forall (x_1, x_2, \dots, x_k) \in E^k \quad \lambda, \mu \in \mathbb{K} \\ \omega(x_1, \dots, x_{i-1}, \lambda x + \mu y, x_{i+1}, \dots, x_k) &= \end{aligned}$$

$$\lambda \omega(x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_k) + \mu \omega(x_1, \dots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \dots, x_k)$$

c.a.d ω linéaire par rapport a chaque variables

Exemple 1.2.1.

1) Le produit scalaire de deux vecteur de \mathbb{R}^3

$$\omega : (x, y) \rightarrow (x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3)$$

2) $\omega(x, y, z) = f(x)f(y)f(z)$ telque $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$

Proposition 1.2.1. Les formes k -linéaires sur E constituent un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{F}(E^k, \mathbb{K})$ des applications de E^k dans \mathbb{K} . On notera $\mathcal{L}_k(E, \mathbb{K})$ ou $\mathcal{L}_k(E)$ le \mathbb{K} -espace vectoriel des formes k -linéaires sur E

Définition 1.2.3. (Forme k -linéaire symétrique)

Soit $\omega \in \mathcal{L}_k(E, \mathbb{K})$ est dite symétrique si $\omega(x_1, \dots, x_k)$ est invariant par échange de deux vecteurs c.a.d

$$\forall (x_1, x_2, \dots, x_i, x_j, \dots, x_n) \in E^k : \quad \omega(x_1, \dots, x_i, x_j, \dots, x_k) = \omega(x_1, \dots, x_j, x_i, \dots, x_k)$$

On note l'ensemble des formes k -linéaires symétrique par $S_k(E, \mathbb{K})$

Définition 1.2.4. (Forme antisymétrique)

$\omega \in \mathcal{L}_k(E)$ est antisymétrique si $\omega(x_1, \dots, x_k)$ est changé en son opposé par échange de deux vecteurs

$$\forall (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_k) \in E^k : \omega(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_k) = -\omega(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_k)$$

Proposition 1.2.2. (Forme alternée)

On dit que ω est une forme k -linéaire alternée si ω est nulle sur toute famille de vecteurs dont au moins deux sont égaux

$$\exists i \neq j \in \{1, \dots, n\} \quad ; x_i = x_j \implies \omega(x_1, \dots, x_i, x_j, \dots, x_k) = 0$$

Définition 1.2.5. Une forme k -linéaire $\omega \in \mathcal{L}_k(E)$ est dite alternées si pour tout $x_1, \dots, x_k \in E$ et toute permutation $\sigma \in S_k$

$$\omega(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(k)}) = \varepsilon(\sigma)\omega(x_1, \dots, x_k)$$

L'ensemble des formes k -linéaire alternées est un sous espace vectoriel de $\mathcal{L}_k(E, \mathbb{K})$ noté $\mathcal{A}_k(E, \mathbb{K})$

Proposition 1.2.3. Soit $\omega \in \mathcal{A}_k(E, \mathbb{K})$:

S'il un vecteurs x_i liés tel que $x_i \in x_1, \dots, x_k$, avec $1 \leq i \leq k$ alors

$$\omega(x_1, \dots, x_k) = 0.$$

Démonstration. En effet, l'un des vecteurs, disons x_1 , est combinaison linéaire des autres. Dans $\omega(x_1, \dots, x_k)$, on remplace x_1 par cette combinaison linéaire, on développe par k -linéarité, et on tient compte du fait que ω est alternée. \square

Proposition 1.2.4. Si $\omega \in \mathcal{L}_k(E)$ est une forme k -linéaire, alors l'application φ définie par

$$\varphi(x_1, \dots, x_k) = \sum_{\sigma \in S_k} \varepsilon(\sigma)\omega(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(k)})$$

est une forme k -linéaire alternées.

Démonstration. Soit $\mu \in S_k$. D'après le Lemme 1.1.2 on a

$$\begin{aligned}
\varphi(x_{\mu(1)}, \dots, x_{\mu(k)}) &= \sum_{\sigma \in S_k} \varepsilon(\sigma) \omega(x_{\sigma(\mu(1))}, \dots, x_{\sigma(\mu(k))}) \\
&= (\varepsilon(\mu))^2 \sum_{\sigma \in S_k} \varepsilon(\sigma) \omega(x_{\sigma(\mu(1))}, \dots, x_{\sigma(\mu(k))}) \\
&= \varepsilon(\mu) \sum_{\sigma \in S_k} \varepsilon(\sigma) \varepsilon(\mu) \omega(x_{\sigma(\mu(1))}, \dots, x_{\sigma(\mu(k))}) \\
&= \varepsilon(\mu) \sum_{\sigma \in S_k} \varepsilon(\sigma \mu) \omega(x_{\sigma(\mu(1))}, \dots, x_{\sigma(\mu(k))}) \\
&= \varepsilon(\mu) \sum_{\sigma \mu \in S_k} \varepsilon(\sigma \mu) \omega(x_{\sigma(\mu(1))}, \dots, x_{\sigma(\mu(k))}) \\
&= \varepsilon(\mu) \varphi(x_{\mu(1)}, \dots, x_{\mu(k)})
\end{aligned}$$

□

1.3 Image Réciproque

Définition 1.3.1. Soient E et F deux espace vectoriels sur \mathbb{R} . Soient $u : E \rightarrow F$ est une application Lisse $:C^\infty$ et ω une forme k -linéaire sur F .

On définit l'image réciproque de ω noté $u^*(\omega)$ par :

$$\begin{aligned}
u^*(\omega) : E^k &\rightarrow \mathbb{R} \\
(x_1, \dots, x_k) &\mapsto u^*(\omega)(x_1, \dots, x_k) = \omega(u(x_1), \dots, u(x_k))
\end{aligned}$$

Remarque 1.3.1.

1)

$$\begin{aligned}
u^* : \mathcal{L}_k(F) &\rightarrow \mathcal{L}_k(E) \\
\omega &\mapsto u^*(\omega)
\end{aligned}$$

est une application linéaire. i.e :

$$u^*(\alpha\omega + \beta\omega') = \alpha u^*(\omega) + \beta u^*(\omega')$$

où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $\omega, \omega' \in \mathcal{L}_k(F)$.

2) Soient E, F, G des espaces vectoriels sur \mathbb{R} . Si $u : E \rightarrow F$ et $v : F \rightarrow G$ sont deux applications lisses, alors

$$(v \circ u)^* = u^* \circ v^*$$

$$\begin{aligned}
(v \circ u)^* : \mathcal{L}_k(G) &\rightarrow \mathcal{L}_k(E) \\
\omega &\mapsto u^*(v^*(\omega))
\end{aligned}$$

Définition 1.3.2. (Antisymétrisation)

Soit ω une k -forme linéaire. L'application $A(\omega)$ définie par

$$A(\omega)(x_1, \dots, x_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \varepsilon(\sigma) \omega(x_{\sigma(\mu(1))}, \dots, x_{\sigma(\mu(k))})$$

L'application

$$\begin{aligned} A : \mathcal{L}_k(E) &\rightarrow \mathcal{A}_k(E) \\ \omega &\mapsto A(\omega) \end{aligned}$$

est dite antisymétrisation de ω

1.4 Produit Tensoriel

Définition 1.4.1. . Soient E un espace vectoriel sur \mathbb{R} , ω une forme k -linéaire sur E et ω' une forme p -linéaire sur E . On définit le produit tensoriel $\omega \otimes \omega'$ par :

$$\begin{aligned} \omega \otimes \omega' : E^k \times E^p &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+p}) &\mapsto \omega(x_1, \dots, x_k) \omega'(x_{k+1}, \dots, x_{k+p}) \end{aligned}$$

Propriété 1.4.1.

1) Si $\omega \in \mathcal{L}_k(E), \omega' \in \mathcal{L}_p(E)$ Alors $\omega \otimes \omega' \in \mathcal{L}_{k+p}(E)$

2) Le produit tensoriel n'est pas commutatif $\omega \otimes \omega' \neq \omega' \otimes \omega$

3) En général si $\omega_1 \in \mathcal{L}_{k_1}(E), \dots, \omega_m \in \mathcal{L}_{k_m}(E)$, on définit alors le produit tensoriel

$\omega_1 \otimes \dots \otimes \omega_m$ par

$$\omega_1 \otimes \dots \otimes \omega_m(x_1^1, \dots, x_{k_1}^1, \dots, x_1^m, \dots, x_{k_m}^m) = \omega_1(x_1^1, \dots, x_{k_1}^1) \dots \omega_m(x_1^m, \dots, x_{k_m}^m) \text{ avec } x_i^j \in E$$

Définition 1.4.2. (Espace dual)

Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{R} . L'ensemble des 1-linéaire est appelé espace dual de E , on le note E^* ou E'

$$E^* = \mathcal{L}_1(E) = \mathcal{L}(E; \mathbb{R})$$

Propriété 1.4.2. Si E est de dimension n alors E^* est un espace vectoriel de dimension n

Définition 1.4.3. (Base dual)

. Soit E un espace vectoriel de dimension finie n . Si (e_1, \dots, e_n) est une base de E , on définit sur E^* une base (e_1^*, \dots, e_n^*) dite base dual par la formule :

$$e_i^*(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (1.1)$$

Proposition 1.4.1. Soit E un espace vectoriel de dimension finie n . Si (e_1, \dots, e_n) est une base de E alors $\{e_i^* \otimes e_j^*\}_{1 \leq i, j \leq n}$ est une base de l'espace vectoriel des formes bilinéaires $\mathcal{L}_2(E)$

. De la Proposition , on déduit que $\dim(\mathcal{L}_2(E)) = (\dim E)^2 = n^2$

Démonstration.

1) Si

$$\sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij} e_i^* \otimes e_j^* = 0$$

alors pour deux éléments e_s et e_t de la base, on a :

$$0 = \sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij} e_i^* \otimes e_j^*(e_s, e_t) = \alpha_{st}$$

2) Si $\omega \in \mathcal{L}_2(E)$

$$\omega = \sum_{i,j=1}^n \omega_{ij} e_i^* \otimes e_j^* = \sum_{i,j=1}^n \omega(e_i, e_j) e_i^* \otimes e_j^*$$

De même, on a □

Proposition 1.4.2. Soit E un espace vectoriel de dimension finie n . Si (e_1, \dots, e_n) est une base de E alors

$$\{e_{i_1}^* \otimes \dots \otimes e_{i_k}^*\}_{1 \leq i_1, i_2, \dots, i_k \leq n}$$

est une base de l'espace vectoriel des formes k -linéaires

De la Proposition 1.3.2, on déduit :

1) $\dim(\mathcal{L}_k(E)) = (\dim E)^k = n^k$

2) Si $\omega \in \mathcal{L}_k(E)$ alors

$$\omega = \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n \omega_{i_1 \dots i_k} e_{i_1}^* \otimes \dots \otimes e_{i_k}^* = \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n \omega(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) e_{i_1}^* \otimes \dots \otimes e_{i_k}^*$$

1.5 Produit extérieur

Définition 1.5.1. Soient $\omega \in \mathcal{A}_p(E)$ et $\omega' \in \mathcal{A}_q(E)$. Le produit extérieur de ω et ω' noté $\omega \wedge \omega'$ est une forme $(p+q)$ -linéaire alternée définie par

$$\omega \wedge \omega' = \frac{(p+q)!}{p!q!} A(\omega \otimes \omega')$$

$$\omega \wedge \omega'(x_1, \dots, x_p, x_{p+1}, \dots, x_{p+q}) = \frac{1}{p!q!} \sum_{\sigma \in S_{p+q}} \varepsilon(\sigma) \omega((x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)})) \omega'((x_{\sigma(p+1)}, \dots, x_{\sigma(p+q)}))$$

Proposition 1.5.1. Soient $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{A}_p(E)$, $\omega'_1, \omega'_2 \in \mathcal{A}_q(E)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. on a

$$1. (\omega_1 + \omega_2) \wedge \omega'_1 = \omega_1 \wedge \omega'_1 + \omega_2 \wedge \omega'_1$$

$$2. (\lambda \omega_1) \wedge \omega'_1 = \omega_1 \wedge (\lambda \omega'_1) = \lambda \omega_1 \wedge \omega'_1$$

Proposition 1.5.2. Si $\omega \in \mathcal{A}_1(E)$ et $\omega' \in \mathcal{A}_1(E)$ sont deux formes linéaires, alors $\omega \wedge \omega' \in \mathcal{A}_2(E)$ et on a

$$\omega \wedge \omega' = -\omega' \wedge \omega$$

Démonstration. Preuve On a $S_2 = \{id, (1, 2)\}$ d'où

$$\begin{aligned} \omega \wedge \omega'((x_1, x_2)) &= \omega(x_1)\omega'(x_2) - \omega(x_2)\omega'(x_1) \\ &= -\omega' \wedge \omega((x_1, x_2)) \end{aligned}$$

□

Remarque 1.5.1. $\omega \wedge \omega'(x_1, x_2) = \det \begin{vmatrix} \omega(x_1) & \omega'(x_1) \\ \omega(x_2) & \omega'(x_2) \end{vmatrix}$

Proposition 1.5.3. Soient $\omega, \omega', \omega'' \in \mathcal{A}_1(E)$, alors

$$(\omega \wedge \omega') \wedge \omega'' = \omega \wedge (\omega' \wedge \omega'')$$

On note alors

$$\omega \wedge \omega' \wedge \omega'' = \omega \wedge (\omega' \wedge \omega'')$$

Démonstration. On a $S_3 = \{id, (1, 2), (1, 3), (2, 3), (1, 2, 3), (1, 3, 2)\}$ doù

$$\begin{aligned} (\omega \wedge \omega') \wedge \omega''(x_1, x_2, x_3) &= \frac{1}{2} \left[(\omega \wedge \omega')(x_1, x_2) \wedge \omega''(x_3) - (\omega \wedge \omega')(x_2, x_1) \wedge \omega''(x_3) \right. \\ &\quad - (\omega \wedge \omega')(x_3, x_2) \wedge \omega''(x_1) - (\omega \wedge \omega')(x_1, x_3) \wedge \omega''(x_2) \\ &\quad \left. + (\omega \wedge \omega')(x_2, x_3) \wedge \omega''(x_1) + (\omega \wedge \omega')(x_3, x_1) \wedge \omega''(x_2) \right] \\ &= (\omega \wedge \omega')(x_1, x_2) \wedge \omega''(x_3) + (\omega \wedge \omega')(x_2, x_3) \wedge \omega''(x_1) \\ &\quad + (\omega \wedge \omega')(x_3, x_1) \wedge \omega''(x_2) \\ &= \omega \wedge (\omega' \wedge \omega'')(x_1, x_2, x_3) \\ \omega \wedge (\omega' \wedge \omega'')(x_1, x_2, x_3) &= \det \begin{vmatrix} \omega(x_1) & \omega'(x_1) & \omega''(x_1) \\ \omega(x_2) & \omega'(x_2) & \omega''(x_2) \\ \omega(x_3) & \omega'(x_3) & \omega''(x_3) \end{vmatrix} \end{aligned}$$

□

Définition 1.5.2. Soient $\omega_1, \dots, \omega_p \in \mathcal{A}_1(E)$. On définit le produit extérieur $\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_p$ par

$$\begin{aligned} (\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_p)(x_1, \dots, x_p) &= \sum_{\sigma \in S_p} \varepsilon(\sigma) \omega_1(x_{\sigma(1)}) \wedge \dots \wedge \omega_p(x_{\sigma(p)}) \\ &= \det \begin{vmatrix} \omega_1(x_1) & \dots & \omega_1(x_p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_p(x_1) & \dots & \omega_p(x_p) \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Remarque 1.5.2. soient (e_1, \dots, e_n) une base de l'espace vectoriel E , (e_1^*, \dots, e_n^*) la base dual de E^* et $\omega_1, \dots, \omega_p \in \mathcal{A}_p(E)$. On a :

1) D'après les propriétés du déterminant, si $i, j \in \{1, \dots, n\}$ tels que $i \neq j$ et $\omega_i = \omega_j$ alors

$$\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_p = 0$$

2) Si $p > n$ alors le système $\{e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_p}^*\}$ est linéairement dépendant, d'où $e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_p}^* = 0$.
Donc $\mathcal{A}_p(E) = 0$

Proposition 1.5.4. Soient E un espace vectoriel de dimension finie et (e_1, \dots, e_n) une base de E . Si (e_1^*, \dots, e_n^*) désigne la base dual de E^* , alors

$$B = \{e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_p}^*\}_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n}$$

est une base de l'espace vectoriel $\mathcal{A}_p(E)$

Démonstration.

1) Le système B est linéairement indépendant, en effet si

$$\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} \alpha_{i_1 \dots i_p} e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_p}^* = 0$$

alors

$$\alpha_{j_1 \dots j_p} = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} \alpha_{i_1 \dots i_p} e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_p}^*(e_{j_1}, \dots, e_{j_p}) = 0$$

2) B est une partie génératrice, en effet si $\omega \in \mathcal{A}_p(E)$ alors

$$\omega(e_{j_1}, \dots, e_{j_p}) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} \alpha_{i_1 \dots i_p} e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_p}^*(e_1, \dots, e_p)$$

où $\alpha_{j_1 \dots j_p} = \omega(e_{j_1}, \dots, e_{j_p})$ □

Proposition 1.5.5. Soient $\omega_1 \dots \omega_p, \omega'_1 \dots \omega'_q \in \mathcal{L}_1(E)$ alors

$$(\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_p) \wedge (\omega'_1 \wedge \dots \wedge \omega'_q) = (-1)^{pq} (\omega'_1 \wedge \dots \wedge \omega'_q) \wedge (\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_p)$$

Démonstration. De la proposition 1.5.2, on obtient

$$\begin{aligned} (\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_p) \wedge (\omega'_1 \wedge \dots \wedge \omega'_q) &= (-1)^q (\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_{p-1}) \wedge (\omega'_1 \wedge \dots \wedge \omega'_q) \wedge \omega_p \\ &= (-1)^{2q} (\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_{p-2}) \wedge (\omega'_1 \wedge \dots \wedge \omega'_q) \wedge \omega_{p-1} \wedge \omega_p \\ &= \vdots \\ &= (-1)^{pq} (\omega'_1 \wedge \dots \wedge \omega'_q) \wedge (\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_p) \end{aligned}$$

□

Proposition 1.5.6. Si ω est une p -forme linéaire sur E , et ω' est une q -forme linéaire sur E alors $\omega \wedge \omega' \in \mathcal{A}_{p+q}(E)$ et on a :

$$\omega \wedge \omega' = (-1)^{pq} \omega' \wedge \omega$$

1.6 Produit Intérieure

Définition 1.6.1. Soit $x \in E$. Le produit intérieure i_x est une application définie par

$$\begin{aligned} i_x : \mathcal{L}_p(E) &\rightarrow \mathcal{L}_{p-1}(E) \\ \omega &\mapsto i_x(\omega) \end{aligned}$$

telle que $i_x(\omega)$ est une forme $(p-1)$ -linéaire alternée donnée par

$$\begin{aligned} i_x(\omega) : \mathcal{A}_p &\rightarrow \mathcal{A}_{p-1} \\ \omega &\mapsto i_x(\omega)(x_1, \dots, x_{p-1}) := \omega(x, x_1, \dots, x_{p-1}) \end{aligned}$$

Propriété 1.6.1. Soient $x \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\omega, \omega' \in \mathcal{A}_p(E)$ alors :

$$1 \quad i_x(\omega + \omega') = i_x(\omega) + i_x(\omega')$$

$$2 \quad i_x(\lambda\omega) = \lambda i_x(\omega)$$

Proposition 1.6.1. Si $x \in E, \omega, \omega' \in \mathcal{A}_p(E)$, alors

$$(\omega \wedge \omega')i_x = i_x(\omega) \wedge \omega' + (-1)^p \omega \wedge i_x(\omega')$$

Formes Différentielles

Les références [8, 11, 2, 14]

2.1 Formes Différentielles sur \mathbb{R}^n

Définition 2.1.1. Soit U un ouvert de \mathbb{R}^n . On appelle forme différentielle de degré p dans U (ou simplement p -forme différentielle) toute application

$$\begin{aligned} \omega : U &\rightarrow \mathcal{A}_p(\mathbb{R}^n) \\ x &\mapsto \omega_x \end{aligned}$$

Si (e_1, \dots, e_n) désigne la base canonique de \mathbb{R}^n et ω une p -forme différentielle sur $U \in \mathbb{R}^n$.

Alors d'après la proposition 1.5.4, on a

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} \omega_{i_1 \dots i_p} e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_p}^*$$

où $\omega_{i_1 \dots i_p} : U \rightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions différentiables sur U et (e_1^*, \dots, e_n^*) désigne la base duale canonique de \mathbb{R}^n .

$$\forall x \in U; \quad \omega_x := \omega(x) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} \omega_{i_1 \dots i_p}(x) e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_p}^*$$

Définition 2.1.2. Soit $\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} \omega_{i_1 \dots i_p} e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_p}^*$ une p -forme différentielle sur \mathbb{R}^n .

- 1) ω est dite continue si les fonctions $\omega_{i_1 \dots i_p} : U \rightarrow \mathbb{R}$ sont continues ($1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n$)
- 2) ω est dite différentiable de classe C^k si les fonctions $\omega_{i_1 \dots i_p} : U \rightarrow \mathbb{R}$ sont différentiables de classe C^k ($1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n$)

Propriété 2.1.1. Soient $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert, $\omega_1 = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} \omega_{i_1 \dots i_p}^1 e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_p}^*$,

$\omega_2 = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} \omega_{i_1 \dots i_p}^2 e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_p}^*$ deux p -formes différentielles de classe C^k sur U ,

$\omega = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_q \leq n} \omega_{j_1 \dots j_q} e_{j_1}^* \wedge \dots \wedge e_{j_q}^*$ une q -forme différentielle sur U , alors

1. $\omega_1 + \omega_2 = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} (\omega_{i_1 \dots i_p}^1 + \omega_{i_1 \dots i_p}^2) e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_p}^*$ est une p -forme différentielle de classe C^k sur U .

2. $\omega_1 \wedge \omega$ est une $(p+q)$ -forme différentielle de classe C^k sur U , ou

$$\omega_1 \wedge \omega = \sum_{\substack{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n \\ 1 \leq j_1 < \dots < j_q \leq n}} \omega_{i_1 \dots i_p}^1 \omega_{j_1 \dots j_q} e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_p}^* \wedge e_{j_1}^* \wedge \dots \wedge e_{j_q}^*$$

Définition 2.1.3. Soit U un ouvert de \mathbb{R}^n . Si on note par $\Omega_p^k(U)$ l'ensemble des p -formes différentielles de classe C^k sur U ,

$C^k(U)$ désigne l'anneau des fonctions réelles de classe C^k sur U .

$C^0(U)$ désigne l'anneau des fonctions réelles continues sur U

2.2 Caractérisation des formes différentielles

Soient $i \in \{1, \dots, n\}$ et P_i la i em projection définie par

$$\begin{aligned} P_i : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ x = (x_1, \dots, x_n) &\mapsto x_i \end{aligned}$$

Alors dP_i est une 1-forme différentielle de classe C^∞ noté dx_i

$$\begin{aligned} dx_i : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathcal{A}_1(\mathbb{R}^n) \\ x &\mapsto dP_i|_x = e_i^* \end{aligned}$$

Si ω est une 1-forme différentielle sur un ouvert $U \subseteq \mathbb{R}^n$ alors ω s'écrit

$$\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i dx_i$$

$$x \in U; \quad \omega(x) = \sum_{i=1}^n \omega_i(x) dx_i$$

Exemple 2.2.1.

1 Si $n = 2$ alors toute 1-forme différentielle ω sur un ouvert $U \subseteq \mathbb{R}^2$ s'écrit sous la forme

$$\omega = \omega_1 dx + \omega_2 dy$$

où ω_1, ω_2 sont des fonctions sur U

2 $\omega = ydx + xdy$ est une 1-forme différentielle sur \mathbb{R}^2

En général si ω est une p -forme différentielle alors ω s'écrit sous la forme :

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} \omega_{i_1 \dots i_p} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$$

Pour la suite, on note $dx_{i_1} \dots dx_{i_p}$ au lieu de $dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$. Ainsi la formule s'écrit

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} \omega_{i_1 \dots i_p} dx_{i_1} \dots dx_{i_p}$$

Remarque 2.2.1. Si $j \in \{i_1, \dots, i_p\}$ alors

$$dx_{i_1} \dots dx_j \dots dx_{i_p} = 0$$

Exemple 2.2.2. Si U est un ouvert de \mathbb{R}^2 , alors :

1 $\Omega_0^k(U) = \mathcal{C}^k(U)$

2 $\Omega_1^k(U) = \{f dx + g dy; \quad f, g \in \mathcal{C}^k(U)\}$

3 $\Omega_2^k(U) = \{f dx dy; \quad f \in \mathcal{C}^k(U)\}$

4 $\Omega_p^k(U) = \{0\}$ si $p \geq 3$

Définition 2.2.1. Soit U un ouvert de \mathbb{R}^n la n -forme différentielle

$$\omega = f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

où f est une fonction réelle différentiable ne s'annulant pas est dite forme volume sur U

2.3 Dérivée Extérieure

Définition 2.3.1. Soient U un ouvert de \mathbb{R}^n et ω une p -forme différentielle de classe \mathcal{C}^k sur U ($1 \leq k$). On appelle dérivée extérieure de ω la $(p+1)$ -forme différentielle

$d\omega$ définie par

$$\begin{aligned} d : \Omega_p^k(U) &\rightarrow \Omega_{p+1}^k(U) \\ \omega &\mapsto d\omega \\ d\omega &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} d\omega_{i_1 \dots i_p} dx_{i_1} \dots dx_{i_p} \end{aligned}$$

Remarque 2.3.1.

$$d\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial \omega_{i_1 \dots i_p}}{\partial x_j} dx_j dx_{i_1} \dots dx_{i_p}$$

$$d(dx_{i_1} \dots dx_{i_p}) = 0$$

Exemple 2.3.1. Soit U un ouvert de \mathbb{R}^3 on a

$$1 \quad df = \frac{df}{dx} dx + \frac{df}{dy} dy + \frac{df}{dz} dz$$

$$\begin{aligned} 2 \quad d(fdx + gdy + hdz) &= \frac{\partial g}{\partial x} dx dy + \frac{\partial h}{\partial x} dx dz + \frac{\partial f}{\partial y} dy dx + \frac{\partial h}{\partial y} dy dz + \frac{\partial f}{\partial z} dz dx + \frac{\partial g}{\partial z} dz dy \\ &= \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) dx dy + \left(\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial z}\right) dx dz + \left(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z}\right) dy dz \end{aligned}$$

$$3 \quad d(fdx dy + gdx dz + hdy dz) = \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial x}\right) dx dy dz$$

$$4 \quad \text{Si } \omega \in \Omega_p^k(U) \quad (p \geq 3), \text{ alors } d\omega = 0$$

Proposition 2.3.1. Soit U un ouvert de \mathbb{R}^n , $\omega_1 \in \Omega_p^k(U)$ et $\omega_2 \in \Omega_q^k(U)$, alors

$$d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^p \omega_1 \wedge d\omega_2 :$$

Démonstration. Il suffit de la démontrer dans le cas où

$$\omega_1 = f dx_{i_1} \dots dx_{i_p}, \quad \omega_2 = g dx_{j_1} \dots dx_{j_q}$$

on

$$\begin{aligned} d(\omega_1 \wedge \omega_2) &= d(f \wedge g) dx_{i_1} \dots dx_{i_p} dx_{j_1} \dots dx_{j_q} \\ &= (gdf + fdg) dx_{i_1} \dots dx_{i_p} dx_{j_1} \dots dx_{j_q} \\ &= gdf dx_{i_1} \dots dx_{i_p} dx_{j_1} \dots dx_{j_q} + fdg dx_{i_1} \dots dx_{i_p} dx_{j_1} \dots dx_{j_q} \\ &= (df dx_{i_1} \dots dx_{i_p}) \wedge (g dx_{j_1} \dots dx_{j_q}) + (-1)^p (f dx_{i_1} \dots dx_{i_p}) \wedge (dg dx_{j_1} \dots dx_{j_q}) \\ &= (d\omega_1) \wedge \omega_2 + (-1)^p \omega_1 \wedge (d\omega_2) \end{aligned}$$

□

Lemme 2.3.1. Soient U un ouvert de \mathbb{R}^n et $f \in C^k(U)$ ($k \geq 2$), alors

$$d(df) = 0$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} df &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \\ d(df) &= \sum_{i=1}^n d\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) dx_i \\ &= \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} dx_j dx_i \\ &= \sum_{i \neq j}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} dx_j dx_i \\ &= \sum_{i < j} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} dx_j dx_i + \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j \right] \\ &= \sum_{i < j} \left[-\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} dx_j dx_i + \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

Lemme 2.3.2. Soient U un ouvert de \mathbb{R}^n et $f \in C^k(U)$ ($k \geq 2$), alors

$$d(d(f dx_{i_1} \dots dx_{i_p})) = 0$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} d(f dx_{i_1} \dots dx_{i_p}) &= (df) dx_{i_1} \dots dx_{i_p} \\ d(d(f dx_{i_1} \dots dx_{i_p})) &= d((df) dx_{i_1} \dots dx_{i_p}) \\ &= (d(df)) dx_{i_1} \dots dx_{i_p} \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

Théorème 2.3.2. Soient U un ouvert de \mathbb{R}^n et $\omega \in \Omega_p^k(U)$ ($k \geq 2$), alors

$$d(d\omega) = 0$$

Définition 2.3.3. Soient U un ouvert de \mathbb{R}^n . Une p -forme différentielle $\omega \in \Omega_p^k(U)$ ($k \geq 2$) est dite fermée si

$$d\omega = 0$$

Proposition 2.3.2. Soient U un ouvert de \mathbb{R}^n . Une 1-forme différentielle ω est fermée si et seulement si

$$\forall i, j \quad \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i}$$

Démonstration. on a

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_{i,j} \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} dx_j dx_i \\ &= \sum_{i \neq j} \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} dx_j dx_i \\ &= \sum_{i < j} \left[\frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i} \right] dx_j dx_i \end{aligned}$$

d'où

$$d\omega = 0 \Leftrightarrow \forall i, j \quad \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i}$$

□

2.4 Forme Différentielle Exacte

Définition 2.4.1. Soient U un ouvert de \mathbb{R}^n , $\omega \in \Omega_{p+1}^{k-1}(U)$ ($k \geq 1$) et $\varpi \in \Omega_p^k(U)$ ($k \geq 2$). ϖ est dite primitive de ω si

$$d\varpi = \omega$$

La forme différentielle ω est dite alors exacte.

Proposition 2.4.1. Toute forme différentielle exacte est une forme différentielle fermée

Exemple 2.4.1.

1. Soit la 1-forme différentielle sur $\mathbb{R}^2 - \{0\}$

$$\omega = \frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2}$$

On a :

$$d\omega = \frac{-2yx}{(x^2 + y^2)^2} dydx + \frac{-2xydy}{(x^2 + y^2)^2} dxdy = 0$$

$$\omega = d\left(\ln \sqrt{x^2 + y^2}\right)$$

Donc ω est une forme 1-différentielle exacte sur $\mathbb{R}^2 - \{0\}$

2. Soit la 1-forme différentielle sur $\mathbb{R}^2 - \{0\}$

$$\omega = \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2}$$

On a :

$$d\omega = \frac{(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} dydx - \frac{(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2} dx dy = 0$$

ω est fermée, localement exacte, mais elle n'est pas exacte.

2.5 Dérivée Intérieure de Forme Différentielle

Définition 2.5.1. Soient U un ouvert de \mathbb{R}^n , $X \in \chi(U)$ et $\omega \in \Omega_1^k(U)$. On définit alors la fonction $\omega(X)$ sur U par

$$\forall p \in U : \omega(X)(p) = \omega_p(X_p)$$

où $\omega_x \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n)$. Si

$$X = \sum_i X^i \frac{\partial}{\partial x_i}, \omega = \sum_i \omega_i dx_i$$

$$\omega(X) = \sum_i X^i \omega_i$$

La fonction $\omega(X)$ est appelée dérivée intérieure de ω par X notée

$$i_X(\omega)$$

Lemme 2.5.1. Si $\omega \in \Omega_1^k(U)$, alors

$$\begin{array}{ccc} \omega : \chi(U) & \rightarrow & \mathcal{C}^k(U) = \Omega_0^k(U) \\ X & \mapsto & \omega(X) \end{array}$$

est une application $\mathcal{C}^k(U)$ -linéaire, i.e. pour tout $X, Y \in \chi(U)$ et $f \in \mathcal{C}^k(U)$, on a

1) $\omega(X + Y) = \omega(X) + \omega(Y)$.

2) $\omega(fX) = f\omega(X)$

Définition 2.5.2. Soient U un ouvert de \mathbb{R}^n et $X \in \chi(U)$. La dérivée intérieure i_X est une application définie par

$$\begin{aligned} i_X : \Omega_q^k(U) &\rightarrow \Omega_{q-1}^k(U) \\ \omega &\mapsto i_X(\omega) \end{aligned}$$

telle que $i_X(\omega)$ est une forme $(q-1)$ -linéaire donnée par

$$i_X\omega(X_1, \dots, X_{q-1}) = \omega(X, X_1, \dots, X_{q-1})$$

$$\omega(X, X_1, \dots, X_{q-1})(x) = \omega_x(X(x), X_1(x), \dots, X_{q-1}(x)) \quad \forall x \in U$$

De la Proposition 1.5.1, on a

Proposition 2.5.1. Soient $X \in \chi(U)$, $\omega \in \Omega_p^k(U)$ et $\alpha \in \Omega_q^k(U)$, alors

$$i_X(\omega \wedge \alpha) = i_X\omega \wedge \alpha + (-1)^p\omega \wedge i_X\alpha$$

Remarque 2.5.1. Soient U un ouvert de \mathbb{R}^n et $X = \sum_i^n X^i \frac{\partial}{\partial x_i}$ un champ de vecteurs de classe C^k sur U . Si $\omega = dx_1 \dots dx_n$ est une forme volume sur U alors

$$i_X(\omega) = \sum_i^n X^i dx_1 \dots \widehat{dx_i} \dots dx_n$$

2.6 Image Réciproque de Forme Différentielle

Définition 2.6.1. Soient U un ouvert de \mathbb{R}^n et V un ouvert de \mathbb{R}^m $\varphi : U \rightarrow V$ une application de classe C^{k+1} ($k \geq 1$). On définit l'image réciproque des q -forme différentielle

$$\begin{aligned} \varphi^* : \Omega_q^k(V) &\rightarrow \Omega_q^k(U) \\ \omega &\mapsto \varphi^*(\omega) \end{aligned}$$

définit par

$$\varphi^*(\omega)_x(z_1, \dots, z_q) = (d_x\varphi)^*(\omega_{\varphi(x)})(z_1, \dots, z_q) = \omega_{\varphi(x)}(d_x\varphi(z_1), \dots, d_x\varphi(z_q))$$

où $x \in U$ et $z_1, \dots, z_q \in \mathbb{R}^n$ (voir la Définition 1.3.1).

Proposition 2.6.1. Soient U un ouvert de \mathbb{R}^n et V un ouvert de \mathbb{R}^m , W un ouvert de \mathbb{R}^r , $\varphi : U \rightarrow V$ et $\psi : V \rightarrow W$ deux applications de classe C^{k+1} ($k \geq 1$). Alors

$$1) (\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*$$

$$2) \varphi^*(\omega_1 + \omega_2) = \varphi^*(\omega_1) + \varphi^*(\omega_2).$$

$$3) \varphi^*(\lambda\omega) = \lambda\varphi^*(\omega)$$

$$4) \varphi^*(\omega) = f \circ \varphi.(d\varphi_1 \wedge \cdots \wedge d\varphi_p) = f \circ \varphi|\det Jac(\varphi)|dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_p$$

$$4) \varphi^*(\omega \wedge \alpha) = \varphi^*(\omega) \wedge \varphi^*(\alpha) .$$

$$5) \varphi^*(f) = f \circ \varphi$$

$$7) \text{ Si } k > n \text{ alors } \varphi^*(\omega) = 0$$

$$\text{ où } f \in \mathcal{C}^k(V), \omega, \omega_1, \omega_2 \in \omega_p^k(V) \text{ et } \lambda \in \mathbb{R}, \alpha \in \omega_q^k(V)$$

Proposition 2.6.2. Soient U un ouvert de \mathbb{R}^p, V un ouvert de \mathbb{R}^n et $\varphi : U \rightarrow V$ de classe $C^k(V)(p \leq n)$. Si $\omega \in \Omega_p(V)$ alors

$$\varphi^*(d\omega) = d\varphi^*(\omega)$$

Démonstration. posons $\omega = f dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_p$. Alors

$$\begin{aligned} \varphi^*(\omega) &= f \circ \varphi.\varphi^*(dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_p) \\ &= f \circ \varphi.(d\varphi_1 \wedge \cdots \wedge d\varphi_p) \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} d\varphi^*(\omega) &= d(f \circ \varphi.\varphi^*(dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_p)) \\ &= d(f \circ \varphi) \wedge (d\varphi_1 \wedge \cdots \wedge d\varphi_p) + f \circ \varphi d(d\varphi_1 \wedge \cdots \wedge d\varphi_p) \\ &= \varphi^*(df) \wedge \varphi^*(dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_p) \\ &= \varphi^*(df \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_p) \\ &= \varphi^*(d\omega) \end{aligned}$$

□

Corollaire 2.6.1. Soient U un ouvert de \mathbb{R}^n, V un ouvert de \mathbb{R}^m et $\varphi : U \rightarrow V$ de classe $C^k(V)(n \leq m)$. Si $\omega \in \Omega_n^k(V)$ alors

$$\begin{aligned} \varphi^*(\omega) &= f \circ \varphi(d\varphi_1 \wedge \cdots \wedge d\varphi_n) = \varphi^*(\omega) = f(\varphi(x))(d\varphi_1(x) \wedge \cdots \wedge d\varphi_n(x)) \\ &= \varphi^*(f(x))(d\varphi_1 \wedge \cdots \wedge d\varphi_n) \end{aligned}$$

où $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ est une application de classe C^{k-1} et $x \in U$.

Corollaire 2.6.2. soit (U, φ) une carte locale de M et $\varphi_1 \dots \varphi_n$ est une fonction C^∞ sur U on a

$$d\varphi_1 \wedge \dots \wedge d\varphi_n = \det[\partial\varphi_i/\partial x_j] dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

Corollaire 2.6.3. Soient U un ouvert de \mathbb{R}^n , V un ouvert de \mathbb{R}^m et $\varphi : U \rightarrow V$ de classe $C^k(V)$ ($p \leq \min(n, m)$). Soit $\omega \in \Omega_p^k(V)$ alors

1) ω est fermée $\Rightarrow \varphi^*(\omega)$ est fermée.

2) ω est exacte $\Rightarrow \varphi^*(\omega)$ est exacte. (i.e. $(\omega = d\alpha) \Rightarrow \varphi^*(\omega) = d\varphi^*(\alpha)$)

2.7 Formes Différentielles sur une variété différentielle

Soit M une variété différentiable de dimension n , on définit l'application :

$$\begin{aligned} \Pi : \Lambda^q T^*M &\rightarrow M \\ (p, \omega_p) &\mapsto p \end{aligned}$$

de la projection canonique qui à $\omega_p \in \Lambda^q(T_p^*M)$ associe $\Pi(\omega_p) = p \in M$.

Définition 2.7.1. (**q-forme différentielle**)

On appelle q -forme différentielle de classe C^∞ sur M toute application

$$\begin{aligned} \omega : M &\rightarrow \Lambda^q T^*M := \mathcal{A}_q(T_p M) \\ p &\mapsto \omega_p \end{aligned}$$

de classe C^∞ qui vérifie $\Pi \circ \omega = Id_M$

Remarque 2.7.1.

1. Si (U, φ) est une carte locale de M alors une q -forme différentielle s'écrit dans cette carte :

$$\omega_p = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_q \leq n} f_{i_1 \dots i_q} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_q}$$

ou $\{dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_q}\}_{1 \leq i_1 < \dots < i_q \leq n}$ est la base de $\Lambda^q T_p M^*$ et \wedge désigne le produit extérieur

2. Une 1-forme différentielle de classe C^k sur M est une application

$$\omega : M \rightarrow T^*M$$

qui à un point $p \in M$, associe

$$\omega_p = \sum_{i=1}^n f_i(p) dx_i$$

où $\{dx_i|_p\}_{i=1,\dots,n}$ désigne la base de T_p^*M l'espace dual de l'espace tangent de M et $f_i \in C^\infty(M)$.

Théorème 2.7.2. Soit M une variété différentiable, pour tout $q \in \mathbb{N}$, il existe un opérateur de différentiation extérieure d de $\Omega^q(M)$ dans $\Omega^{q+1}(M)$ tels que

1. Pour $q = 0$, $d : C^\infty \rightarrow \Omega^1$ est la différentielle usuelle des fonctions.

2. Pour tout $\omega \in \Omega^q(M)$:

$$\begin{aligned} d\omega(X_0, \dots, X_q) &= \sum_{i=1}^n (-1)^i X_i \cdot \omega(X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_q) \\ &\quad + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_q) \end{aligned}$$

où, \widehat{X}_i signifie que l'on omet X_i dans les arguments de ω , et $X_i \cdot \omega(X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_q)$ est la dérivation sur la fonction $\omega(X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_q)$

3. pour $\omega \in \Omega^q(M)$ on a $d(d\omega) = 0$;

4. pour $\omega_1 \in \Omega^q(M)$ et $\omega_2 \in \Omega^{q'}(M)$

$$d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^p \omega_1 \wedge d\omega_2 :$$

Intégration des n -formes différentielle sur \mathbb{R}^n

Soit M une variété différentiable de dimension n . Les références [15, 5, 7]

Définition 3.0.1. Le support de ω sur M est l'adhérence de l'ensemble des points x de M pour lesquels ω_x n'est pas nul dans $\wedge^q(T_x^*M)$.

On note $\Omega_c(M)$ la sous-algèbre de $\Omega(M)$ formée des formes différentielles à support compact.

$$\text{supp}(\omega) = \overline{\left\{ x \in M, \quad \omega_x \neq 0 \right\}}$$

Définition 3.0.2. (Variété orientables)

On dira que M est orientable s'il existe un sous atlas de l'atlas saturé (maximal) de M dont tous les changements de cartes ont des jacobiens positifs. En d'autres termes, on dira que M est orientable s'il existe un sous atlas \mathcal{A} de l'atlas saturé de M qui est tel que :

Si (U, ϕ) et (V, ψ) sont deux cartes de \mathcal{A} de coordonnées associées (x_1, \dots, x_n) et (y_1, \dots, y_n) alors pour tout $p \in U \cap V$, $\det\left(\left(\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\right)_p\right) > 0$. Un tel atlas est appelé un atlas d'orientation.

Ou s'il existe sur M n -formes différentielle $\omega \in \Omega^n(M)$ ne sa nulle on aucun point.

Partition de l'unité

Afin de pouvoir généraliser la notion de l'intégrale aux n -formes sur une variété M quelconque, on aura besoin de la notion de partition de l'unité

Définition 3.0.3. Nous considérons un atlas orientable $\mathcal{A} = \{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$

la famille $\{U_i\}_{i \in I}$ constitue un recouvrement d'ouverts de M localement fini, c'est à dire que tout ensemble compact de M ne rencontre qu'un nombre fini d'ouverts U_i .

Alors il est possible de montrer qu'il existe une famille de fonctions

h_i telles que :

1. $h_i \geq 0$ pour tout $p \in M$,
2. Le support de h_i est inclus dans U_i ,

3. $\sum_{i \in I} h_i = 1$ pour tout $p \in M$ (comme le recouvrement est localement fini, cette somme est une somme finie).

Définition 3.0.4. Un système de fonction qui vérifie les propriétés cités est appelé une partition de l'unité de M associée au recouvrement d'ouverts localement fini $\{U_i\}_{i \in I}$ on le note (U_i, ϕ_i, h_i) .

Avant de donner la définition de l'intégrale des formes différentielles sur une variété différentiable il nous faut dans un premier temps introduire la notion de l'intégration des n -formes sur \mathbb{R}^n .

Définition 3.0.5. Considérons \mathbb{R}^n comme étant une variété différentielle de dimension n , avec une seule carte, de coordonnées $x = (x_1, \dots, x_n)$ soit ω une n -forme différentielle sur \mathbb{R}^n , une telle forme s'écrit :

$$\omega = f \cdot dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n :$$

Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert. Nous définissons

$$\int_U \omega = \int_U f(x) \cdot dx_1 \dots dx_n :$$

où dans le seconde membre , il s'agit d'une intégrale multiple habituelle sur un ouvert de \mathbb{R}^n , $dx_1 \dots dx_n$ représente la mesure de Lebesgue dans \mathbb{R}^n .

Signalons que dans cette expression, nous avons choisi une orientation sur \mathbb{R}^n cette orientation se définit en langage des formes différentielles comme suite , on pose par convention que l'intégrale est positive , donc si on change l'ordre des $dx_i (i = 1, \dots, n)$ alors l'intégrale change de signe sans changer la valeur. En effet, puisque $dx_1 \wedge dx_2 \dots \wedge dx_n = -dx_2 \wedge dx_1 \dots \wedge dx_n$ alors

$$\begin{aligned} \int_U \omega &= \int_U f(x) \cdot dx_1 dx_2 \dots dx_n. \\ &= - \int_U f(x) \cdot dx_2 dx_1 \dots dx_n. \end{aligned}$$

Cela montre que l'ordre des dx_i est important, d'où l'importance d'exiger une orientation

Propriété 3.0.1. Soient U un ouvert de \mathbb{R}^n , $\omega_1, \omega_2 \in \Omega_c^n(U)$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ Alors

$$\int_U \lambda \omega_1 + \omega_2 = \lambda \int_U \omega_1 + \int_U \omega_2$$

Proposition 3.0.1. (Changement de variables)

Soient U et V deux ouverts de \mathbb{R}^n et $\varphi : U \rightarrow V$ un difféomorphisme , et $\omega \in \Omega_c^n(V)$ alors

$$\int_U \varphi^* \omega = \pm \int_V \omega \quad \text{et, } \varphi^* \omega \in \Omega_c^n(U)$$

Selon que le signe de déterminant jacobien $\det(\text{Jac } \varphi(x)) > 0$ ou < 0

Démonstration. soit ω une n -forme différentielle sur \mathbb{R}^n , une telle forme s'écrit :

$$\omega = f \cdot dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n :$$

$$\begin{aligned} \int_U \varphi^* \omega &= \int_U \varphi^*(f \cdot dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n) \\ &= \int_U (f \circ \varphi) \cdot (d\varphi_1 \wedge \dots \wedge d\varphi_n) \quad \text{car } \varphi^* d = d\varphi^* \\ &= \int_U (f \circ \varphi) \det(\text{Jac}(\varphi)) (dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n) \quad \varphi^{-1}(y) = x \end{aligned}$$

D'autre part, la formule de changement de variables dans les intégrales multiples

$$\int_V \omega = \int_V f \cdot dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = \int_U f \circ \varphi |\det(\text{Jac}(\varphi))| dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n$$

où

$$\det(\text{Jac}(\varphi(x))) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

□

Exemple 3.0.1. Soient $I =]0, 1[\times]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $\varphi : (r, t) \in I \rightarrow (r \cos(t), r \sin(t))$ et $\omega = x dx dy$.

On a

$$\begin{aligned} \varphi^*(\omega) &= r \cos(t) d(r \cos(t)) d(r \sin(t)) \\ &= r \cos(t) (\cos(t) dr - r \sin(t) dt) (\sin(t) dr + r \cos(t) dt) \\ &= r \cos(t) \overbrace{(r \cos^2(t) dr dt - r \sin^2(t) dt dr)}{=r} \\ &= r^2 \cos(t) dr dt \\ &= r \cos(t) \det \begin{vmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -r \sin(t) & r \cos(t) \end{vmatrix} dr dt \\ &= r^2 \cos(t) dr dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\varphi} \omega &= \int_I \varphi^*(\omega) \\
&= \int_0^1 r^2 dr \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) dt \\
&= \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

Exemple 3.0.2. Soient $I =]-\pi, \pi[\times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\times]0, 1[$, $\omega = dx dy dz$ et

$$\begin{aligned}
\varphi : I &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\
(t, s, r) &\mapsto (r \cos(s) \cos(t), r \cos(s) \sin(t), r \sin(s))
\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
\varphi^*(\omega) &= d(r \cos(s) \cos(t)) d(r \cos(s) \sin(t)) d(r \sin(s)) \\
&= [-r \cos(s) \sin(t) dt - r \cos(t) \sin(s) ds + \cos(s) \cos(t) dr] [r \cos(s) \cos(t) dt \\
&\quad - r \sin(s) \sin(t) ds + \cos(s) \sin(t) dr] [r \cos(s) ds + \sin(s) dr] \\
&= r^2 \sin^2(s) \sin^2(t) \cos(s) dt ds dr - r^2 \cos^3(s) \sin^2(t) dt dr ds \\
&\quad - r^2 \cos^2(t) \sin^2(s) \cos(s) ds dt dr + r^2 \cos^3(s) \cos^2(t) dr dt ds \\
&= [r^2 \sin^2(s) \sin^2(t) \cos(s) + r^2 \cos^3(s) \sin^2(t) \\
&\quad + r^2 \cos^2(t) \sin^2(s) \cos(s) + r^2 \cos^3(s) \cos^2(t)] dt ds dr \\
&= r^2 \cos(s) dt ds dr
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\varphi} \omega &= \int_I \varphi^*(\omega) \\
&= \int_0^1 r^2 \int_{-\pi}^{\pi} dt \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(s) ds \\
&= \frac{4}{3} \pi
\end{aligned}$$

intégrale d'une n -forme différentielle

Les références de ce chapitre [15, 5, 2, 7, 8, 12]
 M est une variété différentielle lisse (i.e C^∞), orientée de dimension n

Définition 4.0.1. Soit $\omega \in \Omega_c^n(M)$, et soit (U, φ) une carte local de M tel que $\text{supp}(\omega) \subset U$. l'intégrale de ω sur M noté $\int_M \omega$ définit par

$$\int_M \omega = \int_U \omega = \int_{\varphi(U)} (\varphi^{-1})^*(\omega) \quad \text{avec } (\varphi^{-1})^*(\omega) \in \Omega^n(\mathbb{R}^n)$$

Définition 4.0.2. Soient M une variété différentiable orientée de dimension n , \mathcal{A} un atlas orientable de M , et $(U_i, \phi_i, h_i)_{i \in I}$ une partition de l'unité subordonnée à \mathcal{A} . étant donnée $\omega \in \Omega^n(M)$ une n -forme sur M à support compact, on pose

$$\int_M \omega = \sum_{i \in I} \int_{\phi_i(U_i)} (h_i \cdot \omega) \circ \phi_i^{-1} dx_1 \dots dx_n$$

ou $dx_1 \dots dx_n$ désigne la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^n et $\omega = f \cdot dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ une n -forme différentielle, l'intégrale $\int_M \omega$ ne dépend ni de l'atlas \mathcal{A} ni de la partition de l'unité $(U_i, \phi_i, h_i)_{i \in I}$.

Proposition 4.0.1. Soit M une variété lisse orientée de dimension n . alors, il existe un unique opérateur linéaire,

$$\int_M : \Omega_c^n(M) \rightarrow \mathbb{R},$$

tel que pour tout $\omega \in \Omega_c^n(M)$, il existe (U, φ) carte de M avec $\text{supp}(\omega) \subseteq U$ et

$$\int_M \omega = \int_{\varphi(U)} (\varphi^{-1})^* \omega$$

Démonstration. supposons que $\text{supp}(\omega) \subseteq U$ où (U, φ) est une carte orienté positivement. Alors compatible avec l'orientation de M , et soit $(h_i)_{i \in I}$ une partition de l'unité subordonnée. donc toute forme $\omega \in \Omega_c^n(M)$ s'écrit

$$\omega = \sum_{i \in I} h_i \omega = \sum_{i \in I} \omega_i \tag{4.1}$$

ou $\text{supp} \omega_i \subset U_i$, nécessairement

$$\int_M \omega = \sum_{i \in I} \int_{\varphi_i(U_i)} (\varphi_i^{-1})^* \omega_i$$

ce qui montre l'unicité de l'opérateur . Pour établir son existence, il suffit de montrer que, pour toute carte (V, ψ) telle que ψ conserve l'orientation, on a bien

Nous devons montrer que l'expression ci-dessus ne dépend pas du choix du cartes Soit (U, φ) un autre carte tq $\text{supp}(\omega) \subseteq U$.L'application $\theta = \psi \circ \varphi^{-1}$ est un difféomorphisme de $W = \varphi(U \cap V)$ ver $W' = \psi(U \cap V)$ et par hypothèse , le déterminante de Jacobien est positif sur le W .

$$\text{supp}_{\varphi(V)}((\varphi^{-1})^* \omega) \subseteq W, \quad \text{supp}_{\psi(U)}((\psi^{-1})^* \omega) \subseteq W'$$

et

$$\theta \circ (\psi^{-1})^* \omega = (\varphi^{-1})^* \circ \psi^* \circ (\psi^{-1})^* \omega = (\varphi^{-1})^* \omega$$

par la proposition de changement de variable on ce trouve

$$\begin{aligned} \int_{\varphi(V)} (\varphi^{-1})^* \omega &= \int_{\psi(U)} (\psi \circ \varphi^{-1})^* (\varphi^{-1})^* \omega = \int_{\psi(U)} (\psi^{-1})^* \omega \\ \int_M \omega &= \int_{\varphi(V)} (\varphi^{-1})^* \omega \end{aligned}$$

si ω est a support compact contenu dans V . D'après 4.1 ,il suffit d'examiner le cas ou $\text{Supp}(\omega) \subset U_i \cap V$. Alors, d'après la définition de l'opérateur \int_M et les conditions de support

$$\int_M \omega = \int_{\varphi_i(U_i)} (\varphi_i^{-1})^* \omega = \int_{\varphi_i(U_i \cap V)} (\varphi_i^{-1})^* \omega$$

D'autre part, comme $\psi^{-1} \circ \varphi_i$ conserve l'orientation,

$$\int_{\varphi_i(U_i \cap V)} (\varphi_i^{-1})^* \omega = \int_{\psi_i(U_i \cap V)} (\varphi_i \circ \psi_i^{-1})^* (\varphi_i^{-1})^* \omega = \int_{\psi_i(U_i \cap V)} (\psi_i^{-1})^* \omega = \int_{\psi(V)} (\psi^{-1})^* \omega$$

□

4.1 Lemme de Poincaré

Définition 4.1.1. Un ensemble $U \subset \mathbb{R}^n$ est dit étoilé en $x_0 \in U$ si :

$$\forall x \in U, \forall t \in [0, 1] : \{(1-t)x_0 + tx\} \in U$$

Lemme 4.1.1. Soient $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert étoilé en 0 et X un champ de vecteurs défini par

$$X_x = \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Si on considère l'application :

$$\begin{aligned} \xi : \Omega^{p+1}(U) &\rightarrow \Omega^p(U) \\ \omega &\mapsto \int_0^1 t^p i_X(\omega)(tx) dt \end{aligned}$$

Alors ξ est une application linéaire telle que

$$d\xi(\omega) + \xi(d\omega) = \omega$$

Démonstration. Il suffit de démontrer le lemme pour $\omega = f dx_{i_1} \dots dx_{i_{p+1}}$. On a :

$$\begin{aligned} \xi(\omega) &= \sum_{j=1}^{p+1} (-1)^{j-1} \left(\int_0^1 t^p f(tx) x_{i_j} dt \right) dx_{i_1} \dots \widehat{dx_{i_j}} \dots dx_{i_{p+1}} \\ d \left(\int_0^1 t^p f(tx) x_{i_j} dt \right) &= \left(\int_0^1 t^p f(tx) x_{i_j} dt \right) dx_{i_j} + \sum_{i=1}^n \left(\int_0^1 t^{p+1} \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx) x_{i_j} dt \right) dx_i \\ d\xi(\omega) &= \sum_{j=1}^{p+1} (-1)^{j-1} \left[\left(\int_0^1 t^p f(tx) dt \right) x_{i_j} \sum_{i=1}^n (-1)^{j-1} \left(\int_0^1 t^p f(tx) x_{i_j} dt \right) dx_i \right] dx_{i_1} \dots \widehat{dx_{i_j}} \dots dx_{i_{p+1}} \\ &= (p+1) \left(\int_0^1 t^p f(tx) dt \right) dx_{i_1} \dots dx_{i_j} \dots dx_{i_{p+1}} \\ &\quad + \sum_{j=1}^{p+1} (-1)^{j-1} \sum_{i=1}^n \left(\int_0^1 t^p f(tx) x_{i_j} dt \right) dx_i dx_{i_1} \dots \widehat{dx_{i_j}} \dots dx_{i_{p+1}} \end{aligned} \quad (4.2)$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i dx_{i_1} \dots dx_{i_{p+1}} \\ i_X(dx_i dx_{i_1} \dots dx_{i_{p+1}}) &= x_i dx_{i_1} \dots dx_{i_{p+1}} + \sum_{j=1}^{p+1} (-1)^j x_{i_j} dx_i dx_{i_1} \dots \widehat{dx_{i_j}} \dots dx_{i_{p+1}} \text{ Donc} \\ \xi(d\omega) &= \sum_{i=1}^n \xi \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(tx) dx_{i_1} \dots dx_{i_{p+1}} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \int_0^1 t^{p+1} \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx) i_X(dx_{i_1} \dots dx_{i_{p+1}}) dt \\ &= \sum_{i=1}^n \int_0^1 t^{p+1} \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx) \left(x_i dx_{i_1} \dots dx_{i_{p+1}} + \sum_{j=1}^{p+1} (-1)^j x_{i_j} dx_i dx_{i_1} \dots \widehat{dx_{i_j}} \dots dx_{i_{p+1}} \right) dt \end{aligned} \quad (4.3)$$

Par sommation de 4.2 et 4.3 on obtient

$$\begin{aligned}
d\xi(\omega) + \xi(d\omega) &= \int_0^1 \left((p+1)t^p f(tx) dt + \sum_{i=1}^n t^{p+1} \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx) x_i \right) dt dx_{i_1} \dots dx_{i_{p+1}} \\
&= \left[\int_0^1 \left(t^{p+1} f(tx) \right)' dt \right] dx_{i_1} \dots dx_{i_{p+1}} \\
&= \left[t^{p+1} f(tx) \right]_0^1 dx_{i_1} \dots dx_{i_{p+1}} \\
&= f(x) dx_{i_1} \dots dx_{i_{p+1}} \\
&= \omega
\end{aligned}$$

□

Lemme 4.1.2. (*Poincaré*) [5]

Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert étoilé. Si ω est une p -forme différentielle fermée alors ω est une p -forme différentielle exacte.

Démonstration. on peut supposer que U est étoilé en 0

$$d\xi(\omega) + \xi(d\omega) = \omega :$$

Comme ω est fermée i.e. $d\omega = 0$, on déduit

$$d\xi(\omega) = \omega.$$

□

4.2 Formule de Stokes

Soit M une variété à bord lisse de dimension n orientable, et soit ∂M la frontière de M lisse orientable et $I : \partial M \hookrightarrow M$ injection d'inclusion.

Si ω est un $(n-1)$ -forme sur M , on écrit $\int_{\partial M} \omega$ au lieu de $\int_{\partial M} I^*(\omega)$.

Théorème 4.2.1. [15]

Soit M une variété orientée de dimension n et $\omega \in \Omega_c^{n-1}(M)$ à support compact alors

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$$

Démonstration. soit un atlas $\{(U_i, \varphi_i)\}$ dans M tel que pour tout U_i est difféomorphe à \mathbb{R}^n ou H^n via un difféomorphisme préservant l'orientation.

Soit $\{h_i\}$ une partition C^∞ d'unité subordonnée à $\{U_i\}$.

Comme nous l'avons montré dans la section précédente, $(n-1)$ -forme $h_i \omega$ a un support compact en U_i .

Supposons que le théorème de Stokes soit valable pour \mathbb{R}^n et pour H^n . Ensuite, il

est valable pour tous les cartes U_i dans notre atlas, qui sont difféomorphes à \mathbb{R}^n ou H^n .

Notez également que

$$\partial M \cap U_i = \partial U_i$$

Donc

$$\begin{aligned} \int_{\partial M} \omega &= \int_{\partial M} \sum_i h_i \omega && (\sum_i h_i = 1) \\ &= \sum_i \int_{\partial M} h_i \omega && (\sum_i h_i \omega \text{ est une somme finie}) \\ &= \sum_i \int_{\partial U_i} h_i \omega && (\text{supp } h_i \omega \subset U_i) \\ &= \sum_i \int_{U_i} d(h_i \omega) && (\text{théorème de stokes}) \\ &= \sum_i \int_M d(h_i \omega) && (\text{supp } d(h_i \omega) \subset U_i) \\ &= \int_M d \sum_i (h_i \omega) && (\sum_i (h_i \omega) \text{ est une somme fini}) \\ &= \int_M d\omega \end{aligned}$$

avons de démontrer le théorème de stokes sur H^n et sur \mathbb{R}^n , on va démontre sur la demi plan H^2

Théoreme de stokes sur H^2

Soit x, y des cordones de H^2 et l'orientation de la frontière sur ∂H^2 est donnée par $i_{-\partial/\partial y}(dx \wedge dy) = dx$.

La forme ω est une combinaison linéaire

$$\omega = f(x, y)dx + g(x, y)dy$$

tq f, g sont des fonction C^∞ à support compacte dans H^2 definit sur $[-a, a] \times [0, a]$ tq a est un number réel et $a > 0$

$$d\omega = \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx \wedge dy = (g_x - f_y) dx dy$$

et

$$\begin{aligned} \int_{H^2} d\omega &= \int_{H^2} g_x dx dy - \int_{H^2} f_y dx dy \\ &= \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty g_x dx dy - \int_{-\infty}^\infty \int_0^\infty f_y dy dx \\ &= \int_0^a \int_{-a}^a g_x dx dy - \int_{-a}^a \int_0^a f_y dy dx \end{aligned}$$

Dans cette expression

$$\int_{-a}^a g_x(x, y) dx = g(x, y) \Big|_{x=-a}^a = 0$$

et

$$\int_0^a f_y(x, y) dy = f(x, y) \Big|_{y=0}^a = -f(x, 0)$$

car $f(x, a) = 0$ d'où

$$\int_{H^2} d\omega = \int_{-a}^a f(x, 0) dy$$

Cela prouve le théorème de Stokes pour le demi-plan supérieur

ω est une $(n-1)$ -forme avec support compact sur \mathbb{R}^n ou H^n est une combinaison linéaire

$$\omega = \sum_{i=1}^n f_i dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \cdots \wedge dx_n \quad (4.4)$$

puisque ω est \mathbb{R} -linéaire, il suffit de vérifier le théorème pour un terme de la somme de 4.4, c.a.d

$$\omega = f dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \cdots \wedge dx_n$$

où f est une fonction à support compact en \mathbb{R}^n ou H^n . tel que

$$\begin{aligned} d\omega &= \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{i-1} \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \cdots \wedge dx_n \\ &= (-1)^{i-1} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_i \wedge \cdots \wedge dx_n \end{aligned}$$

puisque f à support compacte sur \mathbb{R}^n ou H^n alors on choisit $a \in \mathbb{R}_+$ tq $\text{supp } f = [-a, a]^n$

Théorème de Stokes sur \mathbb{R}^n

Par le théorème de Fubini

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} d\omega &= \int_{\mathbb{R}^n} (-1)^{i-1} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx_1 \dots dx_n \\
&= (-1)^{i-1} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \right) dx_1 \dots \widehat{dx}_i \dots dx_n \\
&= (-1)^{i-1} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{-a}^a \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \right) dx_1 \dots \widehat{dx}_i \dots dx_n
\end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned}
\int_{-a}^a \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i &= f(x_1, \dots, x_{i-1}, a, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_{i-1}, -a, \dots, x_n) \\
&= 0 - 0 = 0
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\int_{\mathbb{R}^n} d\omega = 0$$

D'autre part nous avons $\int_{\partial \mathbb{R}^n} \omega = \int_{\emptyset} \omega = 0$, car la frontière de \mathbb{R}^n est vide. Ceci vérifie le théorème de Stokes pour \mathbb{R}^n

Théorème de Stokes sur H^n

Le cas si $i \neq n$

$$\begin{aligned}
\int_{H^n} d\omega &= (-1)^{i-1} \int_{H^n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_1 \dots dx_n \\
&= (-1)^{i-1} \int_{H^{n-1}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \right) dx_1 \dots \widehat{dx}_i \dots dx_n \\
&= (-1)^{i-1} \int_{H^{n-1}} \left(\int_{-a}^a \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \right) dx_1 \dots \widehat{dx}_i \dots dx_n \\
&= 0 \quad \text{Pour la même raison que dans le cas de } \mathbb{R}^n
\end{aligned}$$

Par définition de ∂H^n , la 1-forme dx_n est identique à zéro. Puisque $i \neq n$, $\omega = f dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}_i \wedge \dots \wedge dx_n \equiv 0$ sur ∂H^n donc

$$\int_{\partial H^n} \omega = 0$$

Le cas $i = n$

$$\begin{aligned}\int_{H^n} d\omega &= (-1)^{n-1} \int_{H^n} \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_1 \dots dx_n \\ &= (-1)^{n-1} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n \right) dx_1 \dots dx_{n-1}\end{aligned}$$

d'autre par on a

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n &= \int_0^a \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n \\ &= f(x_1, \dots, x_{n-1}, \dots, a) - f(x_1, \dots, x_{n-1}, \dots, 0) \\ &= -f(x_1, \dots, x_{n-1}, \dots, 0)\end{aligned}$$

$$\int_{H^n} d\omega = (-1)^n \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(x_1, \dots, x_{n-1}, \dots, 0) dx_1 \dots dx_{n-1} = \int_{\partial H^n} \omega$$

car $(-1)^n \mathbb{R}^{n-1}$ est précisément ∂H^n avec sa frontière orientation.

Donc , le théorème de Stokes aussi tient dans ce cas

□

Exemple 4.2.1. Soient $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ et $\omega = xdx + ydy$. On a :
 1) D est une sous variété compact de bord $\partial D = S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.
 2) Si $\varphi : t \in [0, 2\pi] \rightarrow (\cos(t), \sin(t)) \in \mathbb{R}^2$ est une paramétrisation de la sous variété S^1 , alors $\varphi^*(\omega) = 0$ et

$$\int_{S^1} \omega = \int_{\varphi} \omega = \int_{[0, 2\pi]} \varphi^*(\omega) = 0$$

3) On a $d\omega = 0$, par application de la formule de stokes on obtient :

$$\int_{S^1} \omega = \int_{\partial D} \omega = \int_D d(\omega) = 0$$

Démonstration.

Exemple 4.2.2. Sur \mathbb{R}^2 on pose : $\omega = dx dy$, $\eta = \frac{1}{2}(x dy - y dx)$, $D_1 = [0, 1] \times [0, 1]$
 $D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2\}$

$$\begin{aligned}\varphi_1 : [0, R] \times [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (r, \theta) &\mapsto (r \cos(\theta), r \sin(\theta))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_2 : [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \theta &\mapsto (R \cos \theta, R \sin \theta)\end{aligned}$$

On a :

1)

$$\int_{D_1} \omega = \int_0^1 \int_0^1 dx dy = 1$$

2)

$$\begin{aligned} \varphi_1^*(\omega) &= (\cos(\theta)dr - r\sin(\theta)d\theta)(\sin(\theta)dr + r\cos(\theta)d\theta) \\ &= r\cos^2(\theta)drd\theta - r\sin^2(\theta)d\theta dr \\ &= r(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))drd\theta \\ &= rdrd\theta \end{aligned}$$

$$\int_{D_2} \omega = \int_{\varphi_1} \omega = \int_{[0,R] \times [0,2\pi]} \varphi_1^*(\omega) = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^R r dr \right) d\theta = \pi R^2$$

3) On $\omega = d\eta$ et $\varphi_2^*(\eta) = \frac{1}{2}R^2 d\theta$. De la formule de Stokes on obtient

$$\int_{D_2} \omega = \int_{D_2} d\eta = \int_{\partial D_2} \theta = \int_{\varphi_2} \theta = \int_{[0,2\pi]} \varphi_2^*(\eta) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}R^2 d\theta = \pi R^2$$

□

Conclusion

La conclusion de toute cette mémoire est confirmer que les intégration classique est les intégration d'une p -formes différentielles sur une variété différentiable si une généralisation où théorème de **Stokes**

Bibliographie

- [1] <https://faculty.math.illinois.edu/~kapovich/481-14/bry.pdf>.
- [2] M .Berger and B.Gostiaux. *Differential Geometry, Manifolds, Curves, and Surfaces*. GTM No.115,. Springer-Verlag, 1987.
- [3] T. Bouche. *Introduction à la géométrie différentielle des variétés analytiques complexes*. Université Joseph Fourier, 1999.
- [4] C.Godbillon. *Géométrie différentielle et mécanique analytique -Collection Méthodes Hermann*. cours AOT 13, Paris, 1969.
- [5] M .Djaa. *Géométrie Différentielle*. Publications du Centre Universitaire Ahmed Zabana Relizane, 2017.
- [6] E.Hebey. *Introduction à l'analyse non linéaire sur les variétés*. Diderot Multi-média, janvier 1997.
- [7] J . Gallier. *Notes on Differential Geometry and Lie Groups*, 2011.
- [8] H.Cartan. *Forme Différentielles*. Hermann,Paris, 1967.
- [9] H.Flanderst. *Differential Forms*. Academic Press, 1963.
- [10] J.Frédéric. *Géométrie différentielle et Application au Contrôle géométrique*. cours AOT 13, 2011.
- [11] J. Lafontaine. *Introduction aux variétés différentielles*. Grenoble Sciences, 1996.
- [12] A. Pierre. *Géométrie différentielle et Mécanique*. Ellipses Marketing, 2005.
- [13] A.Chikh Salah. *Minoration du Spectre du Laplacien de Hodge De Rham*. US-THB, 2008.
- [14] S.Simon. *Géométrie et topologie 2. : MATH803*.Université de Savoie Année 07/08, 2017.
- [15] L .Tu. *An Introduction to Manifolds*. Springer,Berlin Heidelberg NewYork, HongKong London, May 19, 2010.