République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur Et de La Recherche Scientifique

Université de Ghardaïa

Faculté des Sciences et de la technologie

Département des Mathématiques et de l'Informatique

Projet de fin d'étude présenter en vue de l'obtention de diplôme

De : **MASTER**

Domaine : **Mathématique et Informatique**

Spécialité : **Analyse fonctionnelles et Applications**

THÈME :

Problème à valeur initiale dans les espaces de Besov $B^s_{p,r}$

PAR :

MAMINE Dhaiba

M : EL HADJ MOUSSA Yacine	Maitre Assistant B. Univ Ghardaia	**Encadreur**
Mlle : BAHEDDI Bahia	Maitre Assistant B. Univ Ghardaia	**Examinateur**
M : FATMI Laarbi	Maitre Assistant A. Univ Ghardaia	**Président**

ANNEE UNIVERSITAIRE : 2016-2017

Dédicaces

Avant tout nous remercions, le Dieu tous puissant de nous accordée la volonté et la patience pour accomplir ce modeste travail.

Je dédie ce modeste travail à :

♣ Mes chers parents qui m'ont indiqué le bon chemin à entreprendre et qui m'ont encouragé et soutenue tout au long de mon parcours quotidien.

♣ Ma grand-mère, que mon dieu la préserve.

♣ Mes frères : Abd el Djalil, Choaib, Mohammed, Yaeghoub, Zin el abidine, Salem.

♣ Ma soeur : Khadidja.

♣ Tous mes oncles et tantes, tous mes cousins et cousines.

♣ Mon encadreur : "El Hadj Moussa Yacine" pour son aide, ses conseils, sa grande disponibilité et son ouverture d'esprit qui m'ont aidé à mener à bien ce travail.

♣ L'enseignant "Lattrache Smail" pour son aide, ses encouragements.

♣ Tous mes amies : Khadidja, Zohra, Lamia, Zakia, Mabrouka, Mariem, Souhila, Manal, Sara, Habiba, Soumia, Horia, Fairoz, Halima, Nossiba, Hadjira, Salma, Hanane, Fatima, Cherifa, Sabrina, Rabiaa, Laila, Houda, Marwa, Bouchra, et tous mes amies chaque personne avec nom.

♣ Tous mes enseignants au département des mathématiques.

♣ Tous mes camarades de promotion 2016-2017.

★Dhaiba★

Remerciement

Avons tout, je remercies Dieu, le tout puissant et le miséricordieux pour la volonté et la patience qu'il nous a attribué. Qu'il soit loué pour l'aide qu'il nous a fournie afin d'achever mes études et pour d'avoir guidé dans le droit chemin dans ma vie.

Je tenons à exprimer me vifs remerciements à :

-Mon encadreur M. El Hadj Moussa Yacine, de nous avoir aidé à réaliser le travail demandé dans ce projet de fin d'étude.

-M. Lattrache Smail pour les précieux conseils qu'il nous ont prodigués.

-M. Ghuerbati Kaddeur, Mmme. Hammouche Hadda, M. Kina Abd lkrim, M. Chikh Sallah A Wahab, M. Ouled mehrez abd lkader, pour ses aides.

-Mes jury Melle Behhadi Bahia et M. Fatmi Larbi d'avoir participer à la commission des examinateurs en vue d'une évaluation prompte et à sa juste valeur.

-Tout l'encadrement au département des mathématiques qui nous ont recueille toute l'année.

-Tout ceux qui ont contribué de loin on de près à la réalisation de ce travail.

Résumé

On présente dans ce travail certaines techniques d'analyse de Fourier pour l'étude des problèmes à valeur initiale des équations aux dérivées partielles linéaire. En particulier on s'intéresse à la régularité des solutions dans les espaces L^p, les résultats seront exprimer en terme de norme dans les espaces de Besov $B^s_{p,q}$ où s décrit le degré de la régularité par rapport à L^p.
Mots Clés : Transformation de Fourier, décomposition de Littlewood-Paley, espace de Besov, problème à valeur initiale.

Abstract

This work deals with some technical method based on Fourier analysis to study a linear initial value problem. In particular we are interessted in the L^p regularity of solution in grouth of norm, the results are expressed in terms of Besov norm $B^s_{p,q}$ where s mesure the degree of regularity in grouth of L^p norm.
Key Words : Fourier transform, Littlewood-Paley decomposition, Besov space, initial value problem.

Table des matières

Introduction

On introduit dans ce travail certaines techniques d'analyse de Fourier basé sur la décomposition de Littlewood-Paley pour étudier certaines problèmes à valeur initiale pour des équations aux dérivées partielles linéaire essentiellement l'équation de la chaleur, en particulier on s'intéresse à la régularité des solutions dans les espaces L^p, la régularité de la solution dépend de la régularité de la donnée initiale et du second membre, les résultats de la régularité sont exprimée en norme dans les espaces de Besov $B^s_{p,q}$, au s décrit le degré de la régularité suivant L^p.
On a reparti ce travail en trois chapitres :
Chapitre 1 : On donne un rappel de certains concepts de base de la théorie des distributions et la transformation de Fourier et on définit les propriétés classiques des espaces L^p.
Chapitre 2 : On donne la caractérisation des espaces fonctionnelles (Sobolev, Hölder, Besov) par la décomposition de Littlewood-Paley.
Chapitre 3 : On donne un résultat de régularité obtenue dans les espaces de Besov pour l'équation de la chaleur.

Chapitre 1

Préliminaires

Les résultats exposé dans ce chapitre se trouvent essentiellement dans [1, 4, 5, 9, 10, 11, 12, 14, 15, 16].
Nous rappelons les notions essentielles et nécessaires pour la suite, en particulier les espaces L^p et la transformation de Fourier, quelques propriétés principales. Nous rappelons aussi quelques inégalités classiques.

1.1 Les espaces L^p

Définition 1.1.1. (Fonction mesurable)
Une fonction $f : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}$ est dite mesurable si pour tout $c \in \mathbb{R}$, l'ensemble :

$$E_c = \{x \in \mathbb{R}^n, f(x) \geq c\}$$

est mesurable au sens de Lebesgue. [1]

Définition 1.1.2. (Fonction intégrable)
On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}$ est intégrable au sens de Lebesgue si :

$$\int_{\mathbb{R}^n} | f |< \infty$$

Définition 1.1.3. On appelle $\mathscr{L}^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}, \mu)$ pour $1 \leq p < \infty$ l'espace des fonctions mesurables $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ telles que :

$$\int_{\mathbb{R}^n} | f(x) |^p \, d\mu(x) < +\infty$$

1. Herné Léon Lebesgue mathématicien Français 1875-1941

Définition 1.1.4. (Espaces L^p)
L'espace $L^p(\mathbb{R}^n)$ est le quotient de $\mathscr{L}^p(\mathbb{R}^n)$ par la relation d'équivalence p.p. On désigne par $L^p(\mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions sur $\mathbb{R}^n$ à valeur dans $\mathbb{R}$. On a :

Théorème 1.1.1. *Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < \infty$ et $\int_{\mathbb{R}^n} \mid f \mid^p$ existe ; on pose :*

$$L^p = \{f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}; f \textit{ mesurable}\}$$

On appelle norme L^p l'application définie par :

$$\parallel f \parallel_p = [\int_{\mathbb{R}^n} \mid f(x) \mid^p dx]^{\frac{1}{p}}$$

dx désigne la mesure de Lebesgue.

Définition 1.1.5. Soit $1 \leq p \leq \infty$; on dit qu'une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ appartient à $L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ si : $f|_K \in L^p(\mathbb{R}^n)$ pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^n$.

Définition 1.1.6. On pose :

$$L^\infty(\mathbb{R}^n) = \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}; f \text{ mesurable et } \exists c :\mid f(x) \mid \leq c \text{ p.p sur } \mathbb{R}^n\}$$

Telle que c constante, et on note :

$$\parallel f \parallel_\infty = \inf\{c :\mid f(x) \mid \leq c \text{ p.p}\}$$

Définition 1.1.7. (Exposant conjugué)
On dit que p, q, $1 \leq p, q \leq \infty$ sont deux exposants conjugués si :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

On peut vérifie que pour $p, q \geq 1$:

$$\begin{cases} p + q = pq \\ p - 1 = \dfrac{p}{q} \end{cases}$$

Théorème 1.1.2. *(Inégalité de Young)*
Soient $a, b \geq 0$ et $1 \leq p, q \leq \infty$ deux exposants conjugués, alors :

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

Démonstration. Si $a = 0$ ou $b = 0$ c'est vérifie, donc on peut supposer que $a, b > 0$:
La fonction exp est convexe, ce qui veut dire que pour tous x, y et pour tout $\lambda \in [0, 1]$ nous avons :

$$e^{(\lambda x+(1-\lambda)y)} \leq \lambda e^x + (1-\lambda)e^y$$

En particulier :

$$\begin{aligned} ab &= e^{(\ln(ab))} \\ &= e^{\ln a+\ln b} \\ &= e^{(\frac{\ln a^p}{p}+\frac{\ln b^q}{q})} \\ &\leq \frac{1}{p}e^{(\ln a^p)} + \frac{1}{q}e^{(\ln b^q)} \\ &= \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \end{aligned}$$

On en déduit que $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ pour tous a, b et qu'on a égalité si et seulement si $b = a^{\frac{p}{q}}$ ou encore, si et seulement si $a^p = b^q$. ∎

Théorème 1.1.3. *(Inégalité de Hölder)*
Soit $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ avec $1 \leq p \leq \infty$ alors : $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et

$$\int_{\mathbb{R}}^{n} \mid fg \mid \leq \parallel f \parallel_p . \parallel g \parallel_q$$

Autrement dit :

$$\parallel fg \parallel_1 = \parallel f \parallel_p . \parallel g \parallel_q$$

Démonstration. Si $p = 1$ et $q = \infty (p = \infty, q = 1$ est similaire) nous avons :

$$\begin{aligned} \parallel fg \parallel_1 &= \int \mid f \mid\mid g \mid dx \\ &\leq \int \mid f \mid\parallel g \parallel_\infty dx \\ &= \parallel g \parallel_\infty \int \mid f \mid dx \\ &= \parallel f \parallel_1 \parallel g \parallel_\infty \end{aligned}$$

Autrement, nous avons $1 < p, q < \infty$ et nous pouvons appliquer l'inégalité de Young. On suppose d'abord que : $\parallel f \parallel_p = \parallel g \parallel_q = 1$:

$$\begin{aligned} \parallel fg \parallel_1 &= \int \mid fg \mid dx \\ &\leq \int (\frac{\mid f \mid^p}{p} + \frac{\mid g \mid^q}{q})dx \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{p}\int \mid f \mid^p dx + \frac{1}{q}\int \mid g \mid^q dx$$
$$= \frac{1}{p} \parallel f \parallel_p^p + \frac{1}{q} \parallel g \parallel_q^q$$
$$= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 = \parallel f \parallel_p \parallel g \parallel_q$$

Traitons maintenant le cas général. Si $\parallel f \parallel_p = 0$ c'est que $f = 0$ d'où $\int \mid fg \mid dx = 0$ et on peut conclure même argument si $\parallel g \parallel_q = 0$ donc on peut supposer que $\parallel f \parallel_p, \parallel g \parallel_q > 0$. Dans le cas, si $\parallel f \parallel_p = \infty$ ou $\parallel g \parallel_q = \infty$ alors : $\parallel f \parallel_p \parallel g \parallel_q = \infty$, et c'est bon aussi. Reste le cas $0 < \parallel f \parallel_p, \parallel g \parallel_q < \infty$. Alors :

$$\parallel \frac{f}{\parallel f \parallel_p} \parallel_p = \frac{\parallel f \parallel_p}{\parallel f \parallel_p} = 1 \ et \ \parallel \frac{g}{\parallel g \parallel_q} \parallel_q = 1$$

et

$$\parallel fg \parallel_1 = \parallel f \parallel_p \parallel g \parallel_q \parallel \frac{f}{\parallel f \parallel_p} \frac{g}{\parallel g \parallel_q} \parallel_1 \leq \parallel f \parallel_p \parallel g \parallel_q .1 = \parallel f \parallel_p \parallel g \parallel_q$$

■

Théorème 1.1.4. *(Inégalité de Young généralisé)*
Soient $p, q, r \in [1, +\infty]$ tels que : $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$. Alors pour $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$, l'intégrale :

$$h(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy$$

converge pour tout x, et $h \in L^r(\mathbb{R}^n)$. De plus,

$$\parallel h \parallel_r \leq \parallel f \parallel_p \parallel g \parallel_q$$

Démonstration.

1. Pour $r = \infty$; on a alors : $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Mais alors l'intégrale $h(x)$ converge pour tout x puisque $f(x - .) \in L^p$ et $g \in L^q$, et d'après l'inégalité de Hölder :

$$\mid h(x) \mid \leq \parallel f(x - .) \parallel_p \parallel g \parallel_q$$

2. Pour $r = 1$; on a alors : $r = p = q = 1$. L'intégrale double :

$$\int\int \mid f(x-y) \mid\mid g(y) \mid dxdy = \parallel f \parallel_1 \parallel g \parallel_1$$

Par conséquent l'intégrale $\int \mid f(x-y) \mid\mid g(y) \mid dy$ converge pour tout x. Par suite l'intégrale définissant h converge absolument pour tout x et

$$\mid h(x) \mid \leq \int \mid f(x-y) \mid\mid g(y) \mid dy$$
$$\int \mid h(x) \mid dx \leq \int\int \mid f(x-y) \mid\mid g(y) \mid dxdy = \parallel f \parallel_1 \parallel g \parallel_1$$

3. Nous supposons maintenant $1 < r < \infty$, et alors p et q sont aussi finis. On écrit :

$$| f(x-y)g(y) |= \varphi_x(y).\psi_x(y)$$

avec

$$\varphi_x(y) =| f(x-y) |^{\frac{p}{r}} | g(y) |^{\frac{q}{r}}$$
$$\psi_x(y) =| f(x-y) |^{\frac{1-p}{r}} | g(y) |^{\frac{1-q}{r}}$$

On remarquera que $p \leq r$ et $q \leq r$ on a :

$$(\varphi_x(y))^r =| f(x-y) |^p | g(y) |^q$$

Puisque $| f |^p$ et $| g |^q$ sont dans $L^1(\mathbb{R}^n)$, d'après le raisonnement du (2) on voit que $\varphi_x \in L^r$ pour tout x et que :

$$\int\int | \varphi_x(y) |^r \, dxdy =\| f \|_p^p \| g \|_q^q \tag{1.1}$$

Montrons que $\psi_x(.)$ est dans $L^{r'}(\mathbb{R}^n)$, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. r' exposant conjugué de r : $\frac{1}{r'} = 1 - \frac{1}{r}$. On a, en effet :

$$(\psi_x(y))^{r'} =| f(x-y) |^{pr'(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})} | g(y) |^{qr'(\frac{1}{q}-\frac{1}{r})}$$

Posons $r'(\frac{1}{p} - \frac{1}{r}) = \frac{1}{s} > 0, r'(\frac{1}{q} - \frac{1}{r}) = \frac{1}{t} > 0$ remarquons alors que :

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{t} = r'(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{2}{r}) = r'(1 - \frac{1}{r}) = 1$$

On est donc dans la situation (1) et on a :

$$\int | \psi_x(y) |^{r'} \, dy \leq (\int | f(x-y) |^p \, dy)^{\frac{1}{s}} (\int | g(y) |^q \, dy)^{\frac{1}{t}}$$

Soit :

$$\int | \psi_x(y) |^{r'} \, dy \leq \| f \|_p^{\frac{p}{s}} \| g \|_q^{\frac{q}{t}} \tag{1.2}$$

D'après $1.1, \varphi_x(.) \in L^r(\mathbb{R}^n)$ pour tout x, donc avec $1.2, \varphi_x(.)\psi_x(.)$, c'est à dire : $| f(x-y)g(y) |$, est intégrable pour tout x. On a aussi :

$$| h(x) |\leq \psi(\int | \varphi_x(y) |^r \, dy)^{\frac{1}{r}} (\int | \psi_x(y) |^{r'} \, dy)^{\frac{1}{r'}}$$

et

$$\int | h(x) |^r \, dx \leq \int\int | \varphi_x(y) |^r \, dy \, \| f \|_p^{\frac{pr}{sr'}} \| g \|_q^{\frac{qr}{tr'}}$$

Ou enfin :

$$\| h \|_r \leq \| f \|_p^{p(\frac{1}{r}+\frac{1}{sr'})} \| g \|_q^{q(\frac{1}{r}+\frac{1}{tr'})}$$

On conclut en vérifiant que : $p(\frac{1}{r} + \frac{1}{sr'}) = 1$ et que $q(\frac{1}{r} + \frac{1}{tr'}) = 1$.

■

Proposition 1.1.1. *Pour $p = q = 2$, on retrouve l'inégalité de Cauchy-Schwarz.*

Théorème 1.1.5. *(Inégalité de Minkowski)*
Pour f, g mesurables :

$$\| f + g \|_p \leq \| f \|_p + \| g \|_p \tag{1.3}$$

Démonstration. Les cas $p = 1$ ou $p = \infty$ sont vérifie. On peux donc supposer que $1 < p < \infty$: Si $\| f \|_p = \infty$ ou $\| g \|_p = \infty$ alors $\| f \|_p + \| g \|_p = \infty$
Si $\| f + g \|_p = 0$, il n'y a rien à démontrer
On peut supposer donc que $0 < \| f + g \|_p$ et $\| f \|_p, \| g \|_\infty < \infty$
Démontrons d'abord que $0 < \| f + g \|_p < \infty$. En effet, pour tous $a, b \leq 0$ nous avons $(a + b)^p \leq (2a)^p + (2b)^p$, si bien que :

$$\| f + g \|_p^p = \int | f + g |^p \, dx \leq \int (| f | + | g |)^p dx$$

$$\leq \int [(2 | f |)^p + (2 | g |)^p] dx$$

$$= 2^p \| f \|_p^p + 2^p \| g \|_p^p < \infty$$

On multipliant 1.3 par $\| f + g \|_p^{p-1}$, il suffirait donc de démontrer que :

$$\| f + g \|_p^p \leq (\| f \|_p + \| g \|_p) \| f + g \|_p^{p-1}$$

Or, par Hölder :

$$\| f + g \|_p^p = \int | f + g |^p \, dx \leq \int (| f | + | g |) \, | f + g |^{p-1} \, dx$$

$$= \| | f | \, | f + g |^{p-1} \| + \| | g | \, | f + g |^{p-1} \|$$

$$\leq \| f \|_p \| | f + g |^{p-1} \|_q + \| g \|_p \| | f + g |^{p-1} \|_q$$

$$= (\| f \|_p + \| g \|_p) \, \| | f + g |^{p-1} \|_q$$

On divise sur : $\| | f + g |^{p-1} \|_q$ on a :

$$\| f + g \|_p^p \leq \| f \|_p + \| g \|_p$$

■

Théorème 1.1.6. *On a les propriétés suivantes :*

1. *$L^p(\mathbb{R}^n)$ est un espace vectoriel et $\| \, . \, \|_{L^p}$ est une norme pour tout $1 \leq p \leq \infty$.*
2. *$L^p(\mathbb{R}^n)$ est un espace de Banach pour tout $1 \leq p \leq \infty$.*

3. *L'espace $\mathscr{C}_K(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ pour $1 \leq p < \infty$.*
4. *L'espace $\mathscr{C}_K^\infty(\mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions infiniment dérivable à support compact est dense dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ pour $1 \leq p < \infty$.*
5. *$L^p(\mathbb{R}^n)$ est séparable pour tout $1 \leq p < \infty$.*
6. *Soit $1 < p < \infty$, soit $\phi \in (L^p)'$. Alors :*

$$\exists ! u \in L^q :< \phi, f >= \int_{\mathbb{R}^n} uf, \forall f \in L^p$$

7. *$L^p(\mathbb{R}^n)$ est réflexif pour $1 < p < \infty$.*

Démonstration. On revoie au [8] ■

Remarque 1.1.1. L'application :

$$f \in L^2; g \in L^2 \longrightarrow < f, g >_2 = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{g(x)}dx$$

est un produit scalaire. Muni de ce produit scalaire, $L^2(\mathbb{R}^n)$ est un espace de Hilbert.
La norme induite est :

$$\| f \|_2 = \sqrt{< f, f >_2} = \sqrt{\int_{\mathbb{R}^n} | f(x) |^2 \, dx}$$

Définition 1.1.8. (Support d'une fonction)
Soit $f : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction continue. On appelle support de f l'ensemble :

$$supp(f) = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}}$$

Si $supp(f)$ est compact, on dit que f est à support compact. Où $\overline{A}$ désigne l'adhérence d'un ensemble A.

Exemple 1.1.1. Soit la fonction d'Heaviside :

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ si } x \geq 0 \\ 0, \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

Alors : $suppH = [0, +\infty[$

Définition 1.1.9. (L'espace $\mathscr{C}_K(\mathbb{R}^n)$)
On désigne par $\mathscr{C}_K(\mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{R}^n$ à support compact autrement dit :

$$\mathscr{C}_K(\mathbb{R}^n) = \{f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}^n), supp(f) \subset K, K \text{ compact de } \mathbb{R}^n\}$$

Définition 1.1.10. (Produit de convolution)

Soit f et g deux fonctions sommable, le produit de convolution, notée $f * g$, est défini par :

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy$$

Proposition 1.1.2. *Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Alors :*

1. *$supp(f * g) \subset \overline{supp(f) + supp(g)}$*
2. *$\| f * g \|_p \leq \| f \|_1 \| g \|_p$*

Démonstration. On revoie au [8] ∎

Remarque 1.1.2. Si f et g sont à support compact, alors $f * g$ est à support compact. [2].

Définition 1.1.11. (Espace des fonctions test)

On appelle espace des fonctions test et on note $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble :

$$\mathscr{D}(\mathbb{R}^n) = \{f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n; f \in \mathscr{C}_K^\infty(\mathbb{R}^n)\}$$

Telle que : $\mathscr{C}_K^\infty(\mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions infiniment dérivable à support compact.

Définition 1.1.12. (Espace des distributions)

Une distribution sur $\mathbb{R}^n$ est une forme linéaire continue : $\varphi : \mathscr{D}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C}$ on note $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ l'espace vectoriel des distributions sur $\mathbb{R}^n$.

Exemple 1.1.2. (La distribution de Dirac)

δ_a où a est un réel quelconque, est définie de la façon suivante : pour toute fonction test $f \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n) :< \delta_a, f >= f(a)$

Définition 1.1.13. (Distribution régulière)

Soit f un élément de $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, La distribution :

$$[f] : \mathscr{D}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}, u \longrightarrow < f, u >= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)u(x)dx$$

est appelée distribution régulière associe à la fonction f.

Définition 1.1.14. (Dérivation des distributions)

Soit φ un élément de $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^n$, on appelle ordre de α et on note $| \alpha |$ connu par la longueur de α :

$$| \alpha |= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$$

2. Cependant, si l'un des supports seulement est compact, alors $f * g$ n'est pas en général à support compact

.

La dérivée d'ordre $\mid \alpha \mid$ de φ est l'application notée $D^{\alpha}\varphi = \frac{\partial^{|\alpha|}\varphi}{\partial x_1^{\alpha_1}...\partial x_n^{\alpha_n}}$ tel que :

$$D^{\alpha}\varphi : \mathscr{D}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R},$$

$$u \longrightarrow D^{\alpha}\varphi(u) = (-1)^{|\alpha|} < \varphi, D^{\alpha}u >$$

Exemple 1.1.3. On considère la distribution de Heaviside φ_h. On a pour toute fonction φ appartenant à $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$:

$$< \varphi_h', \varphi >= - < \varphi_h, \varphi' >= - \int_0^{+\infty} \varphi'(x)dx = \varphi(0) =< \delta, \varphi >$$

Donc la dérivée de φ_h est la distribution de Dirac.

Proposition 1.1.3. *(Formule de Leibniz)*
Soit $k \geq 1$ et $u, v \in \mathscr{C}^k(\mathbb{R}^n)$, alors pour $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tel que $\mid \alpha \mid\leq k$ on a :

$$\partial^{\alpha}(uv) = \sum_{\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^{\beta}u\partial^{\alpha-\beta}v$$

1.2 la transformation de Fourier

1.2.1 Transformation de Fourier sur L^1

Définition 1.2.1. Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. On appelle transformée de fourier de f la fonction, notée $\widehat{f}$ ou $\mathscr{F}(f)$ définie pour $\xi \in \mathbb{R}^n$ par :

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} f(x)dx \tag{1.4}$$

En notant $x.\xi$ le produit scalaire de $\mathbb{R}^n$. La fonction $\widehat{f}$ est continue, tend vers 0 à l'infini.

Lemme 1.2.1. *Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Alors : $\widehat{f} \in \mathscr{C}(\mathbb{R}^n)$ avec $\| \widehat{f} \|_{\infty}\leq\| f \|_1$*

Théorème 1.2.1. *(Transformation de Fourier et dérivation)*
Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$:

1. *Si $xf \in L^1(\mathbb{R}^n)$, alors : $\widehat{f} \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^n)$ et on a :*

$$\frac{d\widehat{f}(\xi)}{d\xi} = -i \int_{\mathbb{R}^n} xe^{-i\xi x} f(x)dx = -i\widehat{xf}(\xi)$$

2. *Si $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^n)$ et si $\frac{df(\xi)}{dx} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, alors :*

$$\frac{\widehat{df}(\xi)}{dx} = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi x}\frac{df(x)}{dx}dx = i\xi\widehat{f}(\xi)$$

Exemple 1.2.1. (Fonction Gaussienne)

Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ telle que $f(x) = e^{-ax^2}$ la transformation de Fourier de f est :

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ax^2} e^{-ix\xi} dx = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-(ix\xi + ax^2)} dx$$

On a :

$$\begin{aligned} a(x^2 + \frac{ix\xi}{a}) &= a[x^2 + \frac{ix\xi}{a} + (\frac{i\xi}{2a})^2 - (\frac{i\xi}{2a})^2] \\ &= a[(x + \frac{i\xi}{2a})^2 + \frac{\xi^2}{4a}] \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-a(x+\frac{i\xi}{2a})^2} e^{\frac{-\xi^2}{4a}} dx \\ &= e^{\frac{-\xi^2}{4a}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-a(x+\frac{i\xi}{2a})^2} dx \end{aligned}$$

On pose : $z^2 = a(x + \frac{i\xi}{2a})^2$ et $dz = \sqrt{a}dx$ on calcul l'intégrale $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-z^2} dz$:

$$\begin{aligned} (\int_{\mathbb{R}^n} e^{-z^2} dz)^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-x^2} dx \int_{\mathbb{R}^n} e^{-y^2} dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \end{aligned}$$

On pose : $r^2 = x^2 + y^2$ et $dxdy = rdrd\theta$ on obtient :

$$\begin{aligned} (\int_{\mathbb{R}^n} e^{-z^2} dz)^2 &= \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} r e^{-r^2} dr d\theta \\ &= \int_0^{+\infty} r e^{-r^2} dr \int_0^{2\pi} d\theta \\ &= 2\pi \int_0^{+\infty} r e^{-r^2} dr = 2\pi (\frac{-1}{2} e^{-r^2} |_0^{+\infty}) = \pi \end{aligned}$$

Donc : $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-z^2} dz = \sqrt{\pi}$ et on a :

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\xi) &= e^{\frac{-\xi^2}{4a}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-z^2}}{\sqrt{a}} dz \\ &= \frac{e^{\frac{-\xi^2}{4a}}}{\sqrt{a}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-z^2} dz = \frac{e^{\frac{-\xi^2}{4a}}}{\sqrt{a}} \sqrt{\pi} \end{aligned}$$

D'où :

$$\widehat{f}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{-\xi^2}{4a}}$$

Théorème 1.2.2. *Si $u, v \in L^1(\mathbb{R}^n)$ alors :*

$$\mathscr{F}(u * v) = \mathscr{F}(u)\mathscr{F}(v)$$

Définition 1.2.2. (La transformée de Fourier inverse)

Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. On appelle transformée de Fourier inverse de f la fonction :

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi} \widehat{f}(\xi) d\xi$$

1.2.2 L'espace $\mathscr{S}$ de Schwartz

Définition 1.2.3. On appelle $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions $\mathscr{C}^\infty$ à décroissance rapide à l'infini. C'est-à-dire :

$$\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) = \{\varphi \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n) : \lim_{|x| \longrightarrow +\infty} x^\alpha \partial^\beta \varphi(x) = 0, \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n\}$$

On munit $\mathscr{S}$ la famille de semi norme suivante :

$$N_p(\varphi) = \sum_{|\alpha| \leq p, |\beta| \leq p} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \mid x^\alpha \partial^\beta \varphi(x) \mid, \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n \tag{1.5}$$

Proposition 1.2.1. *L'espace $\mathscr{S}$ est stable par dérivation et multiplication par des polynômes. Les éléments de $\mathscr{S}$ sont des fonctions sommables tendant vers 0 à l'infini, et il existe des constantes C_p telles que :*

$$\forall \varphi \in \mathscr{S}, \sum_{|\alpha| \leq p, |\beta| \leq p} \| x^\alpha \partial^\beta \varphi(x) \|_1 \leq C_p N_{p+n+1}(\varphi) \tag{1.6}$$

Théorème 1.2.3.

1. *La transformation de Fourier applique l'espace $\mathscr{S}$ dans lui-même, et il existe des constantes C_p telles que :*

$$N_p(\widehat{\varphi}) \leq C_p N_{p+n+1}(\varphi) \tag{1.7}$$

2. *La transformation de Fourier $\mathscr{F}$ est un isomorphisme de $\mathscr{S}$ sur lui-même, d'inverse $\varphi = \bar{\mathscr{F}}(\widehat{\varphi})$*

Théorème 1.2.4. *Soit $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Il existe alors une suite φ_j d'éléments de $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ dense dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$:*

$$\lim_{j \longrightarrow \infty} N_p(\varphi - \varphi_j) = 0$$

Démonstration. Soit $\psi \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que $\psi(x) = 1$ si x appartient à la boule de centre 0 et de rayon 1 de $\mathbb{R}^n$. Posons $\varphi_j(x) = \varphi(x)\psi(\frac{x}{j})$. Ces fonctions sont à support compacts, et coïncident avec φ sur la boule de rayon j. D'après la formule de Leibniz, pour tout $\beta \in \mathbb{N}^n$ on a :

$$\partial^\beta(\varphi - \varphi_j)(x) = \partial^\beta \varphi(x)(1 - \psi(\frac{x}{j})) - \sum_{1 \leq |\gamma| \leq |\beta|} \binom{\beta}{\gamma} \frac{1}{j^{|\gamma|}} \partial^{\beta-\gamma}\varphi(x) \partial^\gamma \psi(\frac{x}{j})$$

En multipliant par x^α la relation précédente, et en prenant les bornes supérieures, on en déduit :

$$\| x^\alpha \partial^\beta (x - \varphi_j) \|_{L^\infty} \leq \max_{|x| \geq j} \mid x^\alpha \partial^\beta \varphi(x) \mid + \frac{c}{j} \sum_{\gamma \leq \beta} \| x^\alpha \partial^{\beta-\gamma} \varphi \|_{L^\infty}$$

Le premier terme tend vers 0 pour $j \longrightarrow \infty$, la fonction $x^\alpha \partial^\beta \varphi$ tendant vers 0 à l'infini, et le second terme contient $\frac{1}{j}$ en facteur d'une quantité finie. L'expression $N_p(\varphi - \varphi_j)$ est ainsi une somme finie de quantités tendant vers 0, d'où le résultat. ■

1.2.3 L'espace $\mathscr{S}'$ des distributions tempérées

Définition 1.2.4. Soit $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. On dit que u est une distribution tempérée, s'il existe $p \in \mathbb{N}$ et $C \geq 0$ tels que :

$$\forall \varphi \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n), |< u, \varphi >| \leq C N_p(\varphi) \tag{1.8}$$

Et on note $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ l'espace des distributions tempérées.

Définition 1.2.5. (Convergence dans $\mathscr{S}'$) On dit que la suite u_j d'éléments de $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ converge vers u dans $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, si on a :

$$\forall \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n), \lim_{j \longrightarrow \infty} < u_j, \varphi > = < u, \varphi >$$

Définition 1.2.6. (Espace $\mathscr{O}_M$)
On dit qu'une fonction f est à croissance lente ainsi que toutes ses dérivées ce qu'on note $f \in \mathscr{O}_M(\mathbb{R}^n)$, si $f \in \mathscr{C}^\infty$, et si $\forall \beta \in \mathbb{N}^n$, il existe c_β et m_β tels que :

$$| \partial^\beta f(x) | \leq c_\beta (1 + | x |)^{m_\beta} \ , \ \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Et on note $\mathscr{O}_M$ l'espace des fonctions à croissance lente.

1.2.4 Transformation de Fourier des distributions tempérées

Définition 1.2.7. Soit $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. La transformée de Fourier de u est la distribution tempérée notée $\widehat{u}$ ou $\mathscr{F}u$ définie par :

$$\forall \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n), < \widehat{u}, \varphi > = < u, \widehat{\varphi} >$$

Théorème 1.2.5. *La transformation de Fourier est un isomorphisme de $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ sur lui-même, d'inverse $\varphi = \bar{\mathscr{F}}(\widehat{\varphi})$.*

Théorème 1.2.6. *(Continuité)*
Si $u_j \longrightarrow u$ dans $\mathscr{S}'$, alors $\widehat{u}_j \longrightarrow \widehat{u}$ dans $\mathscr{S}'$.

Proposition 1.2.2. — *Translation :*

On a : $\mathscr{F}(\tau_a u) = e^{-ia\xi} \mathscr{F}u$ par inversion de Fourier, on a : $\forall \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, on a :

$$< \mathscr{F}(e^{iax}u), \varphi > = < e^{iax}u, e^{-ia\xi}\varphi >$$

$$= < u, e^{iax}\widehat{\varphi} >$$

$$=< u, \mathscr{F}(\tau_{-a}\varphi) >$$

$$=< \tau_a \widehat{u}, \varphi >$$

On en déduit :

$$\mathscr{F}(e^{iax}u) = \tau_a \widehat{u}$$

— *Dilatation :*

Soit $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$*, et soit* $a \neq 0$ *est une constante réelle. On définit*

$$u_a(x) = u(\frac{x}{a})$$

Alors, on a par un changement de variable $y = \frac{x}{a}$ *on a :*

$$\widehat{u}_a(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} u(\frac{x}{a})e^{-ix\xi}dx = a^n \int_{\mathbb{R}^n} u(y)e^{-iay\xi}dy = a^n \widehat{u}(a\xi)$$

1.2.5 Transformation de Fourier dans $\mathscr{E}'$

Définition 1.2.8. On appelle $\mathscr{E}'$ l'ensemble des distributions à support compact telle que :

$$\mathscr{E}'(\mathbb{R}^n) = \{\varphi \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n) / \ supp(\varphi) \text{ compact dans } \mathbb{R}^n\}$$

Théorème 1.2.7. *Si* $u \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$*, sa transformée de Fourier appartient à* $\mathscr{O}_M$ *(fonctions* C^∞ *à croissance lente ainsi que toutes leurs dérivées), et on a :*

$$\widehat{u}(\xi) =< u(x), e^{-ix\xi} > \tag{1.9}$$

Démonstration. Posons $v(\xi) =< u(x), e^{-ix\xi} >$. D'après le théorème de dérivation sous le crochet, on a $v(\xi)$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$, et on a :

$$\partial_\xi^\alpha v(\xi) =< u(x), (-ix)^\alpha e^{-ix\xi} >$$

Il existe donc $p \in \mathbb{N}, c \geq 0$ et K compact de $\mathbb{R}^n$ tels que, on a d'après 1.8 :

$$\mid \partial^\alpha v(\xi) \mid \leq C \sum_{|\beta| \leq p} \sup_{x \in K}, \mid \partial_x^\beta (x^\alpha e^{-ix\xi}) \mid \leq C'(1+ \mid \xi \mid)^p$$

Ce qui prouve que $v \in \mathscr{O}_M$. Il reste à prouver que $v = \widehat{u}$. Pour $\varphi \in \mathscr{C}_0^\infty$, on peut écrire

$$< v, \varphi >= \int < u(x), e^{-ix\xi}\varphi(\xi) > d\xi$$

Par conséquent on a également :

$$< v, \varphi >=< u, \widehat{\varphi} >=< \widehat{u}, \varphi >$$

On en déduit que $\widehat{u} = v$ sur $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$. ∎

1.2.6 Transformation de Fourier dans L^2

Les fonctions de carrée sommable ne sont pas en général sommables, et on ne peut pas définir leur transformée de Fourier par la formule intégrale 1.4 par contre ce sont des distributions tempérées, et on peut donc définir leur transformées de Fourier qui appartiennent à $\mathscr{S}'$.

Théorème 1.2.8. *L'application $u \longrightarrow \mathscr{F}u$ est une isométrie de $L^2(\mathbb{R}^n)$ sur lui-même, d'inverse $\overline{\mathscr{F}}$.*

Démonstration. Montrons d'abord que $\mathscr{F}$ est une isométrie de $\mathscr{S}$ sur lui-même lorsque celui ci est muni de la norme de L^2. Soient f et g appartenant à $\mathscr{S}$, et posons $h = \overline{\widehat{g}}$. On a : $\int f(x)\widehat{h}(x)dx = \int \widehat{f}(x)h(x)dx$ d'après 1.2.7. En remarquant que :

$$\mathscr{F}h = \mathscr{F}\overline{\widehat{g}} = \overline{\mathscr{F}}\widehat{g} = \overline{g}$$

On obtient immédiatement :

$$\int f(x)\overline{g(x)}dx = \int \widehat{f(x)}\overline{\widehat{g(x)}}dx$$

Ce qui montre que $\mathscr{F}$ conserve le produit scalaire, et donc la norme L^2 pour les éléments de $\mathscr{S}$. $\mathscr{S}$ contient $\mathscr{C}_0^\infty$, est dense dans L^2. soit $u \in L^2$, et soit f_j une suite d'éléments de $\mathscr{S}$ telle que $\| u - f_j \|_2$ tend vers 0. La suite f_j est donc de Cauchy et par isométrie, $\| \widehat{f}_j - \widehat{f}_k \|_2$ tend vers 0 lorsque j et k tendent vers l'infini. La suite de Cauchy $\widehat{f}_j$ converge donc vers un élément $g \in L^2$. La convergence dans L^2 impliquant la convergence dans $\mathscr{S}'$, on obtient d'une part que $\widehat{f}_j \longrightarrow g$ dans $\mathscr{S}'$, d'autre part que $f_j \longrightarrow u$ et donc (continuité de $\mathscr{F}$) que $\widehat{f}_j \longrightarrow \widehat{u}$ dans $\mathscr{S}'$. On a donc $\widehat{u} = g \in L^2$ pour un élément quelconque u de L^2. En outre, à partir de $\| \widehat{f}_j \|_2 = \| f_j \|_2$, et par continuité de la norme, on a :

$$\| \widehat{u} \|_2 = \| u \|_2$$

Ce qui procède s'applique également à $\overline{\widehat{F}}$. Nous avons donc isométrie de L^2dans lui-même dont les composées à droite et à gauche sont égales à l'identité. ■

Définition 1.2.9. [Transformation de Fourier partielle dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^{n+1})$)
Soit $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{n+1})$. On définit sa transformée de Fourier partielle, notée $\mathscr{F}_x\varphi$ ou $\widehat{\varphi}$. Définie par :

$$\widehat{\varphi}(t,\xi) = \int e^{-ix\xi}\varphi(t,x)dx$$

L'opérateur $\mathscr{F}_x$ applique bijectivement $S(\mathbb{R}^{n+1})$ dans lui-même, et son inverse est $\overline{\widehat{F}}_x$

Définition 1.2.10. [Transformation de Fourier partielle dans $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^{n+1})$)
Soit $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^{n+1})$. On définit sa transformée de Fourier partielle, notée $\mathscr{F}_x u$ ou $\widehat{u}$. Définie par :

$$\forall\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{n+1}), < \widehat{u}, \varphi > = < u, \widehat{\varphi} >$$

L'opérateur $\mathscr{F}_x$ est un isomorphisme de $S'(\mathbb{R}^{n+1})$ sur lui-même, et son inverse est $\overline{\widehat{F}}_x$. En outre, si $u_j \longrightarrow u$ dans $\mathscr{S}'$, on a $\widehat{u}_j \longrightarrow \widehat{u}$ dans $\mathscr{S}'$.

Chapitre 2

la décomposition de Littlewood-Paley

Dans ce chapitre on suit essentiellement, les résultats de [3, 17, 18]
Ce chapitre est une introduction à la décomposition de Littlewood-Paley, en particulier on s'intéresse la caractérisation des espaces fonctionnelles : espace de Sobolev, Hölder, Besov. Quelques résultats sont présenter en omettons les détailles.

2.1 Découpage dyadique

L'idée de base de la décomposition de Littlewood-Paley est d'écrire une fonction donnée f comme somme des fonctions élémentaires f_n telles que chaque f_n soit localisée en fréquence sur une couronne dyadique de taille $\sim 2^q$. Cette décomposition nous permet de caractérisé les espaces fonctionnelles en terme des suites élémentaires $\triangle_q u$.

Lemme 2.1.1. *(Inégalités de Bernstein)*
Soit (r_1, r_2) un couple de réels strictement positifs tels que $r_1 < r_2$. Il existe une constante c telle que, pour tout entier k, tout couple de réels (p, q) tel que $q \geq p \geq 1$ et toute fonction u de L^p, on ait :

$$supp\ \widehat{u} \subset B(0, r_1\lambda) \Rightarrow \sup_{|\alpha|=k} \| \partial^\alpha u \|_q \leq c^k \lambda^{k+n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \| u \|_p$$

$$supp\ \widehat{u} \subset C(0, r_1\lambda, r_2\lambda) \Rightarrow c^{-k}\lambda^k \| u \|_p \leq \sup_{|\alpha|=k} \| \partial^\alpha u \|_p \leq c^k \lambda^k \| u \|_p$$

Démonstration. On revoie au [17] ∎

Proposition 2.1.1. *Étant donné une couronne C de centre 0, de petit rayon $\frac{3}{4}$ et de grand rayon $\frac{8}{3}$. Ils existent deux fonctions χ et φ appartenant respectivement à $\mathscr{D}(B(0, \frac{4}{3}))$ et à $\mathscr{D}(C)$ telles que :*

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \chi(\xi) + \sum_{q\geq 0} \varphi(2^{-q}\xi) = 1 \tag{2.1}$$

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^n - \{0\}, \quad \sum_{q\in\mathbb{Z}} \varphi(2^{-q}\xi) = 1 \tag{2.2}$$

$$\mid q-p \mid \geq 2 \Rightarrow supp\ \varphi(2^{-q}) \cap supp\ \varphi(2^{-p}) = \phi \tag{2.3}$$

$$q \geq 1 \Rightarrow supp\ \chi \cap supp\ \varphi(2^{-q}) = \phi \tag{2.4}$$

Si $\tilde{C} = B(0, \frac{2}{3}) + C$*, alors* $\tilde{C}$ *est une couronne et nous avons :*

$$\mid q-p \mid \geq 5 \Rightarrow 2^p\tilde{C} \cap 2^q C = \phi \tag{2.5}$$

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \frac{1}{2} \leq \chi^2(\xi) + \sum_{q\geq 0} \varphi^2(2^{-q}\xi) \leq 1 \tag{2.6}$$

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^n - \{0\}, \quad \frac{1}{2} \leq \sum_{q\in\mathbb{Z}} \varphi^2(2^{-q}\xi) = 1 \tag{2.7}$$

Démonstration. Soit α un réel tel que : $1 < \alpha < \frac{4}{3}$ et soit C' un couronne de centre 0 et de petit rayon $\frac{1}{\alpha} > \frac{3}{4}$ et de grand rayon $2\alpha < \frac{8}{3}$. Noter que $C' \subset C$, on définit la fonction $\theta(s)$ tel que : $0 \leq \theta(s) \leq 1$, et de classe $\mathscr{C}^\infty(C)$ valant 1 sur C'. Le point important est le suivant. Pour tout couple de nombres entiers (p,q) nous avons :

$$\mid q-p \mid \geq 2 \Rightarrow 2^q C \cap 2^p C = \phi \tag{2.8}$$

En effet supposons que $2^pC \cap 2^qC \neq \phi$ et que $p \leq q$. Il en résulte que $2^p \times \frac{3}{4} \leq 2^q \times \frac{8}{3}$, ce qui implique $p - q \leq 1$. Posons maintenant :

$$S(\xi) = \sum_{q\in\mathbb{Z}} \theta(2^{-q}\xi) \tag{2.9}$$

D'après (2.8), cette somme est localement finie sur $\mathbb{R}^n - \{0\}$. La fonction S est donc de classe $C^\infty(\mathbb{R}^n - \{0\})$. Le réel α étant strictement supérieur à 1,

$$\cup_{q\in\mathbb{Z}} 2^q C' = \mathbb{R}^n - \{0\}$$

Comme la fonction θ est positive et a vaut 1 prés de C' , il résulte de (2.9) que la fonction S strictement positif. On pose alors :

$$\varphi = \frac{\theta}{S} \tag{2.10}$$

Vérifions que φ convient. C'est évident que $\varphi \in \mathscr{D}(C)$. La fonction $1 - \sum_{q\geq 0} \varphi(2^{-q}\xi)$est lisse, d'après 2.8, de classe $\mathscr{C}^\infty$. Or, vu le support de φ, on a :

$$\mid \xi \mid \geq \frac{4}{3} \Rightarrow \sum_{q\geq 0} \varphi(2^{-q}\xi) = 1 \tag{2.11}$$

D'où les identités (2.1) et (2.3) découle du fait que $supp\ \varphi = supp\ \theta \subset C$ et (2.8) en posant :

$$\chi(\xi) = 1 - \sum_{q\geq 0} \varphi(2^{-q}\xi) \tag{2.12}$$

Les identités (2.2) et (2.4) sont des conséquence évidente de (2.8) et de (2.11).

Démontrons maintenant l'identité (2.5). La couronne $\tilde{C}$ est une couronne de centre 0, de petit rayon $\frac{1}{12}$ et de grand rayon $\frac{10}{3}$. Alors, il vient :

$$2^p\tilde{C} \cap 2^qC \neq \phi \Rightarrow (\frac{3}{4} \times 2^q \leq 2^p \times \frac{10}{3} \quad ou \quad \frac{1}{12}2^p \leq 2^q\frac{8}{3})$$

D'où la relation 2.5.

Démontrons maintenant les inégalités 2.6. Comme χ et φ prennent leurs valeurs dans l'intervalle $[0,1]$, il est clair que :

$$\chi^2(\xi) + \sum_{q\geq 0} \varphi^2(2^{-q}\xi) \leq 1 \tag{2.13}$$

Minorons les sommes des carrés. On a :

$$(\sum_0(\xi) + \sum_1(\xi))^2 = 1$$

avec

$$\sum_0(\xi) = \sum_{q \text{ pair}} \varphi(2^{-q}\xi) \quad \text{et} \quad \sum_1(\xi) = \chi(\xi) + \sum_{q \text{ impair}} \varphi(2^{-q}\xi)$$

Il en résulte que $1 \leq 2(\sum_0^2(\xi) + \sum_1^2(\xi))$. Or, d'après 2.8, nous obtenons :

$$\sum_0^2(\xi) = \sum_{q \text{ pair}} \varphi^2(2^{-q}\xi) \text{ et } \sum_1^2(\xi) = \chi^2(\xi) + \sum_{q \text{ impair}} \varphi^2(2^{-q}\xi)$$

D'où la proposition. ∎

-Notations : Posons : $h = \overline{\mathscr{F}}\varphi$ et $\tilde{h} = \overline{\mathscr{F}}\chi$. On définit alors :

$$\triangle_q u = 0 \text{ si } q \leq -2 \text{ et } \triangle_{-1} u = \chi(D)u = \tilde{h} * u$$

$$\text{si } q \geq 0 : \triangle_q u = \varphi(2^{-q}D)u = 2^{qn}\int h(2^q y)u(x-y)dy$$

$$S_q u = \sum_{p\leq q-1} \triangle_p u$$

On a :

$$\begin{aligned}\chi(2\xi) - \chi(\xi) &= 1 - \sum_{q\geq 0}\varphi(2^{-q+1}\xi) - 1 + \sum_{q\geq 0}\varphi(2^{-q}\xi)\\ &= -\varphi(2\xi)\end{aligned}$$

donc,

$$\varphi(\xi) = \chi(\frac{\xi}{2}) - \chi(\xi)$$

Pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$. En conséquence : si $q \geq 0$

$$S_q u(x) = \chi(2^{-q}D)u(x) = 2^{qn} \int \tilde{h}(2^q y)u(x-y)dy$$

et on a :

$$\sum_q \triangle_q = Id$$

Définition 2.1.1. On définit la décomposition de Littlewood-Paley on considérant la fonction $\phi \in \mathscr{S}$ telle que :

$$supp(\widehat{\phi}) \subset B(0, \frac{2}{3})$$
$$S_q =^{déf} \widehat{\phi}(2^{-q}D)$$

Dans S' on a alors, pour $\xi \neq 0$,

$$\widehat{\phi}(2^{-q}\xi) = \sum_{k \leq q-2} \widehat{\psi}(2^{-q}\xi)$$

C'est à dire :

$$S_q f = \sum_{k \leq q-2} \Delta_k f$$

La décomposition de Littlewood-Paley de u définie par :

$$S_0 u + \sum_{q \geq -1} \Delta_q u = u$$

2.2 Caractérisation des espaces fonctionnelles

2.2.1 L'espace de Sobolev

Définition 2.2.1. Soit $s \in \mathbb{R}^n$, on note $H^s(\mathbb{R}^n)$ l'espace des distributions u de $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, telles que :

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1+ \mid \xi \mid^2)^s \mid \widehat{u}(\xi) \mid^2 d\xi < \infty$$

Pour u et v dans $H^s(\mathbb{R}^n)$, on pose :

$$(u,v)_{H^s} = \int_{\mathbb{R}^n} (1+ \mid \xi \mid^2)^s \widehat{u}(\xi)\overline{\widehat{v}(\xi)} d\xi \tag{2.14}$$

On vérifie facilement que $(.,.)_{H^s}$ est un produit scalaire sur $H^s(\mathbb{R}^n)$. On désigne par $\parallel . \parallel_{H^s}$ la norme associée, c'est-à-dire :

$$\parallel u \parallel_{H^s} = (\int_{\mathbb{R}^n} (1+ \mid \xi \mid^2)^s \mid \widehat{u}(\xi) \mid^2 d\xi)^{\frac{1}{2}}, u \in H^s(\mathbb{R}^n) \tag{2.15}$$

Proposition 2.2.1. *Il existe une constante c telle que l'on ait, pour tout réel s,*

$$\frac{1}{c^{|s|+1}} \parallel u \parallel_{H^s}^2 \leq \sum_q 2^{2qs} \parallel \triangle_q u \parallel_2^2 \leq c^{|s|+1} \parallel u \parallel_{H^s}^2$$

Dans toute la suite, on notera :

$$| u |_s = (\sum_q 2^{2qs} \parallel \triangle_q u \parallel_2^2)^{\frac{1}{2}}$$

Proposition 2.2.2. *Soit $\tilde{C}$ une couronne. Il existe une constante c telle que l'on ait, pour tout réel s la propriété suivante : soit $(u_q)_{q\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ telle que supp $\hat{u}_q \subset 2^q\tilde{C}$.*
Si la série $(2^{qs} \parallel u_q \parallel_2)_{q\in\mathbb{N}}$ est de carré sommable, alors :

$$u = \sum_q u_q \in H^s \ et \ \ | u |_s^2 \leq c^{2|s|+2} \sum_q 2^{2qs} \parallel u_q \parallel_2^2$$

Soit B une boule de centre 0. Il existe une constante c telle que l'on ait pour tout $s > 0$ la propriété suivante : soit $(u_q)_{q\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ telle que supp $\hat{u}_q \subset 2^q B$. Si la série $(2^{qs} \parallel u_q \parallel_2)_{q\in\mathbb{N}}$ est de carré sommable alors :

$$u \in H^s \ et \ \ | u |_s^2 \leq \frac{c^{2s+2}}{s^2} \sum_q 2^{2qs} \parallel u_q \parallel_2^2$$

Démonstration. Il existe un entier N tel que l'on ait :

$$| p - q | > N \Longrightarrow 2^p\tilde{C} \cap 2^q C = \phi$$

D'où il vient que :

$$\triangle_q u = \sum_{|p-q|\leq N} \triangle_q u_p$$

On applique l'inégalité triangulaire dans $\triangle_q u = \sum_{|p-q|\leq N} \triangle_q u_p$ on a :

$$\sum_{|p-q|\leq N} \parallel \triangle_q u_p \parallel_2 \leq (\sum_{|p-q|\leq N} \parallel \triangle_q \parallel_2) \sum_{|p-q|\leq N} \parallel u_p \parallel_2$$

assurent que :

$$\parallel \triangle_q u \parallel_2 \leq \sum_{|p-q|\leq N} \parallel u_p \parallel_2$$

Car : $\sum_{|p-q|\leq N} \parallel \triangle_q \parallel_2 = 1$. En multipliant les deux membre par 2^{qs} et en sommant suivant q on obtient :

$$\sum_{q\geq 0} 2^{2qs} \parallel \triangle_q u \parallel_2^2 \leq \sum_{|p-q|\leq N} 2^{2qs} \parallel u_p \parallel_2^2$$

$$\leq \sum_{|p-q|\leq N} 2^{2qs+2ps-2ps} \parallel u_p \parallel_2^2$$

$$\leq \sum_{|p-q|\leq N} 2^{2(q-p)s} 2^{2ps} \parallel u_p \parallel_2^2$$

$$\leq (\sum_{p\geq 0} 2^{2ps} \parallel u_p \parallel_2^2)(\sum_{r=-N}^{N} 2^{2rs})$$

D'après la proposition 2.2.1 on a :

$$| u |_s = (\sum_q 2^{2qs} \parallel \triangle_q u \parallel_2^2)^{\frac{1}{2}}$$

Donc :

$$| u |_s^2 \leq (\sum_{p\geq 0} 2^{2ps} \parallel u_p \parallel_2^2)(\sum_{r=-N}^{N} 2^{2rs})$$

$$\leq \frac{2^{4sN}}{1-2^{-2s}} (\sum_{p\geq 0} 2^{2ps} \parallel u_p \parallel_2^2)$$

$$\leq c^{2|s|+2} (\sum_{p\geq 0} 2^{2ps} \parallel u_p \parallel_2^2)$$

D'où le premier point.

Pour démontrer le second point, la série $(u_q)_{q\in\mathbb{N}}$ est une série absolument convergente dans l'espace L^2. De plus, le support de la transformée de Fourier de u_q étant inclus dans $2^q B$, il existe un entier N tel que :

$$\triangle_q u = \sum_{p\geq q-N} \triangle_q u_p$$

Pour la même méthode Il vient alors :

$$\sum_{q\geq 0} 2^{2qs} \parallel \triangle_q u \parallel_2^2 \leq \sum_{p\geq q-N} 2^{2qs} \parallel u_p \parallel_2^2$$

$$\leq \sum_{p\geq q-N} 2^{2(q-p)s} 2^{2ps} \parallel u_p \parallel_2^2$$

Le réel s étant strictement positif, on a :

$$(\sum_q 2^{2qs} \parallel \triangle_q u \parallel_2^2)^{\frac{1}{2}} \leq \sum_{p\geq q-N} 2^{(q-p)s} 2^{ps} \parallel u_p \parallel_2^2$$

$$\leq \frac{2^{Ns}}{1-2^{-s}} (\sum_{p\geq 0} 2^{2ps} \parallel u_p \parallel_2^2)^{\frac{1}{2}}$$

Donc :

$$| u |_s \leq \frac{c^{s+1}}{s} \sum_{p\geq 0} 2^{ps} \parallel u_p \parallel_2$$

D'où la démonstration de la proposition. ∎

2.2.2 L'espace de Hölder

Définition 2.2.2. Soit $s \in]0,1[$, on désigne par $\mathscr{C}^s$ l'espace des fonctions u bornées sur $\mathbb{R}^n$ telles qu'il existe une constante c vérifiant, pour tout x et y de $\mathbb{R}^n$,

$$| u(x) - u(y) | \leq c \mid x - y \mid^s$$

Si $s > 1$, on désigne par $\mathscr{C}^s$ l'espace des fonctions u telles que, pour tout multi-entier α de longueur plus petite que la partie entière de s, notée $[s]$, on ait

$$\partial^\alpha u \in \mathscr{C}^{s-[s]}$$

Il est clair que la norme

$$\| u \|_{\mathscr{C}^s} = \sum_{|\alpha| \leq [s]} (\| \partial^\alpha u \|_\infty + \sup_{x \neq y} \frac{| \partial^\alpha u(x) - \partial^\alpha u(y) |}{| x - y |^{s-[s]}})$$

Munit l'espace $\mathscr{C}^s$ d'une structure d'espace de Banach.

Définition 2.2.3. Soit s un réel positif. On désigne par $\mathscr{C}^s$ l'ensemble des distributions tempérées qui vérifient :

$$\| u \|_s = \sup_q 2^{qs} \| \triangle_q u \|_\infty < \infty$$

Proposition 2.2.3. *1. Si $u \in \mathscr{C}^s(\mathbb{R}^n)$, pour tout $p \geq -1$,*

$$\| \triangle_q u \|_0 \leq C \| u \|_s 2^{-ps}$$

2. Inversement, si pour $p \geq -1$, $\| \triangle_q u \|_0 \leq c 2^{-ps}$ alors $u \in \mathscr{C}^s$ et $\| u \|_s \leq Cc$

Démonstration. Soit $0 < s < 1$:

1. Comme $\| u_{-1} \|_0 \leq C \| u \|_0$, il suffit de considérer :

   $$\triangle_q u(x) = \int 2^{pn} \tilde{\varphi}(2^p(x-y)) u(y) dy \quad pour \quad p \geq 0$$

   De fait que $\int \tilde{\varphi}(z) dz = C\varphi(0) = 0$, on a aussi :

   $$\triangle_q u(x) = \int 2^{pn} \tilde{\varphi}(2^p(x-y))(u(y) - u(x)) dy$$

   D'où

   $$| \triangle_q u(x) | \leq \| u \|_s \int 2^{pn} \mid \tilde{\varphi} \mid (2^p(x-y)) \mid x - y \mid^s dy \leq C \| u \|_s 2^{-ps}$$

2. Inversement, posons pour un p à déterminer,

$$u = S_p u + R_p u,\ \ R_p u = \sum_{q \geq p} \triangle_q u$$

on a :

$$\| R_p u \|_0 \leq \sum_{q \geq p} \| \triangle_q u \|_0 \leq c 2^{-ps}$$

Par ailleurs,

$$| S_p u(x) - S_p u(y) | \leq | x - y | \sum_{q=-1}^{p-1} \| \triangle_q u \|_0$$

Et bien sur $\| \triangle_{-1} u \|_0 \leq Cc$ donc si $0 < s < 1$

$$| S_p u(x) - S_p u(y) | \leq Cc \mid x - y \mid 2^{p(1-s)}$$

Car la série $\sum \| \triangle_q u \|_0$ est alors géométriquement divergente.

En regroupant les estimations sur $R_p u$ et $S_p u$, on trouve :

$$| u(x) - u(y) | \leq Cc \mid x - y \mid 2^{p(1-s)} + 2c 2^{-ps}$$

En prenant pour p le plus grand entier tel que : $2^p \leq \frac{1}{|x-y|}$, on obtient

$$| u(x) - u(y) | \leq Cc \mid x - y \mid^s$$

■

2.2.3 L'espace de Besov

Définition 2.2.4. Soit $1 \leq p, r \leq +\infty, s \in \mathbb{R}$ et soit $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. On dit que $u \in B^s_{p,r}$ si et seulement si :

— la fonction $S_0 u \in L^p$

— pour $r \in \mathbb{N}$, la séquence $\epsilon_q = 2^{qs} \| \triangle_q u \|_p \in l^r$. On définira la norme sur $B^s_{p,r}$ comme :

$$\| u \|_{B^s_{p,r}} = \| S_0 u \|_p + (\sum_q (2^{qs} \| \triangle_q u \|_p)^r)^{\frac{1}{r}}$$

L'espace de Besov $B^s_{p,r}$ est l'ensemble des distributions tempérées u telles que :

$$\| u \|_{B^s_{p,r}} < \infty$$

Par la définition, nous avons $B^s_{2,2} = H^s$, et $B^s_{\infty,\infty} = \mathscr{C}^s$

Lemme 2.2.1. *Soit $s \in \mathbb{R}$ et $1 \leq p, r \leq \infty$. Soit $(\triangle_q u)_{q \geq -1}$ une suite de fonctions tel que :*

$$(\sum_{q \geq -1} (2^{qs} \parallel \triangle_q u \parallel_p)^r)^{\frac{1}{r}} < \infty$$

1. *Si supp $\widehat{u}_{-1} \subset B(0, R_2)$ et supp $\widehat{u}_q \subset C(0, 2^q R_1, 2^q R_2)$ pour quelque $0 < R_1 < R_2$ alors $u = \sum_{q \geq -1} \triangle_q u \in B^s_{p,r}$ et il existe un constante c tel que :*

$$\parallel u \parallel_{B^s_{p,r}} \leq c^{1+|s|} (\sum_{q \geq -1} (2^{qs} \parallel \triangle_q u \parallel_p)^r)^{\frac{1}{r}}$$

2. *Si s positif et supp $\widehat{u}_q \subset B(0, 2^q R)$ pour quelque $R > 0$ alors $u = \sum_{q \geq -1} \triangle_q u \in B^s_{p,r}$ et il existe un constante c tel que :*

$$\parallel u \parallel_{B^s_{p,r}} \leq \frac{c^{1+s}}{s} (\sum_{q \geq -1} (2^{qs} \parallel \triangle_q u \parallel_q)^r)^{\frac{1}{r}}$$

Démonstration. Sous l'hypothèse de la premier assertion et d'après le lemme de Bernstein, on a : $\parallel u_q \parallel_\infty \leq c 2^{q(\frac{N}{p} - s)}$. Ensuite, il existe un entier N_0 tel que :

$$| q' - q | \geq N_0 \Longrightarrow \triangle'_q u_q = 0$$

Par conséquent, $u_q = 0$ si $q \leq -2$, on a :

$$\begin{aligned}\parallel \triangle'_q u \parallel_p &= \parallel \sum_{|q-q'| \leq N_0} \triangle'_q u_q \parallel_p \\ &\leq \sum_{|q-q'| \leq N_0} \parallel u_q \parallel_p\end{aligned}$$

Donc, on a :

$$\begin{aligned}2^{q's} \parallel \triangle'_q u \parallel_p &\leq \sum_{|q-q'| \leq N_0} 2^{q's} \parallel u_q \parallel_p \\ &\leq c^{1+|s|} \sum_{|q-q'| \leq N_0} 2^{qs} \parallel u_q \parallel_p \\ &\leq c^{1+|s|} (\sum_{q \in \mathbb{N}} 2^{rqs} \parallel u_q \parallel_p^r)^{\frac{1}{r}}\end{aligned}$$

Alors :

$$\parallel u \parallel_{B^s_{p,r}} \leq c^{1+|s|} (\sum_{q \in \mathbb{N}} 2^{rqs} \parallel u_q \parallel_p^r)^{\frac{1}{r}}$$

D'où le premier point.

Pour démontrer le deuxième point pour tout q, on a :

$$\parallel u_q \parallel_p \leq c 2^{-qs}$$

Ensuite, il existe un entier N_1 tel que :

$$q' \geq q + N_1 \Longrightarrow \triangle'_q u_q = 0$$

Maintenant, nous écrivons que :

$$\| \triangle'_q u \|_p = \| \sum_{q \geq q' - N_1} \triangle'_q u_q \|_p$$

$$\leq \sum_{q \geq q' - N_1} \| u_q \|_p$$

Donc,on a :

$$2^{q's} \| \triangle'_q u \|_p \leq \sum_{q \geq q' - N_1} 2^{(q'-q)s} 2^{qs} \| u_q \|_p$$

$$\leq \frac{c^{1+s}}{s} (\sum_{q \in \mathbb{N}} 2^{rqs} \| u_q \|_p^r)^{\frac{1}{r}}$$

Alors :

$$\| u \|_{B^s_{p,r}} \leq \frac{c^{1+s}}{s} (\sum_{q \in \mathbb{N}} 2^{rqs} \| u_q \|_p^r)^{\frac{1}{r}}$$

D'où le deuxième point. ■

Proposition 2.2.4. *Soit $s \in \mathbb{R}$ et $1 \leq p, r \leq \infty$:*

1. *$B^s_{p,r}$ est un espace de Banach.*
2. *L'espace $\mathscr{C}^\infty_c$ est dense dans $B^s_{p,r}$ si et seulement si p et r sont finies.*
3. *$\forall s \in \mathbb{R}$ et $1 \leq p, r \leq \infty$, l'espace $B^{-s}_{p',r'}$ est l'espace dual de $B^s_{p,r}$.*
4. *Si $1 \leq p, r \leq \infty$ alors : l'espace $B^s_{p,r}$ est séparable.*

Démonstration. On revoie au [18] ■

Chapitre 3

Régularité des solutions des problèmes aux limites dans les espaces de Besov

Cet chapitre est un adaptation libre de [18]

3.1 Généralités

Dans cette partie on présente des estimations dans les espaces de Besov pour la solution de l'équation de la chaleur. Le modèle type de l'équation de la chaleur et donnée par le problème suivant : Trouver $u(t,x)$ solution de :

$$\begin{cases} \partial_t u - \mu \bigtriangleup u = f(t,x), x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u|_{t=0} = u_0(x), x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{3.1}$$

Où $\bigtriangleup = \sum \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ est l'opérateur laplacien. Cette équation décrit le phénomène physique de conduction thermique avec un terme source extérieur $f(t,x)$ et une donnée initiale $u_0(x)$ données, la constante μ est la constante de diffusion positif qu'on va désormais supposer égale à 1 La résolution de (3.11) dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ (en supposons que $u_0 \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ et $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_+, \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)))$ par la transformation de Fourier partielle (suivant la variable x) donne l'équation différentielle non homogène suivante :

$$\begin{cases} \partial_t \hat{u}(t,\xi) + \mid \xi \mid^2 \hat{u}(t,\xi) = \hat{f}(t,\xi) \\ \hat{u}|_{t=0}(\xi) = \hat{u_0}(\xi) \end{cases} \tag{3.2}$$

Qu'on peut résoudre par la variation des constantes, en effet : $\widehat{u} = \widehat{u}_p + \widehat{u}_h$ où $\widehat{u}_h$ vérifie :

$$\partial_t \widehat{u} =\mid \xi \mid^2 \widehat{u}$$

dont la solution est donnée par

$$\widehat{u}_h(t,\xi) = ce^{-t|\xi|^2}$$

on déduit la solution particulière $\widehat{u}_p$ par la variation des constantes, en effet :

$$\widehat{u'}_p = -c(t) \mid \xi \mid^2 e^{-t|\xi|^2} + c(t)' e^{-t|\xi|^2}$$

$$\widehat{u'}_p = - \mid \xi \mid^2 \widehat{u}_p + c'(t) e^{-t|\xi|^2} \tag{3.3}$$

$$= - \mid \xi \mid^2 c(t) e^{-t|\xi|^2} + \widehat{f}(t,\xi) \tag{3.4}$$

$3.3 - 3.4$:

$$c(t)' e^{-t|\xi|^2} - \widehat{f}(t,\xi) = 0$$

$$\Rightarrow \hat{f}(t,\xi) = c'(t) e^{-t|\xi|^2}$$

$$\Rightarrow c'(t) = \widehat{f}(t,\xi) e^{t|\xi|^2}$$

$$c(t) = \int_0^t \widehat{f}(\tau,\xi) e^{\tau|\xi|^2} d\tau$$

D'où la solution de (3.2) est donnée par :

$$\hat{u}(t,\xi) = \hat{u_0}(\xi) e^{-|\xi|^2 t} + \int_0^t \hat{f}(\tau,\xi) e^{-|\xi|^2(t-\tau)} d\tau \tag{3.5}$$

en appliquons la transformation de Fourier inverse on obtient : la présentation de la solution pour tout $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}^n$ suivante :

$$u(t,x) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} u_0(y) dy + \int_0^t \frac{1}{(4\pi(t-\tau))^{\frac{n}{2}}} (\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-\tau)}} f(\tau,y) dy) d\tau \tag{3.6}$$

Si on définit l'opérateur $e^{t\triangle}$ sur $\mathscr{S}$ par la relation

$$\forall \phi \in \mathscr{S}, \mathscr{F} e^{t\triangle} \phi(\xi) = e^{-t|\xi|^2} \widehat{\phi}(\xi)$$

On peut écrire la solution (3.11) sous la forme :

$$u(t) = e^{t\triangle} u_0(x) + \int_0^t e^{(t-\tau)\triangle} f(\tau) d\tau \tag{3.7}$$

Remarque 3.1.1. L'opérateur $e^{t\triangle} : \mathscr{S} \longrightarrow \mathscr{S}$ est continue :

$$\| e^{t\triangle} \phi \|_{N_p} = \| e^{-t|\xi|^2} \widehat{\phi}(\xi) \| \leq \| \widehat{\phi} \|_{N_p}$$

On peut étendre l'opérateur $e^{t\triangle}$ sur $\mathscr{S}'$ par dualité et la solution reste valable par $u_0 \in \mathscr{S}', f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_+, \mathscr{S}')$.

L'étude de la régularité consiste à trouver des espaces fonctionnel X telle que le terme $u_t - \triangle u$ et le second membre $f(t,x)$ ont la même régularité.
Le résultat reste vrai pour la norme L^2 : En effet, en multipliant l'équation (3.11) par u et en intégrant sur $\mathbb{R}^n$ par parties on obtient :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \parallel u \parallel_2^2 + \parallel Du \parallel_2^2 = \int fudx$$

avec $D = \frac{\partial}{\partial x_i}$. Maintenant en intégrant sur un intervalle de temps $[0,T]$, on obtient :

$$\parallel u(T) \parallel_2^2 + 2\int_0^T \parallel \bigtriangledown u \parallel_2^2 dt = \parallel u_0 \parallel_2^2 + 2\int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} f(t,x)u(t,x)dtdx$$

Si on suppose $u_0 \in L^2$ et $f \in L^2([0,T], H^{-1})$, on obtient une estimations de $Du(t)$ dans $L^2([0,T], \mathbb{R}^n)$.

Définition 3.1.1. Pour $T > 0, s \in \mathbb{R}, 1 \leq r, \rho \leq \infty$, nous définissons l'espace $L_T^\rho(B_{p,r}^s)$ comme l'ensemble des distributions tempérées u telle que :

$$\begin{cases} \parallel u \parallel_{L_T^\rho(B_{p,r}^s)} = \int_0^T (\sum_q (2^{qs} \parallel \triangle_q u \parallel_p)^r dt)^{\frac{1}{r}} < \infty, \text{ si } r < \infty \\ \parallel u \parallel_{L_T^\rho(B_{p,r}^s)} = \int_0^T \sup_q (2^{qs} \parallel \triangle_q u \parallel_p) < \infty, \text{ si } r = \infty \end{cases}$$

et l'espace $\tilde{L}_T^\rho(B_{p,r}^s)$ comme l'ensemble des distributions tempérées u telle que :

$$\begin{cases} \parallel u \parallel_{\tilde{L}_T^\rho(B_{p,r}^s)} = (\sum_q (2^{qs} \parallel \triangle_q u \parallel_{L_T^\rho(L^p)})^r)^{\frac{1}{r}} < \infty, \text{ si } r < \infty \\ \parallel u \parallel_{\tilde{L}_T^\rho(B_{p,r}^s)} = \sup_q (2^{qs} \parallel \triangle_q u \parallel_{L_T^\rho(L^p)}) < \infty, \text{ si } r = \infty \end{cases}$$

Remarque 3.1.2.

1. La différence entre $L_T^\rho(B_{p,r}^s)$ et $\tilde{L}_T^\rho(B_{p,r}^s)$ est que dans la première on a sommé sur r puis intégré par contre pour la second on a intégré puis sommé sur r.
2. d'après l'inégalité du Minkowski, on a :

$$\begin{cases} \parallel u \parallel_{\tilde{L}_T^\rho(B_{p,r}^s)} \leq \parallel u \parallel_{L_T^\rho(B_{p,r}^s)} \quad si\ r \geq \rho, \\ \parallel u \parallel_{\tilde{L}_T^\rho(B_{p,r}^s)} \geq \parallel u \parallel_{L_T^\rho(B_{p,r}^s)} \quad si\ r \leq \rho \end{cases}$$

3.2 L'estimation dans les espaces de Besov pour l'équation de la chaleur

Le but est d'étudier la question de régularité dans les espaces de Lebesgue de l'équation de la chaleur suivant t et dans les espaces de Besov suivant x.

3.3 Lemme utile

Pour donner des estimations sur la solution de l'équation de la chaleur on se restreint à des fonctions à support compact en dehors de l'origine. Le lemme suivant nous sera utile :

Lemme 3.3.1. *Soit ϕ une fonction $\mathscr{C}^\infty$ à support dans la couronne $C(0, r_1, r_2)$ avec $0 < r_1 < r_2$. Ils existent deux constantes positives k et c dépendant de ϕ et tel que pour tout $1 \leq p \leq \infty, \tau \geq 0$ et $\lambda > 0$, on a :*

$$\| \phi(\lambda^{-1}D)e^{-\tau|\xi|^2}u \|_p \leq ce^{-k\tau\lambda^2} \| \phi(\lambda^{-1}D)u \|_p$$

Démonstration. On peut par un changement de variable se ramener au cas $\lambda = 1$. Soit $\tilde{\phi}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ à support dans $C(0, r_1', r_2')$ avec $r_1' < r_1$ et $r_2' > r_2$ et tel que $\tilde{\phi} = 1$ au voisinage de $C(0, r_1, r_2)$. on a :

$$\mathscr{F}(\phi(D)e^{\tau\triangle}u)(\xi) = (\tilde{\phi}(\xi)e^{-\tau|\xi|^2})\mathscr{F}(\phi(D)u)(\xi)$$

Donc, $\tilde{\phi}(\xi)e^{-\tau|\xi|^2}u = k_\tau * \tilde{\phi}(\xi)u$ où :

$$K_\tau(z) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\tau|\xi|^2}e^{iz\xi}\tilde{\phi}(\xi)d\xi$$

d'après les inégalités de convolution, on a :

$$\| \tilde{\phi}(\xi)e^{-\tau|\xi|^2}u \|_p \leq \| K_\tau \|_1 \| \tilde{\phi}(\xi)u \|_p$$

Par conséquent il suffit démontré qu'ils existent deux constantes positives k et c tel que :

$$\forall \tau \in \mathbb{R}^+, \| K_\tau \|_1 \leq ce^{-k\tau} \tag{3.8}$$

Pour cela, observons que pour tout $m \in \mathbb{N}$:

$$(1+ | z |^2)^m K_\tau(z) = \int e^{-\tau|\xi|^2}\tilde{\phi}(\xi)(Id - \triangle_\xi)^m(e^{iz\xi})d\xi,$$

$$= \int e^{iz\xi}(Id - \triangle_\xi)^m(e^{-\tau|\xi|^2}\tilde{\phi}(\xi))d\xi$$

Sachant que ϕ est à support dans la couronne $C(0, r_1', r_2')$, on obtient :

$$\forall z \in \mathbb{R}^n, (1+ | z |^2)^m | k_\tau(z) | \leq c_m e^{-k\tau}$$

d'où l'inégalité (3.8). ■

3.4 Estimation dans les espaces de Besov de l'équation de la chaleur

L'idée est d'utiliser la décomposition de Littlewood-Paley pour déterminer pour chaque bloc $\triangle_{-1}, \triangle_q$ en utilisant la caractérisation des espaces de Besov en terme de la décomposition de Littlewood-Paley. On a le résultat clé suivant :

Théorème 3.4.1. *Soit $s \in \mathbb{R}$ et $1 \leq \rho, p, r \leq \infty$. Soit $T > 0, u_0 \in B^s_{p,r}$ et $f \in \tilde{L}^\rho_T(B^{s-2+\frac{2}{\rho}}_{p,r})$ alors : (3.11) a une unique solution u dans $\tilde{L}^\rho_T(B^{s+\frac{2}{\rho}}_{p,r}) \cap \tilde{L}^\infty_T(B^s_{p,r})$, de plus il existe une constante c qui dépend seulement de n et tel que pour tout $\rho_1 \in [\rho, +\infty]$, on a :*

$$\| u \|_{\tilde{L}^{\rho_1}_T(B^{s+\frac{2}{\rho_1}}_{p,r})} \leq c((1+T^{\frac{1}{\rho_1}}) \| u_0 \|_{B^s_{p,r}} + (1+T^{1+\frac{1}{\rho_1}-\frac{1}{\rho}}) \| f \|_{\tilde{L}^\rho_T(B^{s-2+\frac{2}{\rho}}_{p,r})})$$

(Si de plus r est fini alors u appartient à $C([0,T]; B^s_{p,r})$).

Démonstration. Puisque u_0 et f sont des distributions tempérées, l'équation (3.11) a une solution unique u dans $S'(0, T \times \mathbb{R}^n)$, donnée par :

$$\hat{u}(t,\xi) = e^{-t|\xi|^2}\hat{u}_0(\xi) + \int_0^t e^{-|\xi|^2(t-\tau)}\hat{f}(\tau,\xi)d\tau$$

En appliquant la décomposition de Littlewood-Paley à (3.11) et en utilisant (3.12) on obtient :

$$\triangle_q u(t) = e^{-t|\xi|^2} \triangle_q u_0 + \int_0^t e^{-(t-\tau)|\xi|^2} \triangle_q f(\tau) d\tau \; q \geq -1$$

1-**estimation des blocs $\triangle_q u$** :

$$\triangle_q u(t) = e^{-t|\xi|^2} \triangle_q u_0 + \int_0^t e^{-(t-\tau)|\xi|^2} \triangle_q f(\tau) d\tau$$

Donc :

$$\| \triangle_q u(t) \|_p \leq \| e^{-t|\xi|^2} \triangle_q u_0 \|_p + \int_0^t \| e^{-(t-\tau)|\xi|^2} \triangle_q f(\tau) \|_p \, d\tau$$

D'après le lemme (3.3.1), on a pour tout $k > 0$,

$$\| \triangle_q u(t) \|_p \leq e^{-kt\lambda^2} \| \triangle_q u_0 \|_p + \int_0^t e^{-(t-\tau)k\lambda^2} \| \triangle_q f(\tau) \|_p \, d\tau$$

$$\| \triangle_q u(t) \|_p \leq e^{-kt2^{2q}} \| \triangle_q u_0 \|_p + \int_0^t e^{-(t-\tau)k2^{2q}} \| \triangle_q f(\tau) \|_p \, d\tau$$

En appliquant l'inégalité de la convolution, on obtient :
$(\int_0^T (\| \triangle_q u(t) \|_p)^{\rho_1} dt)^{\frac{1}{\rho_1}} \leq (\int_0^T (e^{-kt2^{2q}} \| \triangle_q u_0 \|_p)^{\rho_1} dt)^{\frac{1}{\rho_1}} + (\int_0^T (\int_0^t e^{-(t-\tau)k2^{2q}} \| \triangle_q f(\tau) \|_p \, d\tau)^{\rho_2} dt)^{\frac{1}{\rho_2}}$

alors

$$\begin{aligned}\| \triangle_q u \|_{L_T^{\rho_1}(L^p)} &\leq \| \triangle_q u_0 \|_p \left(\int_0^T (e^{-kt2^{2q}})^{\rho_1} dt\right)^{\frac{1}{\rho_1}} + \left(\int_0^T (\| \triangle_q f(\tau) \|_p)^{\rho} d\tau\right)^{\frac{1}{\rho}} \left(\int_0^T \left(\int_0^t e^{-(t-\tau)k2^{2q}} d\tau\right)^{\rho_2} dt\right)^{\frac{1}{\rho_2}} \\ &\leq \left(\frac{1-e^{-kT\rho_1 2^{2q}}}{k\rho_1 2^{2q}}\right)^{\frac{1}{\rho_1}} \| \triangle_q u_0 \|_p + \left(\frac{1-e^{-kT\rho_2 2^{2q}}}{k\rho_2 2^{2q}}\right)^{\frac{1}{\rho_2}} \| \triangle_q f \|_{L_T^{\rho}(L^p)}\end{aligned}$$

En multiplie les deux membres par : $2^{q(s+\frac{2}{\rho_1})}$ on obtient :
$(\sum_q (2^{q(s+\frac{2}{\rho_1})} \| \triangle_q u \|_{L_T^{\rho_1}(L^p)})^r)^{\frac{1}{r}} \leq (\sum_q 2^{qs} (\frac{1-e^{-kT\rho_1 2^{2q}}}{k\rho_1 2^{2q}})^{\frac{1}{\rho_1}} \| \triangle_q u_0 \|_p)^r)^{\frac{1}{r}} + (\sum_q (2^{q(s+\frac{2}{\rho_1})} (\frac{1-e^{-kT\rho_2 2^{2q}}}{k\rho_2 2^{2q}})^{\frac{1}{\rho_2}} \| \triangle_q f \|_{L_T^{\rho}(L^p)})^r)^{\frac{1}{r}}$
Avec $\frac{1}{\rho_2} = 1 + \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho}$
Finalement, on prend la norme $l^r(\mathbb{Z})$, et on obtient (avec la convention habituelle si $r = +\infty$)
$\| u \|_{\tilde{L}_T^{\rho_1}(B_{p,r}^{s+\frac{2}{\rho_1}})} \leq [\sum_q (\frac{1-e^{-kT\rho_1 2^{2q}}}{k\rho_1 2^{2q}})^{\frac{r}{\rho_1}} (2^{qs} \| \triangle_q u_0 \|_p)^r]^{\frac{1}{r}} + [\sum_q (\frac{1-e^{-kT\rho_2 2^{2q}}}{k\rho_2 2^{2q}})^{\frac{r}{\rho_2}} (2^{q(s-2+\frac{2}{\rho})} \| \triangle_q f \|_{L_T^{\rho}(L^p)})^r]^{\frac{1}{r}}$
D'où,

$$\| u \|_{\tilde{L}_T^{\rho_1}(B_{p,r}^{s+\frac{2}{\rho_1}})} \leq c(\| u_0 \|_{B_{p,r}^s} + \| f \|_{\tilde{L}_T^{\rho}(B_{p,r}^{s-2+\frac{2}{\rho}})}) \tag{3.9}$$

2-**<u>estimation des blocs $\triangle_{-1} u$</u>** :
On a :

$$\| \triangle_{-1} u(t) \|_p \leq \| \triangle_{-1} u_0 \|_p + \int_0^T \| \triangle_{-1} f \|_p \, dt$$

d'où, si $1 \leq \rho \leq \rho_1 \leq \infty$,

$$\left(\int_0^T (\| \triangle_{-1} u(t) \|_p)^{\rho_1} dt\right)^{\frac{1}{\rho_1}} \leq \left(\int_0^T (\| \triangle_{-1} u_0 \|_p)^{\rho_1} dt\right)^{\frac{1}{\rho_1}} + \left(\int_0^T \left(\int_0^T \| \triangle_{-1} f \|_p \, dt\right)^{\rho_2} dt\right)^{\frac{1}{\rho_2}}$$

D'où :

$$\begin{aligned}\| \triangle_{-1} u \|_{L_T^{\rho_1}(L^p)} &\leq \| \triangle_{-1} u_0 \|_p \left(\int_0^T dt\right)^{\frac{1}{\rho_1}} + \| \triangle_{-1} f \|_{L_T^{\rho}(L^p)} \left(\int_0^T dt\right)^{\frac{1}{\rho_2}} \\ &\leq T^{\frac{1}{\rho_1}} \| \triangle_{-1} u_0 \|_p + T^{\frac{1}{\rho_2}} \| \triangle_{-1} f \|_{L_T^{\rho}(L^p)} \text{ avec} \frac{1}{\rho_2} = 1 + \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho} \\ &\leq T^{\frac{1}{\rho_1}} \| \triangle_{-1} u_0 \|_p + T^{1+\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho}} \| \triangle_{-1} f \|_{L_T^{\rho}(L^p)}\end{aligned}$$

En multiplie les deux membres par : $2^{q(s+\frac{2}{\rho_1})}$ on obtient :
$(\sum_q (2^{q(s+\frac{2}{\rho_1})} \| \triangle_{-1} u \|_{L_T^{\rho_1}(L^p)})^r)^{\frac{1}{r}} \leq (\sum_q 2^{qs} T^{\frac{1}{\rho_1}} \| \triangle_{-1} u_0 \|_p)^r)^{\frac{1}{r}} + (\sum_q (2^{q(s+\frac{2}{\rho_1})} T^{1+\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho}} \| \triangle_{-1} f \|_{L_T^{\rho}(L^p)})^r)^{\frac{1}{r}}$
Finalement, on prend la norme $l^r(\mathbb{Z})$, et on obtient (avec la convention habituelle si $r = +\infty$)
$\| u \|_{\tilde{L}_T^{\rho_1}(B_{p,r}^{s+\frac{2}{\rho_1}})} \leq [\sum_q T^{\frac{r}{\rho_1}} (2^{qs} \| \triangle_{-1} u_0 \|_p)^r]^{\frac{1}{r}} + [\sum_q T^{r+\frac{r}{\rho_1}+\frac{r}{\rho}} (2^{q(s-2+\frac{2}{\rho})} \| \triangle_{-1} f \|_{L_T^{\rho}(L^p)})^r]^{\frac{1}{r}}$
Donc,

$$\| u \|_{\tilde{L}_T^{\rho_1}(B_{p,r}^{s+\frac{2}{\rho_1}})} \leq c(T^{\frac{1}{\rho_1}} \| u_0 \|_{B_{p,r}^s} + T^{1+\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho}} \| f \|_{\tilde{L}_T^{\rho}(B_{p,r}^{s-2+\frac{2}{\rho}})}) \tag{3.10}$$

De 3.9 et 3.10 on obtient :

$$\| u \|_{\tilde{L}_T^{\rho_1}(B_{p,r}^{s+\frac{2}{\rho_1}})} \leq c((1+T^{\frac{1}{\rho_1}}) \| u_0 \|_{B^s_{p,r}} + (1+T^{1+\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho}}) \| f \|_{\tilde{L}_T^{\rho}(B_{p,r}^{s-2+\frac{2}{\rho}})})$$

D'où le résultat. ∎

Remarque 3.4.1. Si la condition initiale est régulier alors la solution de l'équation de la chaleur est plus régulier dans l'espace de Besov où s décrit le degré de la régularité.

Conclusion

On a considérer le problème à valeur initiale associe à l'équation de la chaleur linéaire :

$$\begin{cases} \partial_t u - \mu \triangle u = f(t,x), x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u|_{t=0} = u_0(x), x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{3.11}$$

Et par des techniques d'analyse de Fourier on trouve que la solution est donnée par :

$$u(t) = e^{t\triangle} u_0(x) + \int_0^t e^{(t-\tau)\triangle} f(\tau) d\tau \tag{3.12}$$

La question de la régularité de la solution est étudier essentiellement on utilisent la décomposition de Littlewood-Paley, qui permet de mesurer la régularité de la solution (3.12) dans les espaces de Besov suivant la norme L^p ce qui fait le théorème (3.4.1).

Bibliographie

[1] **A.Zeriahi**, *Les espaces de Lebesgue*, version préliminaire, 2011.

[2] **C.Jiang**, *Nonlinear microlocale analysis*, Wuhan University, Wuhan, China, september 1995.

[3] **C.Jiang**, *Partial differential equations*, Wuhan University, China, july 2007.

[4] **C.Zuily**, *Analyse pour l'agrégation*, Dunod, Paris, 2013.

[5] **F.Golse**, *Analyse réelle et complexe*, cours de 1 ère année, École Polytechnique, 19 juillet 2011.

[6] **F.Golse**, *Distribution, Analyse de Fourier, Équation aux dérivée partielle*, cours de l'école Polytechnique, octobre 2012.

[7] **G.Métivier**, *Para-differential calculus and applications to the Cauchy problem for nonlinear systems*, Université Bordeaux, France, may 9, 2008.

[8] **H.Abels**, *Pseudo differential and singular integral operators*, Mathematics subject classification, Université pierre et Marie curie et École polytechnique, 2010.

[9] **H.Brézis**, *Analyse fonctionnelle : théorie et application*, Masson, Paris, 1983.

[10] **J.M Bony**, *Cour d'analyse : théorie des distributions et analyse de Fourier*, les éditions de l'école polytechnique, Palaiseau, 2001.

[11] **J.Rochat**, *Les espaces de Sobolev*, école polytechnique, SMA, 16 décembre 2009.

[12] **J.W Rinehart**, *Intégration*, university of combridge, new york, 1962.

[13] **L.Schwartz**, *Théorie des distributions*, Hermann, Paris, 1966.

[14] **M.El Amrani**, *Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels*, Ellipses Édition, Paris, 2008.

[15] 8**M.Leconte**, *Transformation de Fourier cours et exercices*, Ecole des mines de douai, juillet, 2001.

[16] **N.Boccara**, *Analyse fonctionnelle*, 1976.

[17] **R.Danchin**, *Analyse non linéaire*, cours de l'école polytechnique, july 12, 2006.

[18] **R.Danchin**, *Fourier Analysis method for pde's*, november 14, 2005.