



*Université de Ghardaïa*

N° d'ordre :

N° de série :

Faculté des Sciences et de la Technologie  
Département d'Automatique et de l'électromécanique

**Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de**

## **MASTER**

**Domaine :** *Sciences et Technologie*

**Filière :** *Automatique*

**Spécialité :** *Automatique et systèmes*

Par : BEN YAGOUB Azzeddine

BADLIS Baelhadj

## **Thème**

# **Commande robuste $H_{\infty}$ des systèmes non linéaires**

**Soutenu publiquement le : 23/09/2020**

**Devant le jury :**

<b>SADOUNI Radhwane</b>	M.C.B	Univ. Ghardaïa	<b>Président</b>
<b>BEN CHAABANE Achour</b>	M.A.A	Univ. Ghardaïa	<b>Examinateur</b>
<b>MOSBAH Charaf Abdelkarim</b>	M.A.B	Univ. Ghardaïa	<b>Examinateur</b>
<b>BEKKAR Belgacem</b>	M.C.B	Univ. Ghardaïa	<b>Encadrent</b>

# Remerciements

Nous remercions notre Dieu de nous avoir guidés au cours de nos études et qui nous a donné la force pour compléter ce mémoire.

Nos vifs remerciements vont en particulier à tous nos parents, à nos enseignants du primaire, du collège, du lycée et de l'université,

Nous remercions beaucoup notre encadreur, Mr : BEKKAR Belgacem, qui a suivi notre travail pendant la pandémie Corona COVID-19 à distance et par fréquentation.

Nos remerciements vont également à tout le corps enseignant du département d'Automatique et d'électromécanique.

Nos remerciements vont aussi à tous ceux qui nous aidé de près ou de loin à l'aboutissement de ce modeste travail.

Enfin, il nous est plaisant d'exprimer nos meilleurs sentiments à Monsieur le Président du jury et à l'ensemble des membres du jury, qui ont bien voulu nous honorer de leurs présences et assister à la soutenance de notre mémoire afin d'évaluer notre travail.

Baelhadj et Azzeddine

في هذه الأطروحة ، العمل يُعنى بنظام التحكم المسمى  $H_\infty$  المثالي على الأنظمة المعقدة (غير الخطية ، وذات المداخل والمخارج المتعددة ...). في المرحلة الأولى ، سنحدد بعض المفاهيم الأساسية حول نظام التحكم  $H_\infty$  مع بعض المبادئ حول هذا الأخير ثم حل مشكل بسيط. في المرحلة الثانية من الموضوع نتطرق إلى المشكل الأساسي و القاعدي للأنظمة الغير خطية مع تقديم حل لها في نهاية الفصل. في المرحلة الأخيرة لدينا وصف للنموذج التطبيقي الغير خطي (Quanser 2-DOF) مع البرهان الرياضي لمعادلات الحركة التي تم تعديلها لتصبح خطية، و في الأخير محاكاة لنظام التحكم في النموذج التطبيقي على برنامج المحاكات MATLAB-Simulink ثم التحقق من صحة النتائج على النموذج الحقيقي في مختبر الجامعة.

## Résumé

Dans ce mémoire le travail concerne à présenter est la commande robuste  $H_\infty$  sur les systèmes compliqués (non linéaire, multi entrés et multi sorties ...). Dans le premier temps, nous avons défini les notions de base de la commande robuste  $H_\infty$  avec quelques principes sur cette dernier ainsi la solution d'un problème simple. Dans la deuxième étape, nous avons examiné le cœur du problème standard pour les systèmes non linéaires avec sa solution ou finale. Dans l'étape finale, nous avons étudié un modèle non linéaire (Quanser 2-DOF) puis la démonstration mathématique de ses équations de mouvement ainsi la linéarisation de ce dernier et finalement une simulation de la commande robuste  $H_\infty$  sur MATLAB puis une validation des résultats sur le modèle réel dans le laboratoire.

**Mots Clés :** Commande robuste ; commande  $H_\infty$  ; fonction de sensibilité ; système non-linéaire ; la norme  $H_\infty$  ;  $\gamma$ -itération .

كلمات مفتاحية : نظام التحكم المثالي، نظام التحكم  $H_\infty$ ، دالة الحساسية، نظام غير خطي، المعيار  $H_\infty$  ; خوارزمية التكرارات  $\gamma$

# Table des matières

Remerciements .....	i
Résumé .....	ii
ملخص .....	ii
Table des matières .....	iii
Liste des figures .....	vi
Liste des tableaux .....	viii
Liste des abréviations .....	ix
Introduction générale .....	1
Chapitre 1 Commande robuste .....	4
1.1 Introduction .....	4
1.2 Cahier des charges de la commande robuste .....	4
1.2.1 Réponses temporelles .....	4
1.2.2 Rejet des perturbations .....	5
1.2.3 Stabilité .....	5
1.2.4 Théorème du petit gain .....	6
1.2.5 Normes du signal .....	6
1.2.6 Normes des systèmes .....	8
1.2.7 Gain $L_2$ .....	9
1.2.8 Fonction de sensibilité .....	9
1.3 Représentation des incertitudes .....	10
1.4 Principes de la commande $H_\infty$ pour les systèmes linéaires .....	11
1.4.1 Problème $H_\infty$ standard .....	11
1.4.2 Problème $H_\infty$ optimal .....	12
1.4.3 Problème $H_\infty$ sous-optimal .....	12

1.4.4	Introduction des fonctions de pondération .....	12
1.4.5	Choix des fonctions de pondération .....	14
1.5	Problème de sensibilité mixte .....	15
1.6	Résolution du problème $H^\infty$ standard par équations de Riccati (ARE).....	15
1.7	$\gamma$ - itération .....	17
1.8	Conclusion .....	18
Chapitre 2 Commande $H^\infty$ des systèmes non-linéaires.....		19
2.1	Introduction.....	19
2.2	Système dissipatif .....	19
2.3	Formulation mathématique du problème .....	20
2.4	Systèmes non-linéaires affins aux entrées .....	20
2.5	Solution du problème $H^\infty$ des systèmes non-linéaires.....	20
2.6	Solution du problème $H^\infty$ par la méthode des Approximations successives .....	22
2.6.1	Algorithme de la méthode .....	24
2.7	Solution du problème $H^\infty$ par la méthode des inégalités matricielles non-linéaires 24	
2.8	Conclusion .....	26
Chapitre 3 Commande $H^\infty$ non-linéaire d'un hélicoptère à 2DOF .....		27
3.1	Introduction.....	27
3.2	Description du prototype Quanser AERO .....	27
3.3	Modélisation du Quanser 2-DOF.....	28
3.3.1	Model linéarisé du système .....	32
3.4	Cahier des charges .....	34
3.5	Synthèse de commande par la méthode de la sensibilité mixte .....	34
3.5.1	Choix des fonctions de pondération .....	35
3.6	Résultats de simulations.....	37

3.6.1	Comparaison avec la commande LQR .....	42
3.6.2	Vérification de la robustesse.....	44
3.6.3	Discussion.....	45
3.7	Conclusion .....	45
	Conclusion générale .....	47
	Bibliographies.....	48

# Liste des figures

Figure 1-1 : Système avec une perturbation .....	5
Figure 1-2 : Représentation des incertitudes de modélisation.....	6
Figure 1-3 : Asservissement en boucle fermée.....	9
Figure 1-4 : Problème $H^\infty$ standard .....	11
Figure 1-5 : Introduction des fonctions de pondérations.....	13
Figure 1-6 : Paramétrisation de la solution du problème sous optimal .....	17
Figure 3-1: Quanser 2-DOF.....	28
Figure 3-2 : Model dynamique de Quanser 2-DOF.....	29
Figure 3-3 : Système en boucle fermée avec correcteur et fonction des pondérations .....	35
Figure 3-4 : Organigramme de la commande basé sur la sensibilité mixte.....	36
Figure 3-5 : Schéma bloc de la commande $H^\infty$ basée sur la sensibilité mixte .....	38
Figure 3-6: Diagramme de Bode de l'inverse de fonction de pondération $W_e$ .....	39
Figure 3-7 : Diagramme de Bode de l'inverse de fonction de pondération $W_s$ .....	39
Figure 3-8 : Diagramme de Bode de l'inverse de fonction de pondération $W_u$ .....	39
Figure 3-9 : Réponse de sortie, position d'élévation. ....	40
Figure 3-10 : Réponse de sortie, position d'azimut.....	40
Figure 3-11 : Signale de sortie de position d'élévation. ....	41
Figure 3-12 : Signal de sortie de position d'azimut.....	41
Figure 3-13 : Comparaison entre la position d'élévation pour LQR et $H^\infty$ .....	42
Figure 3-14 : Comparaison entre la position d'azimut par LQR et $H^\infty$ .....	42
Figure 3-15 : Signal de commande de moteur d'élévation.....	43
Figure 3-16 : Signal de commande de moteur d'azimut .....	43
Figure 3-17 : Signal de sortie d'élévation avec une perturbation sur la sortie .....	44
Figure 3-18 : Signal de sortie de position d'azimut avec une perturbation sur la sortie .....	44

Figure 3-19 : Signal de sortie d'élévation avec une perturbation sur la commande ..... 45

Figure 3-20 : Signal de sortie d'azimut avec une perturbation sur la commande ..... 45



# Liste des tableaux

Tableau 3-1 : Les composants de 2-DOF .....	28
Tableau 3-2 : Paramètres du model Quanser 2-DOF .....	33

# Liste des abréviations

3D : Trois dimensions

LQG/LTR : Lineaire Quadratique Gaussienne avec recouvrement de transfert de boucle

GPC : Generalized Predictive Control

MPC : Model Predictive Control

QFT : Quantitative Feedback Theory

CRONE : Commande Robuste d'Ordre Non Entier

LTI : linear time invariant

LFT : Transformation Linéaire Fractionnelle

2-DOF : two Degree of freedom

MIMO : multi input multi output ( multi entré et multi sortie )

LMI : Inégalité matricielle linéaire.

BRL : Lemme borné réel.

# Introduction générale

En automatique, généralement, on peut dire un système à une n'importe quel ensemble d'éléments interagissant entre eux selon certaines fonctions ou règles a pour but de rendre un service au mieux, il peut être ouvert (non contrôlé), fermé (contrôlé)... selon son degré d'interaction avec son environnement. Pour étudier un système on développe quelques équations mathématiques différentielles pour la simulation du modèle réel, cette opération est appelée la modélisation. Ensuite ces équations peuvent être représentées par un modèle d'état ou par une fonction de transfert [1].

La modélisation est la conception d'un modèle. Selon son objectif et les moyens utilisés, la modélisation est dite mathématique, géométrique, 3D, empirique, mécaniste, cinématique... la modélisation des systèmes industriels est devenue aujourd'hui un sujet très important dans le monde des entreprises quand on voit l'impact qu'elle a dans le succès de celles-ci. On peut spécifier deux types de modèles : Les modèles de connaissances qui contiennent toutes les informations nécessaires sur le processus étudié ; et les modèles de représentations qui sont formés d'un ensemble de relations mathématiques qui relient les différentes variables du processus [1], [2].

En effet, la synthèse d'une loi de commande se fait généralement sur un modèle nominal simplifié qui ne prend pas en compte toute la complexité du système. Alors la création d'une loi de commande d'un système asservi a pour but d'assurer la stabilité du procédé en boucle fermée. On dit que la stabilité est réalisée si les écarts entre le modèle utilisé pour la synthèse et le modèle réel tendent vers une valeur très petite. De plus, un contrôleur doit veiller à atteindre des objectifs de performances établis au préalable dans le cahier des charges [3], [4].

Le défi majeur des automaticiens est de créer une loi de commande plus performante au niveau de la poursuite de trajectoires, le rejet de perturbations, la stabilité, et la robustesse vis-à-vis des incertitudes paramétriques.

Le domaine de l'industrie exposé à des développements considérables, par l'influence à grande échelle de l'Automatique sur les processus de production. Ceci a été possible grâce à l'évolution de l'électronique et de l'informatique industrielle, admettant l'application des techniques de la commande avancée établies auparavant. L'utilisation des techniques avancées de commande a conduit à un bon rendement, tout en diminuant les coûts [5].

La robustesse est un thème important dans l'industrie. Par tradition, les départements production et qualité des entreprises se concentraient sur la robustesse des systèmes au cours de la phase de production. Autrement dites, les entreprises peuvent désormais développer de meilleurs produits et de meilleurs outils pour un processus robuste.

Historiquement, Sandberg et Zames [6] sont développés l'approche entrée/sortie et le théorème du faible gain durant l'année 1960-1970s. Depuis 1769 quand James Watt développé son gouverneur de Fly Ball. Le succès de conçu d'un contrôle du système doit toujours capable de maintenir une stabilité et un niveau de performance malgré des incertitudes dans la dynamique des systèmes. Exigences de conception comme la marge de gain et la marge de phase lors l'utilisation des techniques classique dans le domaine fréquentiel sont uniquement pour l'objectif de la robustesse. Le problème de la robustesse n'a pas été examiné de façon importante au cours de la période 1960s et 1970s quand les méthodes d'écrit et de concrétion des modèles des systèmes pourraient être de manière beaucoup plus précise, lorsque sont principalement des optimisations mathématiques dans le domaine temporel. En raison de son importance la recherche sur la conception robuste se passe tout le temps. Une percée est survenue à la fin 1970s et où début 1980s avec le travail de pionniers par Zames [6] et Francis [7] sur la théorie, elle est nommée  $H_\infty$  la théorie optimale du contrôle. L'approche d'optimisation  $H_\infty$  et la méthode  $\mu$ -synthèse/ analyse sont bien développés et élégants. Ils fournissent des procédures de conception systématiques de contrôleurs robustes pour les systèmes linéaires, bien que l'extension dans les cas non linéaires soit être activement recherchée.

Parmi les méthodes de commande robuste usuelle les commande suivante :

- Commande LQG/LTR(Linéaire Quadratique Gaussienne avec recouvrement de transfert de boucle)
- Commande prédictive (GPC, MPC)( Generalized/Model Predictive Control)
- Approche QFT (Quantitative Feedback Theory)
- Placement de pôle robuste
- Commande CRONE(Commande Robuste d'Ordre Non Entier)
- Commande  $H_\infty$

La plupart des articles scientifiques ne traitent pas de l'influence d'une perturbation sur la trajectoire de l'hélicoptère, mais cette influence fait l'objet de notre étude.

La commande robuste répond à cette problématique, et particulièrement la commande  $H_\infty$ . Il existe différentes approches pour le calcul du correcteur robuste  $H_\infty$ , seule l'approche basée sur la résolution des équations de Riccati, qui se ramène à une contrainte sur la norme  $H_\infty$ , est étudiée dans ce mémoire.

Ce mémoire est organisé comme suit :

Le premier chapitre exposera les principes de base sur la synthèse de la robustesse des systèmes, ensuit la synthèse d'une loi de commande robuste par la résolution des équations de Riccati.

Le deuxième chapitre sera consacré à la résolution du problème  $H_\infty$  non linéaire par la méthode des approximations successives et la méthode des inégalités matricielles non linéaire.

Le troisième chapitre contiendra l'essentiel du travail effectué dans ce mémoire. Il s'agit essentiellement du choix approprié des fonctions de pondération selon le cahier des charges, puis enfin, l'application de commande  $H_\infty$  pour contrôler la position des deux ongles d'hélicoptère (Pitch ; Yaw).

# Chapitre 1

## Commande robuste

### 1.1 Introduction

La robustesse est un thème important dans l'automatique, a pour but de stabiliser les performances d'un système. Dans l'analyse de robustesse, la stabilité des systèmes est analysée selon des conditions définies dans le cahier des charges. Alor le rôle de l'automaticien est de concevoir une loi de commande qui conserve ses propriétés malgré les incertitudes et les perturbations affectant le système à commander.

Dans ce chapitre, nous définissons quelques notions de base pour la conception d'une loi de commande qui nous permettrons de garder les bonnes performances, ensuivent les théorèmes des gains puis on commence dans la commande robuste.

### 1.2 Cahier des charges de la commande robuste

En Automatique, le cahier des charges comprend classiquement plusieurs paramètres de spécifications. La stabilité et les performances définissent le comportement souhaité pour le système commandé. Dans cette partie, nous proposons de présenter la formulation mathématique du cahier des charges de la commande robuste.

#### 1.2.1 Réponses temporelles

L'étude temporelle d'un système consiste à déterminer sa réponse  $y(t)$  à un signal d'entrée  $u(t)$  qui varie en fonction du temps. Cette réponse permet d'évaluer les performances en rapidité, précision, stabilité. On étudie ces performances temporelles dans le régime transitoire, qui caractérise l'évolution de système entre les conditions initiales et les conditions de stabilité [8].

La réponse temporelle d'un système comprend deux régimes :

- Le régime transitoire pendant lequel le système passe de son état initial à son état final
- Le régime permanent qui correspond à  $t \rightarrow \infty$ .

## 1.2.2 Rejet des perturbations

C'est un problème qui a été largement abordé dans l'étude des systèmes et pour lequel des grands nombres de contributions ont déjà été apportées [9]. Certains systèmes sont perturbés par des signaux extérieurs. On appelle perturbation (figure 1-1) à ces signaux et on parle de régulation de problème d'asservissement qui consistant à garder les performances avec la présence des perturbations.

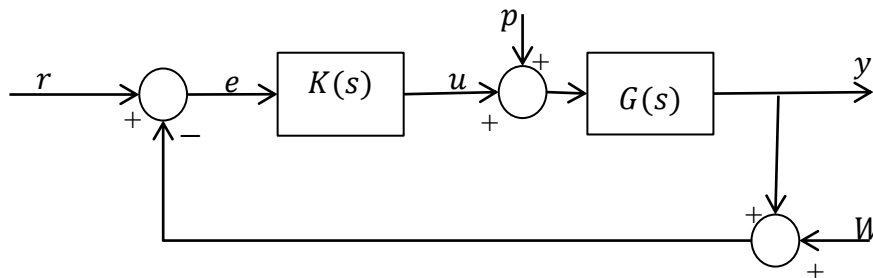


Figure 1-1 : Système avec une perturbation

L'influence de la perturbation sur la grandeur à commander est décrite par la relation suivante :

$$\frac{Y(s)}{P(s)} = \frac{G(s)}{1 + K(s)G(s)} \quad (1-1)$$

## 1.2.3 Stabilité

Pour déterminer si un système physique, représenté par un schéma-bloc, est stable ou non, on peut utiliser plusieurs méthodes ou critères. Parmi les méthodes de stabilité on a :

### 1) La stabilité entrée/sortie

La stabilité entrée/sortie est une forme particulière de stabilité des systèmes dynamiques étudiés en automatique. Un système est stable si à une entrée bornée correspond une sortie bornée ou la réponse libre du système tend vers zéro à l'infini [10]. Par simplification que si la sortie reste d'énergie finie tant que l'entrée est d'énergie finie. Une condition nécessaire et suffisante est que tous les pôles de fonction de transfert  $G(s)$  sont à parties réelles strictement négatives.  $Re\{\lambda_i(A)\} < 0; \forall i$ .

### 2) La stabilité au sens de Lyapounov

La stabilité au sens de Lyapounov est un théorème général utilisable pour les équations différentielles. Le théorème central d'Alexandre Lyapounov dit qu'un système dynamique (décrit par une équation différentielle du type  $\dot{x} = f(x, u, t)$ ) est stable (au sens de Lyapounov)

avec la condition initiale  $x(t_0) = (x_0)$  si l'état du système converge vers son point d'équilibre  $(x_e)$  d'autre façon que la trajectoire  $x_e(t) \in R^n$  est une trajectoire d'équilibre de système pour  $\forall t \geq t_0$  on a  $f(x_e, u, t) = 0$  [10].

### 1.2.4 Théorème du petit gain

Le théorème de petit gain nous fournissons une condition suffisante pour la stabilité des systèmes nominaux [4]. Soit le système représenté dans la figure 1-2 :

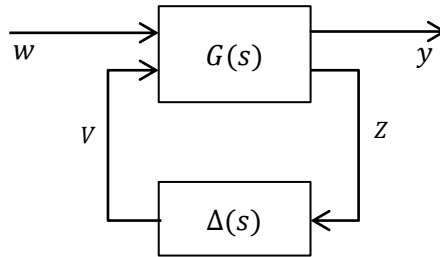


Figure 1-2 : Représentation des incertitudes de modélisation

Pour tout  $\Delta(s) \in RH_\infty$  tel que  $\|\Delta(s)\|_\infty < \gamma$  le système interconnecté est stable si et seulement  $\|G(s)\|_\infty < \gamma^{-1}$  ou  $G(s) = H_{ZV}(s)$ .

### 1.2.5 Normes du signal

#### 1.2.5.1 L'espace $L_1$ est la norme $L_1$

On définit l'espace  $L_1$  comme l'ensemble des signaux intégrables en valeur absolue[11], [12],  $L_1 = \{v(t) \in R: \int_0^{+\infty} |v(t)| dt < \infty\}$ . La norme  $L_1$  de signale  $v(t) \in L_1$  set noté par  $\|v\|_1$  et définie par :

$$\|v\|_1 = \int_0^{+\infty} |v(t)| dt \quad (1-2)$$

Dans le cas de signaux multidimensionnels  $v(t) = [v_1(t) \dots \dots v_n(t)]^T \in L_1^n$  avec  $v_i(t) \in L_1 ; i = 1, \dots n$  est donnée par :

$$\|v\|_1 = \int_0^{+\infty} \sum_{i=1}^n |v_i(t)| dt = \sum_{i=1}^n \|v_i(t)\|_1 dt \quad (1-3)$$



### 1.2.5.2 L'espace $L_2$ est la norme $L_2$

On définit l'espace  $L_2$  comme l'ensemble des signaux carrés intégrables [11], [12]. On a  $L_2 = \{v(t) \in R: \int_0^{+\infty} v(t)^2 dt < \infty\}$ . La norme  $L_2$  de signale  $v(t) \in L_2$  set noté par  $\|v\|_2$  et définie par :

$$\|v\|_2 = \sqrt{\int_0^{+\infty} v(t)^2 dt} \quad (1-4)$$

Le carré de cette norme représente l'énergie totale contenue dans le signal. La norme  $L_2$  de signale  $v(t) \in L_2$  peut être calculée, dans le domaine fréquentiel, comme suit :

$$\|v\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |V(j\omega)|^2 dt} \quad (1-5)$$

Avec  $V(j\omega)$  est la transformé de Fourier du signal  $v(t)$ .

Dans le cas de signaux multidimensionnels  $v(t) = [v_1(t) \dots \dots v_n(t)]^T \in L_2^n$  avec  $v_i(t) \in L_2 ; i = 1, \dots n$  est donnée par :

$$\|v\|_2 = \sqrt{\int_0^{+\infty} v(t)^T v(t) dt} = \sqrt{\int_0^{+\infty} \sum_{i=1}^n v_i(t)^2 dt} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \|v_i\|_2^2} \quad (1-6)$$

### 1.2.5.3 L'espace $L_\infty$ est la norme $L_\infty$

On définit l'espace  $L_\infty$  comme l'ensemble des signaux bornés en amplitude [11], [12]. On a  $L_\infty = \{v(t) \in R: \sup_{t \geq 0} |v(t)| < \infty\}$ . La norme  $L_\infty$  de signale  $v(t) \in L_\infty$  set noté par  $\|v\|_\infty$  et définie par :

$$\|v\|_\infty = \sup_{t \geq 0} |v(t)| \quad (1-7)$$

Dans le cas de signaux multidimensionnels  $v(t) = [v_1(t) \dots \dots v_n(t)]^T \in L_\infty^n$  avec  $v_i(t) \in L_\infty ; i = 1, \dots n$  est donnée par :

$$\|v\|_\infty = \text{MAX}_{1 < i < n} \left( \sup_{t \geq 0} |v(t)| \right) = \text{MAX}_{1 < i < n} \|v_i\|_\infty \quad (1-8)$$

## 1.2.6 Normes des systèmes

### 1.2.6.1 La norme $H_2$

Pour les systèmes MIMO stable avec la fonction de transfert  $F(s)$ , on définit la norme  $H_2$  par [11], [12]:

$$\|F\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega} \quad (1-9)$$

Pour les systèmes multi-variables avec la matrice de transfert  $M(s) = [m_{ji}(s)]$ , on définit la norme  $H_2$  par :

$$\begin{aligned} \|M\|_2 &= \sqrt{\sum_{ji} \|m_{ji}\|_2^2} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{ji} |m_{ji}(j\omega)|^2 d\omega} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{ji} m_{ji}(-j\omega)m_{ji}(j\omega) d\omega} \end{aligned} \quad (1-10)$$

Cette norme peut également être exprimée en utilisant les valeurs singulières comme suite :

$$\|M\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=1}^{\min(j,i)} \sigma_n^2(M(j\omega)) d\omega} \quad (1-11)$$

Le carré de la norme  $H_2$  représente l'aire sous la courbe de la somme carrée des valeurs singulières.

### 1.2.6.2 La norme $H_\infty$

Pour les systèmes MIMO stable avec la fonction de transfert  $F(s)$ , on définit la norme  $H_\infty$  par [11], [12]:

$$\|F\|_\infty = \max_{\omega} |F(j\omega)| \quad (1-12)$$

dans le cas où le maximum n'existerait pas, alors :

$$\|F\|_\infty = \sup_{\omega} |F(j\omega)| \quad (1-13)$$

Rappelant que  $F(j\omega)$  est le plus grand facteur par lequel le système amplifie n'importe quel signal sinusoïdal appliqué à son entrée.

Pour les systèmes multi-variables avec la matrice de transfert  $M(s)$ , on définit la norme  $H_\infty$  par :

$$\|M\|_\infty = \sup_{\omega} \|M(j\omega)\|$$

### 1.2.7 Gain $L_2$

Soit le système non linéaire :

$$G = \begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ y = h(x, u) \end{cases} \quad (1-14)$$

On considère la représentation d'état dans (1-14), elle a une  $L_2$ -gain  $\leq \gamma$  si le système est dissipatif par rapport au taux d'approvisionnement [12].

$$s(u, y) = \frac{1}{2}\gamma^2\|u\|^2 - \frac{1}{2}\|y\|^2 \quad (1-15)$$

c'est-à-dire qu'il existe une fonction de stockage  $S$  tel que :

$$S(x(t_1)) - S(x(t_0)) \leq \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} (\gamma^2\|u\|^2 - \|y\|^2) dt \quad (1-16)$$

Pour toutes les fonctions d'entrée  $u$  et toutes les trajectoires d'état résultantes  $x$  et toutes fonctions de sortie  $y$

$$S_x(x) f(x, u) \leq \frac{1}{2}\gamma^2\|u\|^2 - \frac{1}{2}\|h(x, u)\|^2 \cdot \forall x, u \quad (1-17)$$

### 1.2.8 Fonction de sensibilité

Soit un système avec une perturbation [13] :

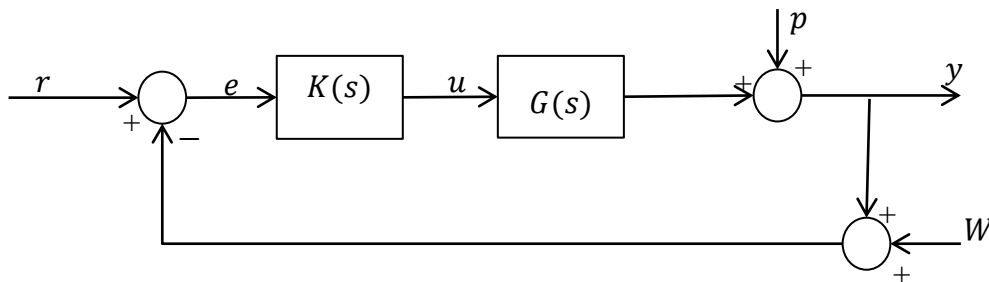


Figure 1-3 : Asservissement en boucle fermée

avec :

$P$  sont les perturbations,  $W$  sont les bruits de mesure,  $K$  est le régulateur,  $G$  est le système à commander,  $r$  est la consigne,  $u$  est la commande,  $Y$  est la sortie.

Pour assurer une robustesse en stabilité, il ne pas laissait le point critique  $(-1)$  sur la gauche de la réponse harmonique de la boucle. Il suffit de garder une certaine distance minimale entre la courbe et le point critique. Nous représentons la fonctions de transfert suivent appelle fonction de sensibilité  $S$ . Le comportement entrée-sortie fait intervenir les fonctions de sensibilité  $S$  et de sensibilité complémentaire  $T$  :

$$T = \frac{y}{r} = \frac{GK}{1 + GK} \quad ; \quad S = \frac{y}{P} = \frac{1}{1 + GK} \quad (1-18)$$

$S$  et  $T$  son complémentaire, c'est-à-dire :  $S + T = 1$

La fonction de sensibilité joue un rôle prépondérant pour quantifier l'amplification des perturbations par la boucle fermée [9].

On considère deux types de fonction de sensibilité :

1. fonction de sensibilité en entrée :

$$S_u(s) = (I + K(s)G(s))^{-1} \quad (1-19)$$

2. fonction de sensibilité en sortie :

$$S_y(s) = (I + G(s)K(s))^{-1} \quad (1-20)$$

### 1.3 Représentation des incertitudes

La création d'un asservissement s'effectue à partir d'un modèle du système réel souvent appelé modèle nominal ou modèle de référence. Ce modèle peut provenir des équations de la physique ou d'un processus d'identification où la réponse fréquentielle est mesurée par un système d'acquisition. En tout cas, ce modèle n'est qu'une approximation de la réalité. Ses lacunes peuvent être multiples : dynamiques et non-linéarités négligées, incertitude sur certains paramètres physiques, hypothèses simplificatrices, erreurs de mesure à l'identification, etc. De plus, certains paramètres du système peuvent changer sensiblement avec le temps ou les conditions de fonctionnement. Enfin, des facteurs externes imprévisibles peuvent venir perturber le fonctionnement du système asservi [14].

On peut distinguer deux classes de facteurs incertains.

1. la première classe comprend les aléas et perturbations externes.
2. la deuxième classe réunit les imperfections et variations du modèle dynamique du système.

Les incertitudes sont alors représentées comme un système LTI perturbateur  $\Delta G(s)$  qui s'ajoute au modèle nominal  $G(s)$  du système réel :

$$G_{réel}(s) = G(s) + \Delta G(s) \quad (1-21)$$

## 1.4 Principes de la commande $H_\infty$ pour les systèmes linéaires

La commande  $H_\infty$  apporte une solution au problème de contrôle avec un certain nombre de contraintes. Elle permet de prendre en compte des spécifications données par le cahier de charge qui peut contenir les spécifications suivantes :

- Suivi de consignes : l'influence de  $r(t)$  sur  $\varepsilon(t)$ .
- Rejet de signaux de perturbation : l'influence de  $b(t)$  sur  $\varepsilon(t)$ .
- Atténuation des bruits de mesure : l'influence de  $W(t)$  et  $u(t)$  sur  $y(t)$
- Commande modérée : l'influence de  $r(t)$  et  $b(t)$  sur  $u(t)$ .

La synthèse  $H_\infty$  impose la conversion de tous les spécifications exprimées dans le domaine temporel vers le domaine fréquentiel [4].

### 1.4.1 Problème $H_\infty$ standard

Sous la forme la plus fondamentale [9], le problème  $H_\infty$  est un problème de réjection de perturbation. Il consiste à minimiser l'effet d'une perturbation  $w$  sur le comportement du système. Le signal  $w$  est supposé d'énergie finie et sa taille est mesurée en norme  $L_2$ . Son effet sur le système est mesuré par la norme  $L_2$  d'un vecteur  $z$ . On peut agir sur le système par une commande  $u$  et on dispose d'une observation  $y$ . Il s'agit donc de synthétiser une loi de commande  $u = K(s)y$  qui minimise l'impact de  $w$  sur  $z$ . On mesurera cet impact par le rapport  $\frac{\|z\|_2}{\|w\|_2}$ . La stabilité interne du système bouclé devra bien sûr être assurée.

La figure 1-4 résume le problème standard de la commande  $H_\infty$  :

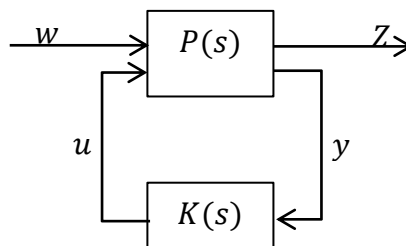


Figure 1-4 : Problème  $H_\infty$  standard

Tel que la forme générale des équations du système est présentée sous la forme standard de la commande  $H_\infty$  comme suit :

$$P(s) = \begin{cases} \dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u \\ z = C_1 x + D_{11} w + D_{12} u \\ y = C_2 x + D_{21} w + D_{22} u \end{cases} \quad (1-22)$$

Avec  $x$  représente le vecteur d'état ; le vecteur  $w$  représente des entrées extérieures, telles que signaux de référence, perturbations, bruits ; le vecteur  $u$  représente les commandes ;  $y$  représente les sorties mesurées pour élaborer la commande ; enfin  $z$  est la sortie objective.

La fonction de transfert  $P(s)$  décrit les interconnexions entre  $w, u, z, y$  :

$$\begin{bmatrix} z(s) \\ y(s) \end{bmatrix} = P(s) \begin{bmatrix} w(s) \\ u(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(s) \\ u(s) \end{bmatrix} \quad (1-23)$$

On appelle  $P(s)$  le système et on le supposera propre. Lorsque ce système est rebouclé sur la commande  $u = K(s)y$ , la matrice de transfert entre  $w$  et  $z$  du système bouclé, est donné par la transformation fractionnaire linéaire (LFT: *Linear Fractional Transformation*) inférieure [4]:

$$F_l(P(s), K(s)) = P_{11}(s) + P_{12}(s)K(s)(I - P_{22}(s)K(s))^{-1}P_{21}(s) \quad (1-24)$$

### 1.4.2 Problème $H_\infty$ optimal

Le problème optimal est consisté à minimiser  $\|F_l(P, K)\|_\infty = \sup_{w \neq 0} \frac{\|z\|_2}{\|w\|_2}$  sur l'ensemble des compensateurs  $K(s)$  qui stabilisent le système de manière interne.

### 1.4.3 Problème $H_\infty$ sous-optimal

$\gamma > 0$  Étant donné, trouver tous les correcteurs  $K(s)$  qui stabilisent le système en boucle fermée de la Figure 1-4 , et assurent  $\|F_l(P, K)\|_\infty < \gamma$ .

La valeur de  $\gamma$  est en général appelée niveau  $H_\infty$  ;  $\gamma_{min}$  est le niveau  $H_\infty$  optimal.

### 1.4.4 Introduction des fonctions de pondération

On définit les fonctions de pondération comme des outils pour atteindre les objectifs de stabilité et de performance. Ces sont appliquées aux différents signaux sous forme de filtres. La Figure 1-5 représente les différents signaux avec ses fonctions de pondération, Nous considérons dans cette figure que l'erreur  $e$  est pondérée par  $W_1(s)$  ; la commande  $u$  par  $W_2(s)$  ; l'entrée de perturbation  $p$  par  $W_3(s)$  .

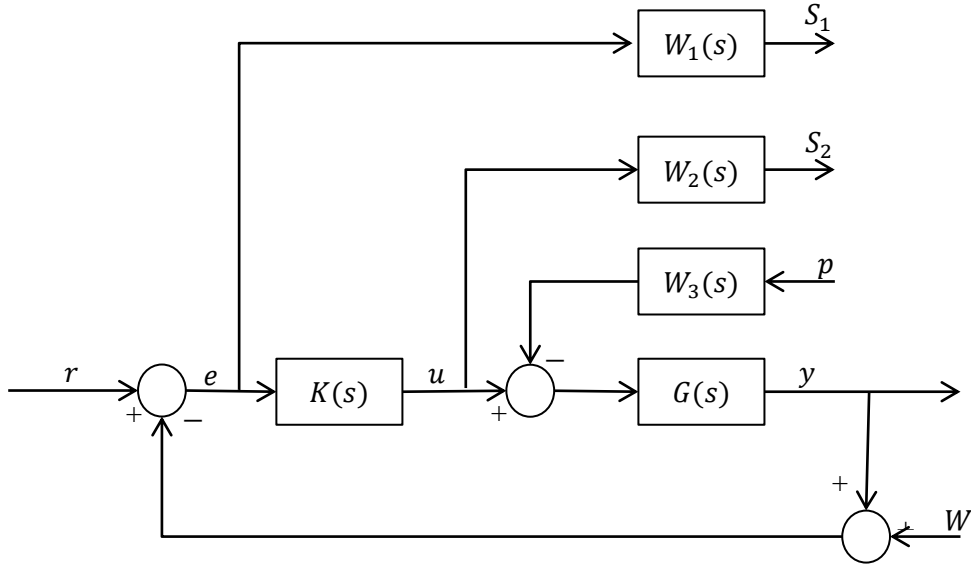


Figure 1-5 : Introduction des fonctions de pondérations

On obtient à présent, en considérant  $r$  et  $p$  comme entrées et  $S_1$  et  $S_2$  comme signaux à surveiller :

$$\begin{bmatrix} S_1(s) \\ S_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_1(s)S_y(s) & W_1(s)S_y(s)G(s)W_3(s) \\ W_2(s)K(s)S_y(s) & W_2(s)K(s)S_y(s)G(s)W_3(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r(s) \\ p(s) \end{bmatrix} \quad (1-25)$$

Avec :  $S_y(s) = (I + K(s)G(s))^{-1}$  est la fonction de sensibilité en sortie.

Le problème  $H_\infty$  correspondant consiste à la détermination d'une valeur de  $\gamma > 0$ , et d'un contrôleur  $K(s)$  qui stabilise le système bouclé et assurant la condition suivante :

$$\left\| \begin{bmatrix} W_1(s)S_y(s) & W_1(s)S_y(s)G(s)W_3(s) \\ W_2(s)K(s)S_y(s) & W_2(s)K(s)S_y(s)G(s)W_3(s) \end{bmatrix} \right\|_\infty < \gamma \quad (1-26)$$

L'avantage de considérer ce problème est de permettre de modéliser plus facilement les transferts  $S_y(s)$ ;  $K(s)S_y(s)$ ;  $S_y(s)G(s)$ ;  $K(s)S_y(s)G(s)$  par les filtres  $W_1(s)$ ;  $W_2(s)$  et  $W_3(s)$ .

Les propriétés de la norme  $H_\infty$  permettent de décomposer l'équation (1-26) pour avoir l'influence des pondérations sur les différentes fonctions de transfert, donc si l'équation (1-16) est vérifiée alors les propriétés suivantes aussi :

- $\|W_1(s)S_y(s)\|_\infty < \gamma \Leftrightarrow \forall \omega \in \mathbb{R}, |S_y(j\omega)| < \frac{\gamma}{W_1(j\omega)}$
- $\|W_2(s)K(s)S_y(s)\|_\infty < \gamma \Leftrightarrow \forall \omega \in \mathbb{R}, |K(j\omega)S_y(j\omega)| < \frac{\gamma}{W_2(j\omega)}$
- $\|W_1(s)W_3(s)S_y(s)G(s)\|_\infty < \gamma \Leftrightarrow \forall \omega \in \mathbb{R}, |S_y(j\omega)G(j\omega)| < \frac{\gamma}{W_1(j\omega)W_3(j\omega)}$

$$- \quad \left\| W_2(s)W_3(s)K(s)S_y(s)G(s) \right\|_{\infty} < \gamma \Leftrightarrow \forall \omega \in \mathbb{R}, \left| K(s)S_y(j\omega)G(j\omega) \right| < \frac{\gamma}{W_2(j\omega)W_3(j\omega)}$$

D'après les relations précédentes on remarque que la réponse fréquentielle de chacune des fonctions  $S_y(j\omega)$ ,  $K(j\omega)S_y(j\omega)$ ,  $S_y(j\omega)G(j\omega)$ ,  $K(j\omega)S_y(j\omega)G(j\omega)$  est forcée par un gabarit qui dépend des filtres choisis  $W_1(j\omega)$ ;  $W_2(j\omega)$ ;  $W_3(j\omega)$ .

### 1.4.5 Choix des fonctions de pondération

Le choix des fonctions de pondération  $W_1(j\omega)$ ;  $W_2(j\omega)$ ;  $W_3(j\omega)$  permis à l'utilisateur agit sur les réponses fréquentielles des transferts  $S_y(j\omega)$ ,  $K(j\omega)S_y(j\omega)$ ,  $S_y(j\omega)G(j\omega)$ ,  $K(j\omega)S_y(j\omega)G(j\omega)$

- $S_y(j\omega)$  doit être choisi faible dans les basses fréquences a pour but d'assurer l'objectif de la précision.
- $K(j\omega)S_y(j\omega)$  doit être choisi faible dans les hautes fréquences pour éviter de solliciter inutilement la commande, ou d'exciter des dynamiques mal modélisées.
- $S_y(j\omega)G(j\omega)$  doit être choisi faible dans les basses fréquences même que les moyennes fréquences pour but d'assurer une réjection correcte de la perturbation.
- $K(j\omega)S_y(j\omega)G(j\omega)$  doit être choisi faible dans les hautes fréquences pour éviter d'exciter inutilement la commande.

Le choix des filtres  $w_i$  est très important [15], il se fait à partir du choix des gabarits. Les filtres ne sont pas nécessairement des fonctions du premier ordre ou d'ordre supérieur, ce sont suivant les conditions du cahier de charges et les besoins du concepteur pour la réalisation du correcteur. Ce sont dans la plupart des cas des filtres passe-bas, ou des filtres passe-haut. Ou bien, il est possible d'accepter des constantes comme des fonctions de pondération.

Pour assurer les hypothèses restrictives de résolution du problème  $H_{\infty}$ , généralement on choisira les fonctions des filtres comme suit :

pour  $W_1(s)$  :

$$W_1(s) = \frac{1}{M_{\varepsilon}} \frac{s + \omega_{\varepsilon} M_{\varepsilon}}{s + \frac{\omega_{\varepsilon}}{\varepsilon}} \quad (1-27)$$



$M_\varepsilon$  est choisie pour garantir une erreur statique faible mais non nulle.  $\omega_\varepsilon$  désigne la bande passante souhaitée est choisie proche de la bande passante minimale désirée.  $\varepsilon$  signifie l'erreur statique autorisée [15], [16].

Pour  $W_2(s)$  :

$$W_2(s) = \frac{1}{M_u} \frac{1 + s/\omega_u}{1 + s/\omega_u M_u} \quad (1-28)$$

$M_\varepsilon$  est choisie faible.  $\omega_u$  pour régler la décroissance du gain du correcteur en hautes fréquences.

Pour  $W_3(s)$  : spécifie le type de perturbation et du bruit à rejeter

$$W_3(s) = C^{cte} \quad (1-29)$$

## 1.5 Problème de sensibilité mixte

L'objectif de problème de sensibilité mixte est de trouver un correcteur  $K(s)$  qui assure la stabilité interne de la boucle. En pratique, le problème de sensibilité mixte est souvent insuffisant pour traiter toutes les spécifications du *Loop shaping*.

La condition qui satisfasse le problème est :

$$\left\| \begin{array}{c} W_1(s)S_y(s) \\ W_2(s)K(s)S_y(s) \\ W_3(s)T(s) \end{array} \right\|_\infty < 1. \quad (1-30)$$

Avec  $S_y(s)$  et  $T(s)$  sont les fonctions de sensibilité de sortie et la fonction de sensibilité complémentaire respectivement.

## 1.6 Résolution du problème $H_\infty$ standard par équations de Riccati (ARE)

Cette méthode, aussi connue sous le nom d'algorithme de Glover-Doyle, est apparue à la fin des années 80. Elle reste aujourd'hui la méthode de résolution la plus utilisée. Nous considérons le système linéaire (Figure I.5) décrit par les équations d'états suivant :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_1w(t) + B_2u(t) \\ z(t) &= C_1x(t) + D_{11}w(t) + D_{12}u(t) \\ y(t) &= C_2x(t) + D_{21}w(t) + D_{22}u(t) \end{aligned} \quad (1-31)$$

Avec  $x \in R^n$  ;  $w \in R^{n_w}$  ;  $u \in R^{n_u}$  ;  $e \in R^{n_e}$  ;  $y \in R^{n_y}$

La résolution du problème  $H_\infty$  standard, par la méthode basée sur l'ARE se baser sur les hypothèses suivantes :

**H 1)**  $(A, B_2)$  est stabilisable et  $(C_2, A)$  est détectable. Cela est nécessaire pour l'existence d'un  $K(s)$ .

**H 2)**  $\text{rang}(D_{12}) = m_2$  et  $\text{rang}(D_{21}) = p_2$ . Ces sont des conditions suffisant pour que la matrice de transfert du correcteur soit propre.

**H 3)** Une mise à l'échelle de  $u$  et  $y$ , ensemble avec une unitaire transformation de  $w$  et  $z$  [r8] nous permettons de supposer sans perte de généralité :  $D_{12} = [0 \ I]^T$  ;  $D_{21} = [0 \ I]$  et  $D_{11} = D_{22} = 0$ . (ne sont pas nécessaires à la résolution du problème).

**H 4)**  $\forall \omega \in \mathbf{R} \quad \text{rang} \begin{bmatrix} A - j\omega I_n & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{bmatrix} = n + m_2$ .

**H 5)**  $\forall \omega \in \mathbf{R} \quad \text{rang} \begin{bmatrix} A - j\omega I_n & B_1 \\ C_2 & D_{21} \end{bmatrix} = n + p_2$ .

Ces conditions nous garantirons que le transfert  $P_{12}(s)$  et  $P_{21}(s)$  respectivement ne sont pas des zéros sur l'axe imaginaire.

Sous les hypothèses H1, H3 et H4. Il existe un contrôleur admissible tel qu'assure la condition (1-17) si et seulement si :

- i. Les matrices Hamiltonienne  $H_\infty$  et  $J_\infty$  ne possèdent pas des valeurs propres sur l'axe imaginaire tel que :

$$H_\infty = \begin{bmatrix} A & \gamma^{-2}B_1B_1^T - B_2B_2^T \\ C_1^T C_1 & -A^T \end{bmatrix} ; J_\infty = \begin{bmatrix} A^T & \gamma^{-2}C_1^T C_1 - C_2^T C_2 \\ -B_1B_1^T & -A \end{bmatrix} \quad (1-32)$$

- ii. Il existe deux matrices positive symétrique  $X_\infty$  et  $Y_\infty$  tel que :

$$X_\infty = Ric(H_\infty) = Y_\infty A^T + AY_\infty + Y_\infty(\gamma^{-2}B_1B_1^T - B_2B_2^T)Y_\infty + C_1^T C_1 = 0 \quad (1-33)$$

$$Y_\infty = Ric(J_\infty) = X_\infty A + A^T X_\infty + X_\infty(\gamma^{-2}C_1^T C_1 - C_2^T C_2)X_\infty + B_1B_1^T = 0 \quad (1-34)$$

- iii. Le module de la plus grande valeur propre satisfait la condition suivante :  $\rho(X_\infty; Y_\infty) < \gamma^2$

Si les conditions i, ii et iii sont satisfaites, l'ensemble de tous les correcteurs rationnels stabilisant le système et satisfaisant  $\|F_l(P(s)K(s))\|_\infty < \gamma$  sont décrits par la LFT :

$$K_\infty(s) = F_l(K_a(s), \Phi(s)) \quad (1-35)$$

Tel que :

$$K_a(s) = \begin{bmatrix} \hat{A}_\infty & -Z_\infty L_\infty & Z_\infty B_2 \\ F_\infty & 0 & I \\ -C_2 & I & 0 \end{bmatrix} \text{ et } \Phi(s) \in \mathfrak{RH}_\infty \text{ arbitraire vérifiant } \|\Phi(s)\|_\infty < \gamma.$$

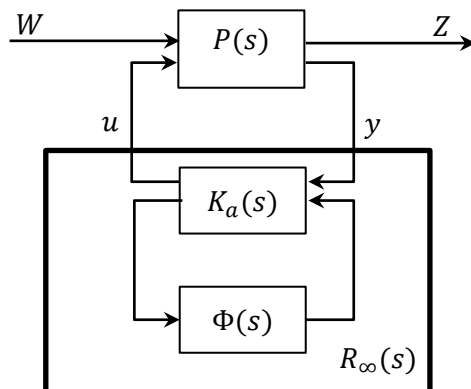


Figure 1-6 : Paramétrisation de la solution du problème sous optimal

Finalement, le correcteur obtenu pour  $\Phi(s) = 0$  appelé correcteur central a pour représentation d'état :

$$K_c = \begin{bmatrix} \hat{A}_\infty & -Z_\infty L_\infty \\ F_\infty & 0 \end{bmatrix} \quad (1-36)$$

avec :

$$\hat{A}_\infty = A + \gamma^{-2} B_1 B_1^T X_\infty + B_2 F_\infty + Z_\infty L_\infty C_2$$

$$F_\infty = -B_2^T X_\infty ; L_\infty = -Y_\infty C_2^T ; Z_\infty = (I_n - \gamma^{-2} Y_\infty X_\infty)^{-1}$$

## 1.7 $\gamma$ - itération

L'algorithme  $\gamma$ -itération nous permettons d'approcher par dichotomie la valeur optimale de  $\gamma$ , en suivant les étapes suivantes [14] :

- 1- On choisit  $[\gamma_{min}, \gamma_{max}]$  tel que :  $\gamma_{min} > \bar{\sigma}(D)$ .
- 2- Pour  $\gamma = 1/2 (\gamma_{min} + \gamma_{max})$ , on forme  $H_\gamma$  et on calcule ses valeurs propres.
  - Si les valeurs propres ne sont pas sur l'axe imaginaire :
  - On diminue  $\gamma$  et on choisit un nouvel intervalle :  $[\gamma_{min}, \gamma]$
  - Si les valeurs propres sont sur l'axe imaginaire :
  - On augmente  $\gamma$  et on choisit un nouvel intervalle :  $[\gamma, \gamma_{max}]$
- 3- On répète ce processus jusqu'à obtenir une approximation de

$$\gamma_\infty = \|G\|_\infty$$

## 1.8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une introduction générale sur la commande robuste. Tous d'abord la théorie de base de la stabilité ainsi que les normes de la commande  $H_\infty$  linéaire, puis la présentation de problème standard de la commande  $H_\infty$ , finalement la méthode de résolution de ce problème basée sur les équations de Riccati par des étapes bien spécifiées.

## Chapitre 2

# Commande $H_\infty$ des systèmes non-linéaires

### 2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons l'extension de la commande  $H_\infty$  linéaire à une commande  $H_\infty$  non linéaire parce que les systèmes sont réellement en générale non linéaire.

Le but de la commande  $H_\infty$  non linéaire est de trouver un correcteur qui stabilise le système de façon interne et ou même temps garantir une stabilité asymptotique du système en boucle fermée et minimise le rapport entre l'énergie des sorties mesurés et l'énergie des entrées exogènes, Ce rapport est appelé par la suite de gain  $L_2$ .

L'objective de ce chapitre est de formuler et résoudre un problème non linéaire pour la commande robuste  $H_\infty$ .

### 2.2 Système dissipatif

Soit le système suivant [17] :

$$G: \begin{cases} \dot{x} = F(x, w, u) \\ z = H(x, w) \end{cases} \quad (2-1)$$

Avec  $w$  est l'entrée exogène,  $z$  la sortie objective,  $u$  est la commande et  $x$  le vecteur d'état avec  $\gamma$  un niveau de tolérance prédéfini. On peut dire que le système est  $\gamma$ -dissipatif s'il existe une fonction d'énergie positive  $V(x)$  telle que  $V(0) = 0$  et :

$$\int_0^T \{\|z\|^2 - \gamma^2 \|w\|^2\} dt \leq V(x(0)) - V(x(T)); -V(x(T)) \leq 0 \quad (2-2)$$

$T$  est l'horizon.

L'inégalité (2-2) signifie que la norme  $H_\infty$  du système est inférieur ou égal à  $\gamma$  si  $T$  approché à l'infini.

L'inégalité (2-2) implique que l'énergie d'entrée est supérieur ou égal à l'énergie de sortie lorsque  $\gamma = 1$ . En d'autres termes, une certaine énergie a été dissipée, donc le système est appelé dissipatif.

### 2.3 Formulation mathématique du problème

L'objectif de la commande  $H_\infty$  non linéaire est de trouver un loi de commande de modèle d'état non linéaire (contrôleur dynamique) tel que le système en boucle fermie reste stable et  $\gamma$ -dissipatif. Soit la forme générale de la loi de commande [8], [14]:

$$K = \begin{cases} \dot{\xi} = A_K(\xi) + B_K(\xi) \\ u = C_K(\xi) \end{cases} \quad (2-3)$$

avec  $\xi$  est le vecteur d'état du correcteur,  $y$  est le vecteur de sortie du système et  $u$  le vecteur de la commande.

### 2.4 Systèmes non-linéaires affins aux entrées

On appelle systèmes non-linéaires affins aux entrées pour chaque système, on peut le représente sous la forme suivent :

$$G: \begin{cases} \dot{x} = f(x(t), t) + g_1(x(t), t)w(t) + g_2(x(t), t)u(t) \\ z = h_1(x(t), t) + D_{11}(x(t), t)w(t) + D_{12}(x(t), t)u(t) \\ y = h_2(x(t), t) + D_{21}(x(t), t)w(t) + D_{22}(x(t), t)u(t) \end{cases} \quad (2-4)$$

Où  $w$  est l'entrée exogène,  $z$  est la sortie objective,  $y$  est la sortie de mesure,  $u$  est la commande et  $x$  est le vecteur d'état.

- **Hypothèses simplificatrices :**

Pour la simplification d'analyse de la commande  $H_\infty$  non linéaire on considère que [8] :

$$D_{11}(x) = D_{22}(x) = 0 \quad (2-5)$$

$$D_{12}(x)^T [h_1(x) \quad D_{12}(x)] = [0 \quad I] \quad (2-6)$$

$$\begin{bmatrix} g_1(x) \\ D_{21}(x) \end{bmatrix} D_{21}(x)^T = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \quad (2-7)$$

### 2.5 Solution du problème $H_\infty$ des systèmes non-linéaires

La résolution du problème de commande  $H_\infty$  non linéaire est impossible si que les hypothèses suivantes soient vérifiées [11], [18]:

**H1** : On définit au voisinage de point  $(0,0)$  qu'il existe des fonctions uniques  $w_*(x, p)$  et  $u_*(x, p)$  qui satisfirent :

$$\frac{\partial H}{\partial w}(x, p, w_*(x, p), u_*(x, p)) = 0 \quad (2-8)$$

$$\frac{\partial H}{\partial u}(x, p, w_*(x, p), u_*(x, p)) = 0 \quad (2-9)$$

tel que :  $w_*(0,0) = 0$  et  $u_*(0,0) = 0$

avec

$$H(x, p, w, u_*(x, p)) \leq H(x, p, w_*(x, p), u_*(x, p)) \leq H(x, p, w_*(x, p), u) \quad (2-10)$$

où  $H$  est la fonction Hamiltonienne définie par :

$$H(x, p, w, u) = P^T F(x, w, u) + \|z(x, u)\|^2 - \gamma^2 \|w\|^2 \quad (2-11)$$

avec :

$$P^T = \dot{V}_x = \frac{\partial V}{\partial x} \quad (2-12)$$

**H2** : Pour tout  $t \geq 0$  :  $H(x, u) = 0$  pour chaque trajectoire  $x(t)$  du système  $\dot{x} = F(x, 0, u)$  tel que  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$

Sous les hypothèses précédentes, et la définition (2.2) alors, la loi de commande est sous la forme [11] :

$$u = -\frac{1}{2} g_2^T \frac{\partial V^T}{\partial x} \quad (2-13)$$

et le contrôleur  $H_\infty$  non linéaire est donné par :

$$K = \begin{cases} \dot{\xi} = A_K(\xi) + B_K(\xi) \\ u = C_K(\xi) \end{cases} \quad (2-14)$$

avec :

$$A_K(\xi) = f(\xi) + \gamma^{-2} g_1(\xi) g_1^T(\xi) X(\xi) + g_1(\xi) C_K(\xi) - B_K(\xi) h_2(\xi) \quad (2-15)$$

$$B_K(\xi) = \frac{\gamma^2 h_2^T(\xi)}{[Y(x) - X(x)]} \quad (2-16)$$

$$C_K(\xi) = -g_2^T(\xi) X(\xi) \quad (2-17)$$

$Y(x)$  et  $X(x)$  sont les solutions des équations d'Hamilton Jacobi qui définit par :

$$H_{FI}(V; x) = \frac{\partial V}{\partial x} f + \frac{1}{4} \frac{\partial V}{\partial x} (\gamma^{-2} g_1 g_1^T - g_2 g_2^T) \frac{\partial V^T}{\partial x} + h_1^T h_1 = 0 \quad (2-18)$$

$$H_{FC}(U; x) = \frac{\partial U}{\partial x} f + \gamma^{-2} h_1^T h_1 - h_2^T h_2 + \frac{1}{4} \frac{\partial U}{\partial x} g_1 g_1^T \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad (2-19)$$

$$\text{avec : } \frac{\partial V}{\partial x} = 2X \text{ et } \frac{\partial U}{\partial x} = 2Y$$

L'équation (2-18) appelée de filtrage, et (2.19) appelée de contrôle.

## 2.6 Solution du problème $H_\infty$ par la méthode des Approximations successives

La conception de loi de commande pour le contrôleur  $H_\infty$  est basée sur la solution des équations Hamilton Jacobi mais n'est pas facile de calcul cette solution, alors on a besoin à des approches pour résoudre ce problème, parmi ces approches on a l'algorithme des approximations successives [11], [19] pour calcul la solution approximée de l'équation Hamilton Jacobi le principe de cette méthode repose sur une discrétisation spatiale dont la mise en œuvre nécessite la linéarisation du système non-linéaire.

On considère la forme générale des systèmes non-linéaires :

$$G: \begin{cases} \dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u \\ z = C_1 x + D_{11} w + D_{12} u \\ y = C_2 x + D_{21} w + D_{22} u \end{cases} \quad (2-20)$$

Avec :

$$A = \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{x=0} ; B_1 = g_1(0) ; B_2 = g_2(0) ; C_1 = \left. \frac{\partial h_1(x)}{\partial x} \right|_{x=0} ; C_2 = \left. \frac{\partial h_2(x)}{\partial x} \right|_{x=0}$$

$$D_{12} = K_{12}(0) ; D_{21} = K_{21}(0)$$

On considère que le système est linéarisé autour de l'origine.

D'après l'égalité suivante, on peut calculer la solution approximée de l'équation Hamilton Jacobi :

$$\begin{aligned} -\frac{\partial V^{(k)}}{\partial x} F_c x = & \sum_{m=2}^{k-1} \frac{\partial V^{(m)}}{\partial x} f_h^{(k-m+1)} + \sum_{m=3}^{k-1} \frac{\partial V^{(k-m+2)}}{\partial x} \frac{1}{4} R_s \frac{\partial V^{(m)}}{\partial x} \\ & + \sum_{n=1}^{k-2} \sum_{m=2}^{k-n} \frac{\partial V^{(k-n-m+2)}}{\partial x} R_h^{(n)} \frac{\partial V^{(m)}}{\partial x} + Q_h^{(k)} \end{aligned} \quad (2-21)$$



$f_h; R_h; Q_h$  sont calculées comme suit :

$$f(x) = Ax + f_h(x) \quad (2-22)$$

$$\frac{1}{4}(\gamma^{-2}g_1(x)g_1^T(x) - g_2(x)g_2^T(x)) = \frac{1}{4}(\gamma^{-2}B_1B_1^T - B_2B_2^T) + R_h(x) \quad (2-23)$$

$$h_1^T(x)h_1(x) = x^T C_1^T C_1 x + Q_h(x) \quad (2-24)$$

$$f_h(x) = O(x^2); R_h(x) = O(x); Q_h(x) = O(x^3)$$

$O(x^n)$  : est le symbole de Landau généralisé d'ordre  $n$ .

Avec  $k \geq 3$  est un nombre entier et  $F_c = A + R_s X$

ou  $X$  représente la solution de l'équation de Riccati suivant :

$$A^T X + XA + X(\gamma^{-2}B_1B_1^T - B_2B_2^T)X + C_1^T C_1 = 0 \quad (2-25)$$

$$R_s = \gamma^{+2}B_1B_1^T - B_2B_2^T \quad (2-26)$$

On peut établir une série d'équations linéaires en comparant les coefficients des deux membres de l'égalité (2-21).  $V^{(k)}$  est la solution unique de toutes ces équations linéaires.

Pour chaque  $k$  :

$$V^{[k]}(x) = \sum_{m=2}^k V^{(m)}(x) = x^T X x + \sum_{m=3}^k V^{(m)}(x) \quad (2-27)$$

$(\bullet)^{(k)}$  : est un terme d'ordre  $k$

$(\bullet)^{[k]}$  : est un terme d'ordre  $k$  accumulé incluant  $x^k$

$$\frac{\partial V^{[k]}}{\partial x} = 2x^T X + \sum_{m=3}^k \frac{\partial V^{(m)}}{\partial x} \quad (2-28)$$

$\frac{\partial V^{(m)}}{\partial x}$  : est d'ordre  $m - 1$ .

Alors, la solution approximée de l'équation Hamilton Jacobi est comme suit :

$$X^{[k-1]}(x) = \frac{1}{2} \frac{\partial^T V^{[k]}}{\partial x} = Xx + \frac{1}{2} \sum_{m=3}^k \frac{\partial^T V^{(m)}}{\partial x} = X^{[k-2]}(x) + \frac{1}{2} \frac{\partial^T V^{(k)}}{\partial x} \quad (2-29)$$

### 2.6.1 Algorithme de la méthode

On considère les étapes de l'algorithme de la méthode des Approximations successives comme suite [20] :

- 1- Linéarisation du model du système non linéaire autour de l'origine
- 2- Calcul de la solution  $X$  de l'équation de Riccati (2-25) et de  $\gamma$  optimal
- 3- Initialisation de la solution de l'équation de Hamilton-Jacobi  $\frac{\partial V^k}{\partial x} = 2x^T X$
- 4- Fixer le vecteur de tolérance  $\varepsilon$
- 5- Fixer le nombre d'itérations  $N$
- 6- Calcul des approximations successives, en comparant les coefficients de l'équation (2-21)
- 7- Calcul de la solution approximé de l'équation d'Hamilton Jacobi (2-29)
- 8- Si :  $X^{[k-1]}(x) - X^{[k-2]}(x) \leq \varepsilon$   
Calculer de la commande :  $u = -g_2^T(x)X^{[k-1]}(x)$   
Sinon :  $k = k + 1$
- 9- Si :  $k \leq N + 3$   
Recommencer les étapes 6 et 7  
Sinon : calculer la commande :  $u = -g_2^T(x)X^{[k-1]}(x)$

### 2.7 Solution du problème $H_\infty$ par la méthode des inégalités matricielles non-linéaires

Parmi les méthodes de résolution de problème standard qui développe pour une classe particulière de systèmes non linéaires que ce sont appelé système non linéaire à paramètres variants (LPV) [11]; même que ne nécessite pas le respect des hypothèses H2-H3-H4 mais l'hypothèse H1 reste nécessaire [4].

On définit le système sous la représentation (2-20). Le problème  $H_\infty$  non linéaire a une solution si et seulement si deux matrices symétriques définies positives  $R$  et  $S$  tel que :

$$\begin{bmatrix} N_R & 0 \\ 0 & I_{nw} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} AR + RA^T & RC_1^T & B_1 \\ C_1 R & -\gamma I_{ne} & D_{11} \\ B_1^T & D_1^T & -\gamma I_{nw} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_R & 0 \\ 0 & I_{nw} \end{bmatrix} < 0 \quad (2-30)$$

$$\begin{bmatrix} N_S & 0 \\ 0 & I_{ne} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} AS + SA^T & SC_1^T & C_1^T \\ B_1^T S & -\gamma I_{nw} & D_{11}^T \\ C_1 & D_1 & -\gamma I_{ne} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_S & 0 \\ 0 & I_{ne} \end{bmatrix} < 0 \quad (2-31)$$

$$\begin{bmatrix} R & I_n \\ I_n & S \end{bmatrix} \geq 0 \quad (2-32)$$

Ou  $N_R$  et  $N_S$  constituent une base des noyaux de  $(B_2^T D_{12}^T)$  et  $(C_2 D_{21})$  respectivement. L'existence des correcteurs d'ordre  $r < n$  si et seulement si les LMI (2-30)(2-31)(2-32) sont vérifiées par des matrices  $R$  et  $S$  et satisfaisant la condition supplémentaire:

$$\text{rang} \begin{bmatrix} R & I_n \\ I_n & S \end{bmatrix} \leq n + r \leftrightarrow \text{rang}(I_n - RS) \leq r \quad (2-33)$$

Les trois inégalités matricielles parmi de tester la faisabilité par le lemme borné réel(BRL) :

On suppose un système linéaire  $G = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$  :

1-  $\|D + C(SI - A)^{-1}B\|_\infty < \gamma$  et  $\text{Re}(\lambda_i(A)) < 0 ; i = 1, 2 \dots$

2- Il existe une solution  $X > 0$  de :

$$\begin{bmatrix} A^T X + XA & XB & C^T \\ B^T X & -\gamma I & D^T \\ C & D & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (2-34)$$

On peut également rechercher directement la valeur de  $\gamma$  minimum, en résolvant le problème suivant, qui est un problème d'optimisation convexe :

$$\min_{R=R^T, S=S^T} \gamma \text{ sous } (2-30); (2-31); (2-32) \quad (2-35)$$

On définit la forme particulière de contrôleur suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_c(t) = A_c x_c(t) + B_c y(t) \\ u(t) = C_c x_c(t) + D_c y(t) \end{cases} \quad (2-36)$$

ou  $x_c$  le vecteur d'état du correcteur,  $y(t)$  la sortie du système, et  $u(t)$  le vecteur de commande.

Le système bouclé  $F_b(P(s); K(s))$  a pour représentation d'état :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_c \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + B_2 D_c C_2 & B_2 C_c & B_1 + B_2 D_c D_{21} \\ B_c C_2 & A_c & B_c D_{21} \\ C_1 + D_{12} D_c C_2 & D_{12} C_c & D_{11} + D_{12} D_c D_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_c \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_f & B_f \\ C_f & D_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_c \\ w \end{bmatrix} \quad (2-37)$$

Comme conséquence du lemme borné réel, la norme  $H_\infty$  est inférieure à  $\gamma$  si et seulement l'inégalité matricielle suivante est vérifiée :

$$\begin{bmatrix} A_f^T X + X A_f & X B_f & C_f^T \\ B_f^T X & -\gamma I & D_f^T \\ C_f & D_f & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (2-38)$$

La matrice  $X$  qui convient peut être calculée en effectuant une décomposition en valeurs singulières de  $I_n - RS$  d'où on déduit deux matrices  $M, N$  de rang plein qui vérifient :

$$MN^T = I_n - RS \quad (2-39)$$

Qui nous permettons de déterminer la matrice :

$$X = \begin{bmatrix} S & N \\ N^T & -M^+RN \end{bmatrix} \quad (2-40)$$

Avec  $M^+$  désigne la pseudo-inverse de  $M$  ( $M^+M = I_r$ ).

En remplaçant  $X$  par sa valeur dans l'inégalité (2-37) ; alors l'inégalité (2-37) devient une LMI en  $B_c, C_c, D_c$ , dont la résolution donc nous fournissons un correcteur.

## 2.8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons exposé l'aspect théorique de problématique de la commande  $H_\infty$  non linéaire ; nous avons défini le système dissipatif ensuite nous avons présenté la théorie pour l'obtention d'une loi de commandes robustes par la méthode des Approximations successives qui nous donne une solution approximée de l'équation Hamilton Jacobi puis la méthode des inégalités matricielles non linéaires pour la résolution de ce dernier.

## Chapitre 3

# Commande $H_\infty$ non-linéaire d'un hélicoptère à 2DOF

### 3.1 Introduction

Le but de ce chapitre est d'illustrer les méthodes proposées dans ce travail sur modèle réaliste : l'hélicoptère à 2-DOF. Le modèle que nous avons choisi est fourni par Quanser [21], a été très largement étudié dans la littérature [22].

Le modèle de l'hélicoptère à 2-DOF nous sert d'application pour démontrer l'intérêt des méthodes de commande non linéaire pour un problème réaliste. Notre objectif n'est pas d'étudier entièrement la modélisation de l'hélicoptère mais plutôt de mettre en évidence l'intérêt de la commande robuste  $H_\infty$  pour les systèmes non-linéaires et de détailler leur mise en œuvre afin d'illustrer un certain nombre de techniques présentés dans ce mémoire.

Le reste de ce chapitre est organisé comme suit : Dans la première section, nous avons donné le modèle mathématique non linéaire de 2-DOF puis la linéarisation de ce dernier et dans la deuxième section, nous avons construit la synthèse de la commande par le cahier des charges, finalement les résultats de simulation et la comparaison entre la commande robuste et la commande LQR sont la section trois.

### 3.2 Description du prototype Quanser AERO

Le prototype Quanser AERO (Figure 3-1) est un simulateur d'hélicoptère à 2-DOF (2 *degrees of freedom*) réelle mais sur une base fixe, L'hélicoptère comporte deux hélices montées perpendiculairement les unes aux autres qui sont toutes deux actionnées par des moteurs à courant continu. Cette configuration émule la configuration commune de l'hélicoptère avec un rotor principal et un rotor de queue anti-couple. Le mécanisme de collecteur tournant sur l'axe vertical permet au corps de tourner librement autour de l'angle de lacet (*yaw*) en éliminant les fils qui relient les moteurs et les codeurs à la base. Le retour d'état du système (les ongles) ce fait par des encodeurs à haute résolution (capteur d'ongle).

A l'origine, le Quanser AERO est contrôlé par un logiciel fourni avec le matériel fonctionnant sous Matlab Simulink [21].

En effet, l'hélicoptère à 2-DOF est un système multivariable à deux entrées et deux sorties (MIMO), les deux entrées sont les tensions appliquées aux moteurs, les deux sorties sont l'angle d'élévation  $\theta$  et l'angle d'azimut .



Figure 3-1: Quanser 2-DOF

Les composants de 2-DOF :

Tableau 3-1 : Composants de 2-DOF

Numéro	Composant
1	hélices interchangeables
2	garde de sécurité pour les hélices
3	hélices à angle réglable (horizontal vers vertical)
4	mesure d'inertielle par l'accéléromètre et gyroscope
5	encodeur d'azimut
6	Index de contrôlabilité par l'utilisateur (LED couleur)
7	Interface de connexion USB et alimentation
8	illimite 360° de rotation dans l'axe d'azimut
9	Moteur DC avec encodeur
10	Encodeur d'élévation

### 3.3 Modélisation du Quanser 2-DOF

Nous considérons le modèle de l'hélicoptère défini par Quanser [21]. Les angles  $\theta$  et  $\varphi$  représentent les angles de tangage (*pitch*) et de lacet (*yaw*), respectivement.

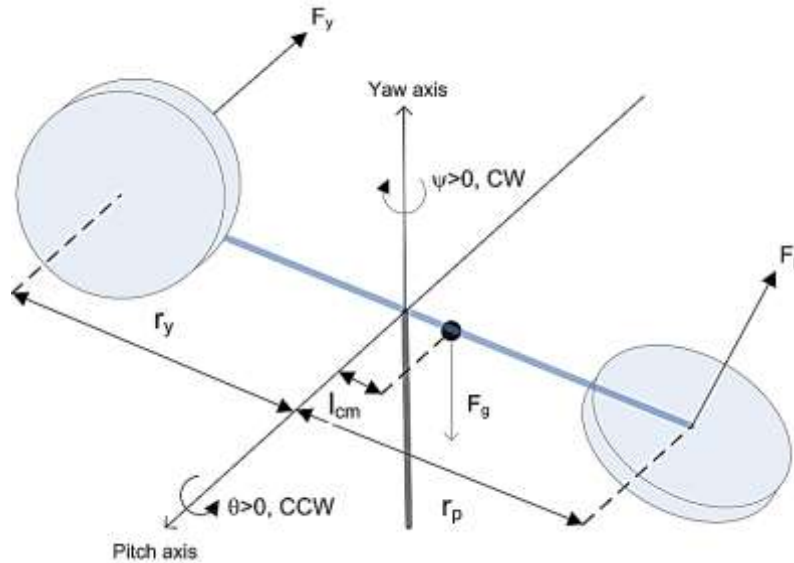


Figure 3-2 : Model dynamique de Quanser 2-DOF

Les conventions utilisées pour la modélisation d'hélicoptère à 2 DOF sont [21]:

- L'hélicoptère est horizontal lorsque l'angle tangage est  $\theta = 0^\circ$ .
- L'angle tangage augmente positivement,  $\theta(t) > 0^\circ$ , lorsque le déplacement est vers le haut et le corps de 2-DOF tourne dans le sens négative.
- L'angle de lacet augmente positivement,  $\varphi(t) > 0^\circ$ , lorsque le corps tourne dans le sens horaire
- L'angle tangage augmente positivement,  $\theta(t) > 0^\circ$ , lorsque la force de poussée de tangage est positive  $F_p > 0$
- L'angle de lacet augmente positivement,  $\varphi(t) > 0^\circ$ , lorsque la force de poussée de lacet est positive  $F_y > 0$

La position du centre de masse est obtenue par la transformation de coordonnées et est donnée par :

$$X_c = l \cos \theta \sin \varphi \quad ; \quad Y_c = -l \cos \theta \sin \varphi \quad ; \quad Z_c = l \sin \theta. \quad (3-1)$$

L'énergie potentielle ( $P$ ) en raison de la gravité et l'énergie cinétique totale ( $T$ ) en raison du moment d'inertie sont donnés par :

$$P = mgl \sin \theta \quad ; \quad T = T_{r.el} + T_{r.az} + T_t \quad (3-2)$$

avec :

$$T_{r.el} = \frac{1}{2}J_{eq.el}\dot{\theta}^2 ; \quad T_{r.az} = \frac{1}{2}J_{eq.az}\dot{\varphi}^2 ; \quad T_t = \frac{1}{2}m(\dot{X}_c^2 + \dot{Y}_c^2 + \dot{Z}_c^2) \quad (3-3)$$

et :

$$\dot{X}_c = \frac{\partial X_c}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial X_c}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial t} = -l\dot{\varphi} \cos \theta \sin \varphi - l\dot{\theta} \cos \varphi \sin \theta. \quad (3-4)$$

$$\dot{X}_c^2 = l^2(\dot{\varphi}^2 \cos^2 \theta \sin^2 \varphi + 2 \dot{\theta} \dot{\varphi} \cos \theta \sin \theta \cos \varphi \sin \varphi + \dot{\theta}^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \theta). \quad (3-5)$$

$$\dot{Y}_c = \frac{\partial Y_c}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial Y_c}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial t} = -l\dot{\varphi} \cos \theta \cos \varphi + l\dot{\theta} \sin \varphi \sin \theta. \quad (3-6)$$

$$\dot{Y}_c^2 = l^2(\dot{\varphi}^2 \cos^2 \theta \sin^2 \varphi - 2 \dot{\theta} \dot{\varphi} \cos \theta \sin \theta \cos \varphi \sin \varphi + \dot{\theta}^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \theta). \quad (3-7)$$

$$\dot{Z}_c = \frac{\partial Z_c}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial Z_c}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial t} = l\dot{\theta} \cos \theta. \quad (3-8)$$

$$\dot{Z}_c^2 = l^2 \dot{\theta}^2 \cos^2 \theta. \quad (3-9)$$

En remarque que :

$$\dot{X}_c^2 = -\dot{Y}_c^2 - \dot{Z}_c^2 + l^2(\dot{\varphi}^2 \cos^2 \theta + \dot{\theta}^2). \quad (3-10)$$

En remplace les résultats dans l'équation (3-3) puis dans l'équation (3-2) en va trouver :

$$T = \frac{1}{2}J_{eq.el}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}J_{eq.az}\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}ml^2(\dot{\varphi}^2 \cos^2 \theta + \dot{\theta}^2). \quad (3-11)$$

Donc les équations de mouvement d'Euler-Lagrange sont définies par :

$$Q_1 = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} ; \quad Q_2 = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi}. \quad (3-12)$$

Avec L est l'équation d'Euler-Lagrange qui définit par :  $L = T - P$  et elle calcule depuis les équations(3-13).



$$L = T - P = \frac{1}{2}J_{eq.el}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}J_{eq.az}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}ml^2(\dot{\phi}^2\cos^2\theta + \dot{\theta}^2) - mgl\sin\theta \quad (3-13)$$

$$Q_1 = J_{eq.el}\ddot{\theta} + ml^2\ddot{\theta} + mgl\cos\theta + ml^2\dot{\phi}^2\cos\theta\sin\theta. \quad (3-14)$$

$$Q_2 = J_{eq.az}\ddot{\phi} + ml^2\ddot{\phi}\cos^2\theta + 2ml^2\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta\sin\theta. \quad (3-15)$$

Avec :

$$Q_1 = K_{p.el}V_{m.el} + K_{p.az}V_{m.az} - B_{el}\dot{\theta} ; \text{ et } Q_2 = K_{y.el}V_{m.el} + K_{y.az}V_{m.az} - B_{az}\dot{\phi}. \quad (3-16)$$

Le model non linéaire du système est :

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{J_{eq.el} + ml^2} [(K_{p.el}V_{m.el} + K_{p.az}V_{m.az}) - (B_{el}\dot{\theta} + mgl\cos\theta + ml^2\dot{\phi}^2\cos\theta\sin\theta)]. \quad (3-17)$$

$$\ddot{\phi} = \frac{1}{J_{eq.az} + ml^2\cos^2\theta} [(K_{y.el}V_{m.el} + K_{y.az}V_{m.az}) - (B_{az}\dot{\phi} + 2ml^2\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta\sin\theta)]. \quad (3-18)$$

Soit le vecteur d'état :

$$x = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T = [\theta \ \phi \ \dot{\theta} \ \dot{\phi}]^T \quad (3-19)$$

alors la représentation d'état est :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_3 \\ \dot{x}_2 &= x_4 \\ \dot{x}_3 &= \ddot{\theta} = \frac{1}{J_{eq.el} + ml^2} [(K_{p.el}V_{m.el} + K_{p.az}V_{m.az}) - (B_{el}\dot{\theta} + mgl\cos\theta + ml^2\dot{\phi}^2\cos\theta\sin\theta)] \\ \dot{x}_4 &= \ddot{\phi} = \frac{1}{J_{eq.az} + ml^2\cos^2\theta} [(K_{y.el}V_{m.el} + K_{y.az}V_{m.az}) - (B_{az}\dot{\phi} + 2ml^2\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta\sin\theta)] \end{aligned} \quad (3-20)$$

avec :

$$V_{m.el} = U_1 ; V_{m.az} = U_2 \quad (3-21)$$

Donc la forme générale d'un système non linéaire s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u) \\ y &= g(x, u) \end{aligned} \quad (3-22)$$

### 3.3.1 Model linéarisé du système

Soit la forme générale de la représentation d'état du système linéaire suivante :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \quad (3-23)$$

Avec :

$$x = [\theta \ \varphi \ \dot{\theta} \ \dot{\varphi}]^T ; \dot{x} = [\dot{\theta} \ \dot{\varphi} \ \ddot{\theta} \ \ddot{\varphi}]^T ; u = [U_1 \ U_2]^T ; y = [\theta \ \varphi]^T \quad (3-24)$$

On a les deux équations non-linéaires suivant :

$$\begin{aligned} Q_1 &= J_{eq.el} \ddot{\theta} + ml^2 \ddot{\theta} + mgl \cos \theta + ml^2 \dot{\varphi}^2 \cos \theta \sin \theta \\ &= K_{p.el} V_{m.el} + K_{p.az} V_{m.az} - B_{el} \dot{\theta}. \end{aligned} \quad (3-25)$$

$$\begin{aligned} Q_2 &= J_{eq.az} \ddot{\varphi} + ml^2 \ddot{\varphi} \cos^2 \theta + 2ml^2 \dot{\theta} \dot{\varphi} \cos \theta \sin \theta \\ &= K_{y.el} V_{m.el} + K_{y.az} V_{m.az} - B_{az} \dot{\varphi}. \end{aligned} \quad (3-26)$$

On remarque que la partie droite des deux équations est linéaire par contre la partie gauche par la considération du point d'équilibre de système égale à :

$$x_{eq} = (\bar{\theta}; \bar{\varphi}; \bar{\dot{\theta}}; \bar{\dot{\varphi}}) = (0; 0; 0; 0). \quad (3-27)$$

Par l'utilisation de la loi générale de la linéarisation on trouve :

$$\begin{aligned} Q_{1lin}(X) &= Q_1(x_{eq}) + \left. \frac{\partial Q_1(X)}{\partial \theta} \right|_{X=x_{eq}} (\theta - \bar{\theta}) + \left. \frac{\partial Q_1(X)}{\partial \varphi} \right|_{X=x_{eq}} (\varphi - \bar{\varphi}) \\ &\quad + \left. \frac{\partial Q_1(X)}{\partial \dot{\theta}} \right|_{X=x_{eq}} (\dot{\theta} - \bar{\dot{\theta}}) + \left. \frac{\partial Q_1(X)}{\partial \dot{\varphi}} \right|_{X=x_{eq}} (\dot{\varphi} - \bar{\dot{\varphi}}). \end{aligned} \quad (3-28)$$

$$\begin{aligned} Q_{2lin}(X) &= Q_2(x_{eq}) + \left. \frac{\partial Q_2(X)}{\partial \theta} \right|_{X=x_{eq}} (\theta - \bar{\theta}) + \left. \frac{\partial Q_2(X)}{\partial \varphi} \right|_{X=x_{eq}} (\varphi - \bar{\varphi}) \\ &\quad + \left. \frac{\partial Q_2(X)}{\partial \dot{\theta}} \right|_{X=x_{eq}} (\dot{\theta} - \bar{\dot{\theta}}) + \left. \frac{\partial Q_2(X)}{\partial \dot{\varphi}} \right|_{X=x_{eq}} (\dot{\varphi} - \bar{\dot{\varphi}}). \end{aligned} \quad (3-29)$$

$$Q_{1lin}(X) = \ddot{\theta}_{lin} = \frac{1}{J_{eq.el} + ml^2} [-B_{el} \dot{\theta} + K_{p.el} V_{m.el} + K_{p.az} V_{m.az}]. \quad (3-30)$$

$$Q_{2lin}(X) = \ddot{\phi}_{lin} = \frac{1}{J_{eq.az} + ml^2} [-B_{az}\dot{\phi} + K_{y.el}V_{m.el} + K_{y.az}V_{m.az}]. \quad (3-31)$$

Donc on a la représentation linéaire :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{-B_{el}}{J_{eq.el} + ml^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-B_{az}}{J_{eq.az} + ml^2} \end{bmatrix} \quad (3-32)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{K_{p.el}}{J_{eq.el} + ml^2} & \frac{K_{p.az}}{J_{eq.el} + ml^2} \\ \frac{K_{y.el}}{J_{eq.az} + ml^2} & \frac{K_{y.az}}{J_{eq.az} + ml^2} \end{bmatrix}. \quad (3-33)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3-34)$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3-35)$$

Les valeurs numériques correspondant aux grandeurs présentées sont données dans le tableau 3-2 d'après les données de Quanser [21].

Tableau 3-2 : Paramètres du model Quanser 2-DOF

variable	désignation	valeur	unité
$m$	Masse du corps	1.3872	$Kg$
$l$	Longueur du corps	0.1857	$m$
$g$	gravité	9.81	$N.m$
$J_{eq.el}$	Moment d'inertie du rotor d'élévation	0.0219	$Kg.m^2$
$J_{eq.az}$	Moment d'inertie du rotor d'azimut	0.0220	$Kg.m^2$
$B_{el}$	Amortissement visqueux d'élévation	0.0071116	$N.ms/rad$
$B_{az}$	Amortissement visqueux d'azimut	0.0220	$N.ms/rad$
$K_{p.el}$	Constante couple de poussée	0.0011	$N.m/V$
$K_{p.az}$	Poussée agissant sur l'élévation à partir de l'azimut	0.0021	$N.m/V$
$K_{y.el}$	Poussée agissant sur l'azimut à partir de l'élévation	-0.0027	$N.m/V$
$K_{y.az}$	Constante couple de poussée	0.0022	$N.m/V$

### 3.4 Cahier des charges

Durant la phase de vol, l'objectif de la commande est de suivre des consignes précises

Nous considérons le cahier des charges qui demande de :

1. suivre la trajectoire de référence : un temps de réponse minimum, le dépassement inférieur à 30 % et en régime permanent l'erreur inférieure à 5% ;
2. assurer une amplitude de la commande raisonnable ;
3. assurer la stabilité du modèle ;
4. assurer la robustesse vis-à-vis de dynamiques négligées ;
5. assurer la robustesse vis-à-vis d'incertitudes paramétriques sur les coefficients aérodynamiques.
6. Rejeter la perturbation du vent ;

Il faudra aussi prendre en compte des bruits sur les mesures

### 3.5 Synthèse de commande par la méthode de la sensibilité mixte

La conception de la commande des hélicoptères à 2 DOF est une tâche délicate puisque la dynamique du système est fortement non linéaire et pleinement couplée, et également sujette aux incertitudes paramétriques.

Nous allons synthétiser un correcteur à l'aide de la méthode de la sensibilité mixte donc il s'agit de nous traduisions le cahier de charge que nous souhaitons sous forme des gabarits sur un certain nombre de transferts en boucle fermé, on déduire les pondérations à appliquer puis de synthétiser le correcteur qui minimise la norme  $H_\infty$  du système augmenté en boucle fermée. Alors si la valeur de  $\gamma$  obtenue dépasse l'unité (1) donc le cahier de charge n'est pas satisfait, alors il est nécessaire de nous relâchons quelques contraintes et de refaire la synthèse. Sinon ( $\gamma \ll 1$ ) cela signifie que les performances pourraient être augmentées par rapport à ce qui a été spécifié lors de la synthèse.

### 3.5.1 Choix des fonctions de pondération

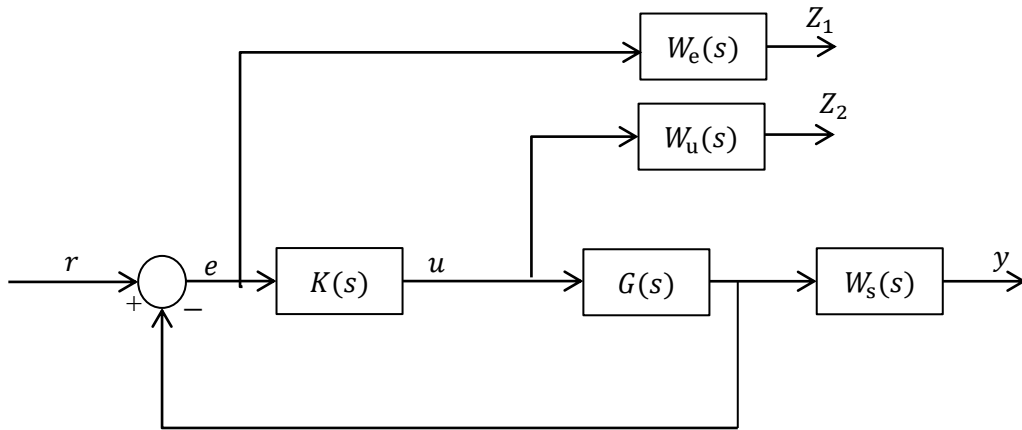


Figure 3-3 : Système en boucle fermée avec correcteur et fonction des pondérations

Comme nous avons déjà signalé que pour construire un contrôleur  $H_\infty$  il faut tout d'abord déterminons une structure ainsi que des gabarits qui permettent de définir les spécifications.

Nous avons choisi la fonction de pondération  $W_e$  comme une fonction d'un filtre passe-bas a pour but de fixer les performances du système :

$$W_e = \begin{bmatrix} W_{e1} & 0 \\ 0 & W_{e2} \end{bmatrix} \quad (3-36)$$

Tel que :

$$W_{e1} = \frac{4s + 9.667}{2s + 0.008437} \quad ; \quad W_{e2} = \frac{3.5s + 10.67}{3s + 0.008437} \quad (3-37)$$

Par contre, la fonction  $W_s$  est choisie comme un filtre passe-haut qui permet de rejeter des bruits en haute fréquence :

$$W_s = \begin{bmatrix} W_{s1} & 0 \\ 0 & W_{s2} \end{bmatrix} \quad (3-38)$$

Tel que :

$$W_{s1} = W_{s2} = \frac{s^2 + 1.2s + 0.0044}{s^2 + 1.65s + 0.25} \quad (3-39)$$

Ainsi, pour la fonction de pondération  $W_u$  nous avons choisi :

$$W_u = \begin{bmatrix} W_{u1} & 0 \\ 0 & W_{u2} \end{bmatrix} \quad (3-40)$$

Tel que :

$$W_{u1} = \frac{s + 1e - 07}{s + 18.1} \quad ; \quad W_{u2} = \frac{s + 1e - 11}{s + 36} \quad (3-41)$$

L'organigramme du calcul de la commande basé sur la sensibilité mixte est présenté sur la figure 3-4.

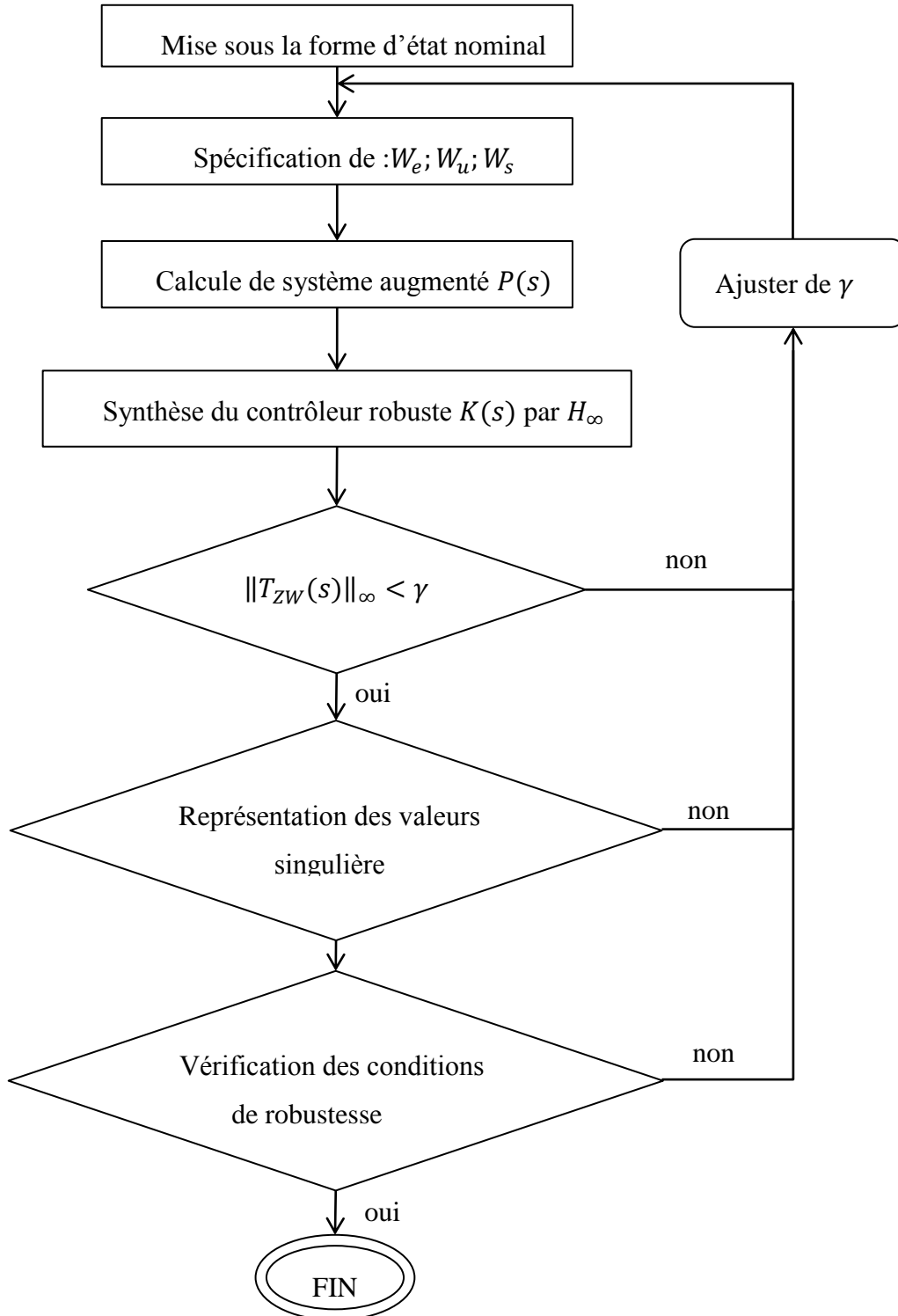


Figure 3-4 : Organigramme de la commande basé sur la sensibilité mixte

### 3.6 La commande Linéaire Quadratique (LQR)

On parle de commande linéaire quadratique [23]: LQ ou LQR (linear Quadratic regulator), le système est linéaire et la commande est quadratique, la commande optimale est un retour d'état sous la forme:

$$u(t) = -kx(t) \quad (3-42)$$

La commande LQR permet de calculer une loi de commande linéaire optimale grâce à une fonction de coût  $J$ , que LQR minimise.  $Q$  et  $R$  sont alors les matrices de pondération de  $x$  et  $u$  de la fonction de coût.

Pour trouver le gain du retour  $K$  en temps infini, on applique la formule suivante :

$$K = (R + B^T P B)^{-1} B^T P A \quad (3-43)$$

$P$  est obtenu par la résolution de l'équation de Riccati :

$$P = Q + A^T (P - P B (R + B^T P B)^{-1} B^T P) A = 0 \quad (3-44)$$

Pour notre système on a choisi les matrices  $Q$  et  $R$  comme suit :

$$Q = \begin{bmatrix} 200 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3-45)$$

$$R = 0.005 * \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3-46)$$

Donc on a obtenu la forme de correcteur suivant :

$$k = \begin{bmatrix} 161.4714 & -168.0590 & 41.8815 & -38.4857 \\ 253.5669 & 108.4258 & 58.5867 & 22.6110 \end{bmatrix} \quad (3-47)$$

### 3.7 Résultats de simulations

A l'aide de logiciel MATLAB / SIMULINK, nous avons simulé le fonctionnement de Quanser 2-DOF par l'utilisation de modèle mathématique qui on a élaboré dans la partie

précédente. La simulation de l'application de la commande  $H_\infty$  linéaire est basée sur le problème de sensibilité mixte.

La Figure 3-5 représente le schéma bloc globale de la commande basée sur la sensibilité mixte.

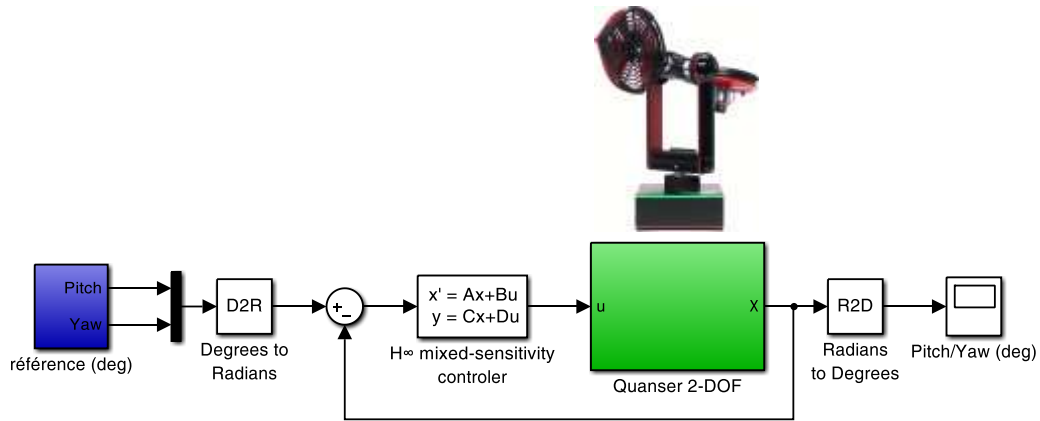


Figure 3-5 : Schéma bloc de la commande  $H_\infty$  basée sur la sensibilité mixte

L'inverse de la fonction de pondération  $W_e$  admette des valeurs faibles dans les basses fréquences et des valeurs supérieures dans les hautes fréquences. Mais par contre que l'inverse de la fonction de pondération  $W_s$  admette des valeurs supérieures dans les basses fréquences et des valeurs faibles dans les hautes fréquences.

Les figures 3-6, 3-7 et 3-8 représentent les diagrammes de Bode des inverses de  $W_e$ ,  $W_s$  et  $W_u$ .



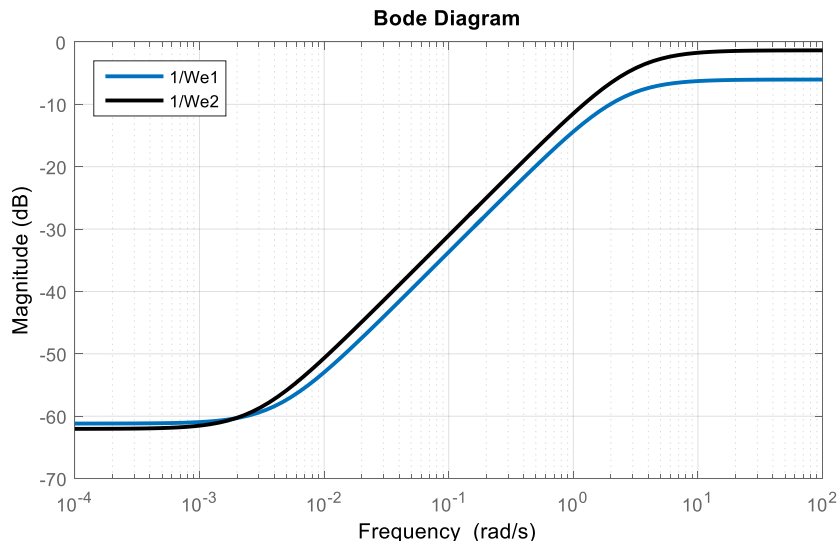


Figure 3-6: Diagramme de Bode de l'inverse de fonction de pondération  $W_e$

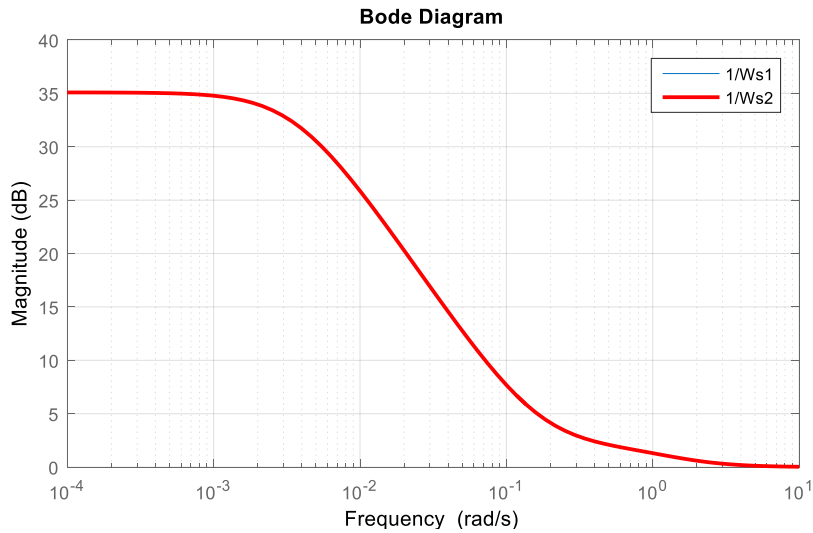


Figure 3-7 : Diagramme de Bode de l'inverse de fonction de pondération  $W_s$

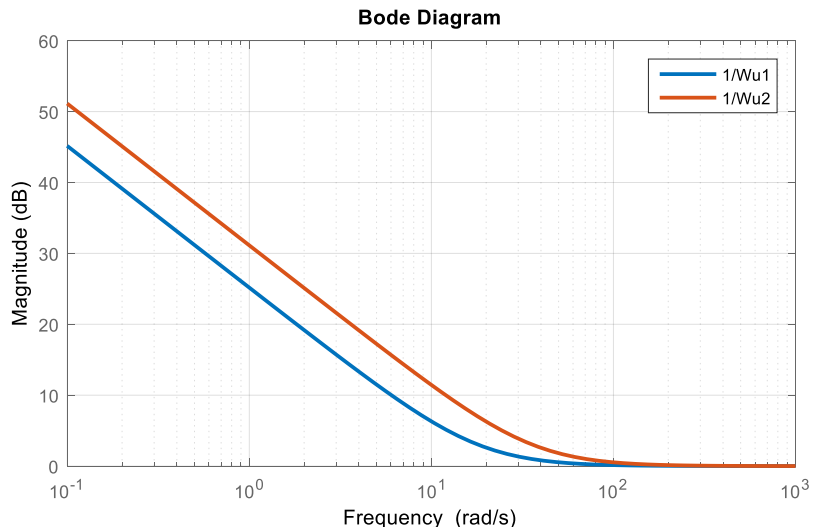


Figure 3-8 : Diagramme de Bode de l'inverse de fonction de pondération  $W_u$

Les résultats de simulation sont élaborés pour deux types de référence :

Pour une consigne échelon on a :

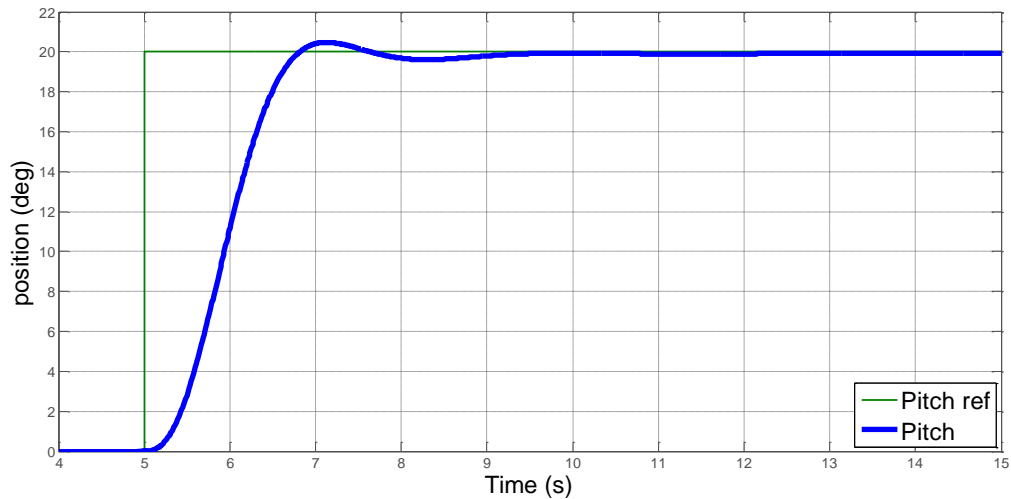


Figure 3-9 : Réponse de sortie, position d'élévation.

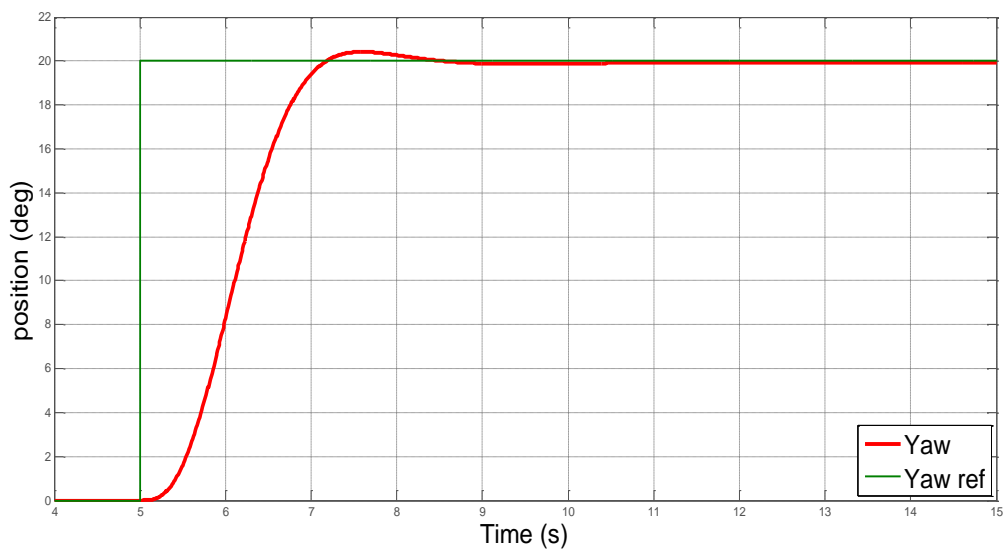


Figure 3-10 : Réponse de sortie, position d'azimut

Les résultats de simulation montrent que la commande  $H_\infty$  s'adapte bien au point de fonctionnement, cependant l'analyse et les simulations montrent que ce correcteur est satisfaisant : il permet de respecter le cahier des charge pour la performance (dépassement inférieur à 30 % , erreur inférieure à 5%)

Pour une consigne carrée :

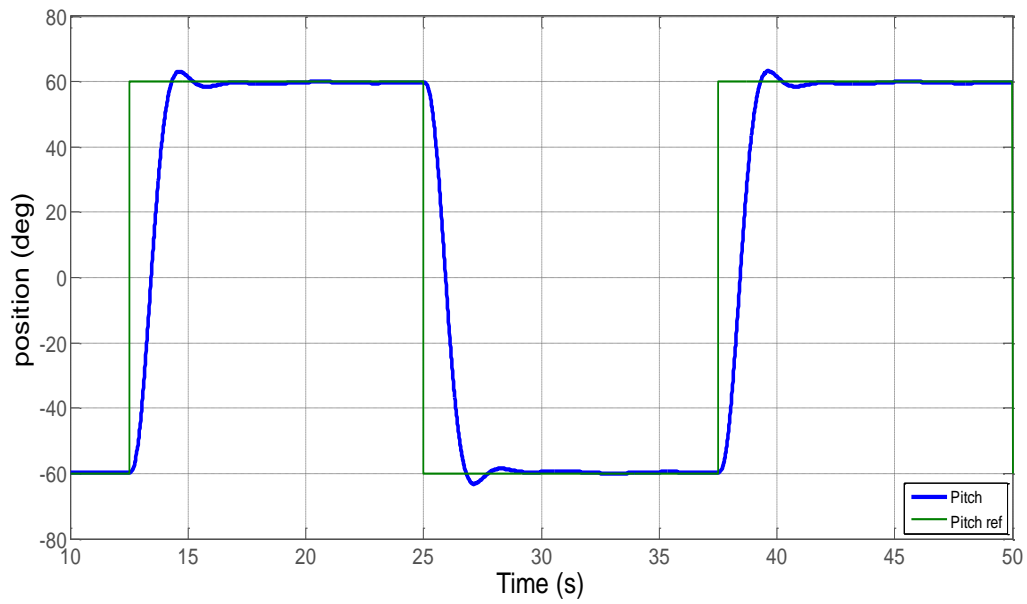


Figure 3-11 : Signale de sortie de position d'élévation.

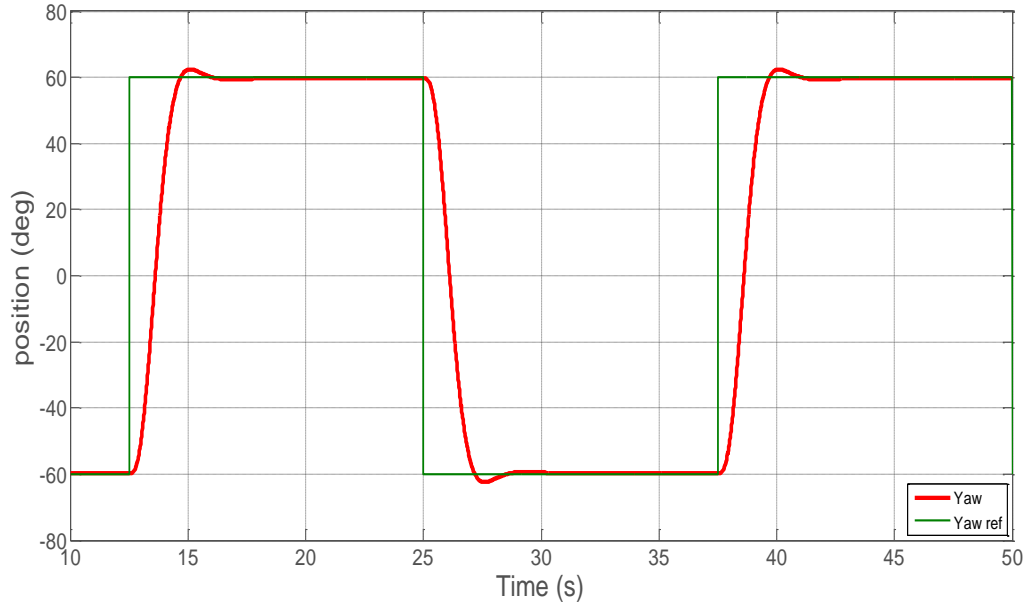


Figure 3-12 : Signal de sortie de position d'azimut

Les tracés des figures 3-11 et 3-12 mettent en évidence les performances de la commande  $H_\infty$ , alors que la stabilité reste le même, le suivi de référence aussi.

### 3.7.1 Comparaison avec la commande LQR

Dans cette partie, on compare les résultats de simulation de l'application de la commande robuste  $H_\infty$  linéaire et la commande LQR. Les performances qui ont été remarquées sont :

- le dépassement :  $LQR > H_\infty$
- l'erreur :  $LQR > H_\infty$
- le temps de réponse :  $LQR > H_\infty$

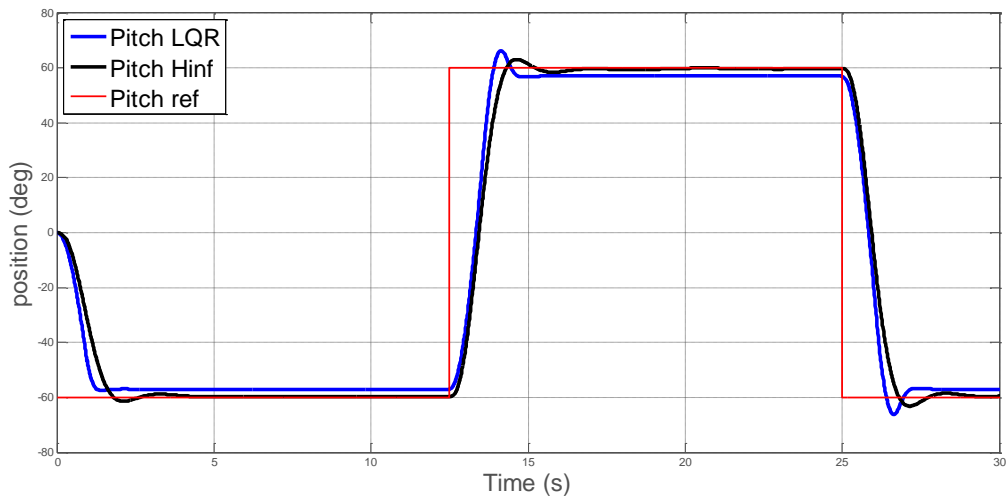


Figure 3-13 : Comparaison entre la position d'élévation pour LQR et  $H_\infty$

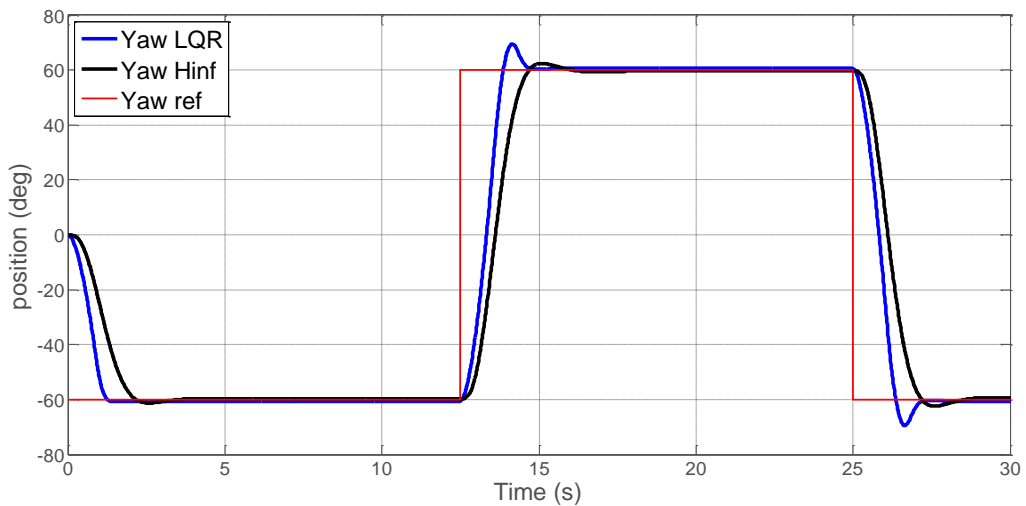


Figure 3-14 : Comparaison entre la position d'azimut par LQR et  $H_\infty$

Les figure suivantes représentent les courbes d'erreurs et de la commande respectivement :

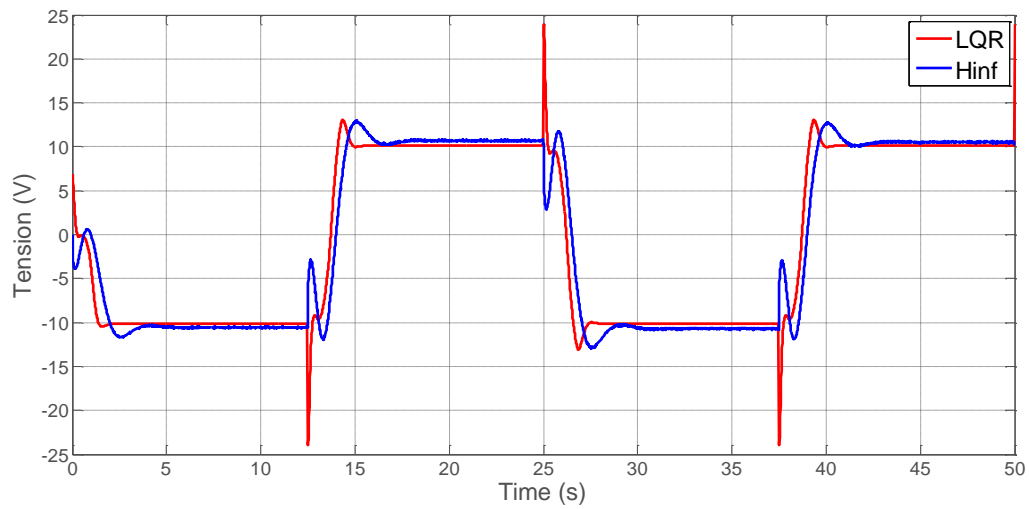


Figure 3-15 : Signal de commande de moteur d'élévation

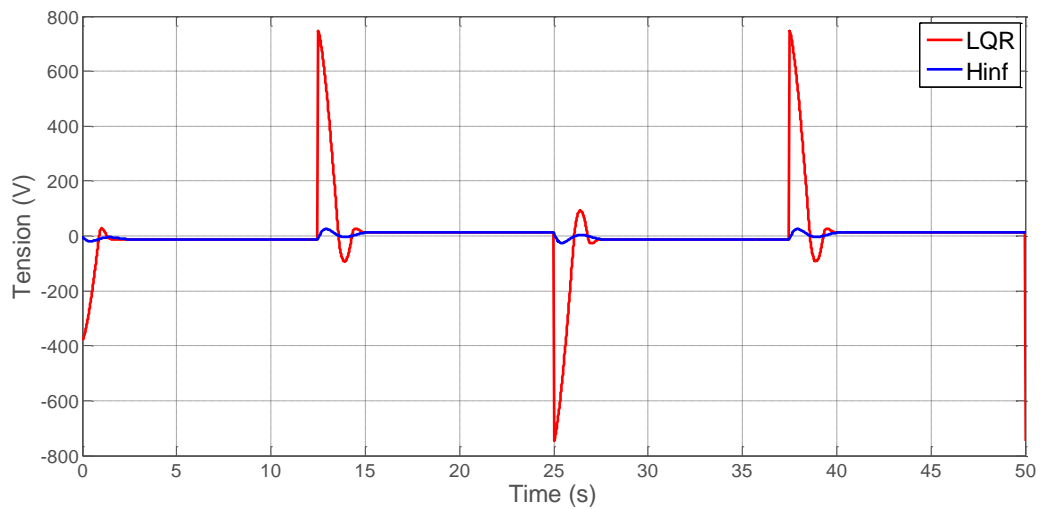


Figure 3-16 : Signal de commande de moteur d'azimut

On remarque que le correcteur de la commande LQR gaspille beaucoup d'énergie par rapport au correcteur de la commande  $H_\infty$ .

### 3.7.2 Vérification de la robustesse

Résultats de simulation lors des variations de la consigne des deux ongles de position nous avons injecté un signal de perturbation sur la sortie puis sur la commande et l'on a trouvé les résultats suivants :

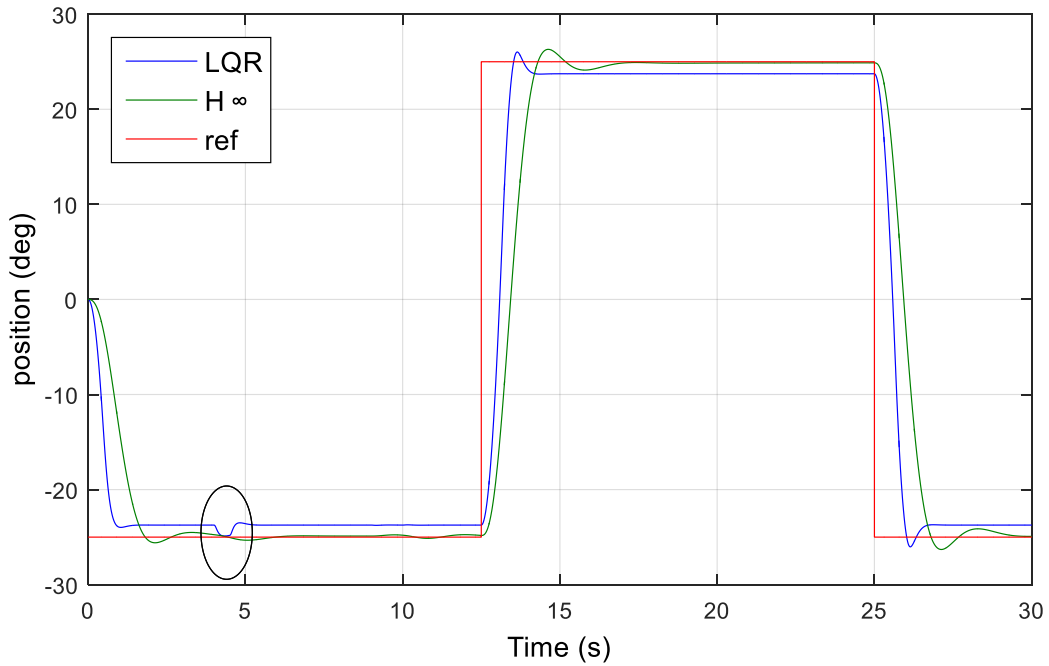


Figure 3-17 : Signal de sortie d'élévation avec une perturbation sur la sortie

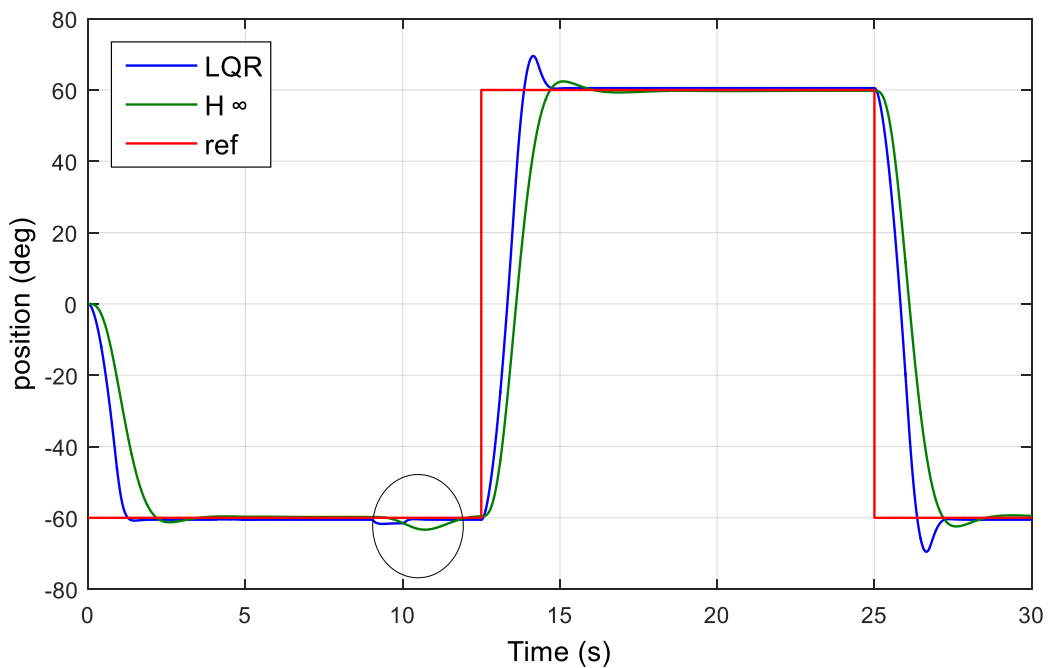


Figure 3-18 : Signal de sortie de position d'azimut avec une perturbation sur la sortie

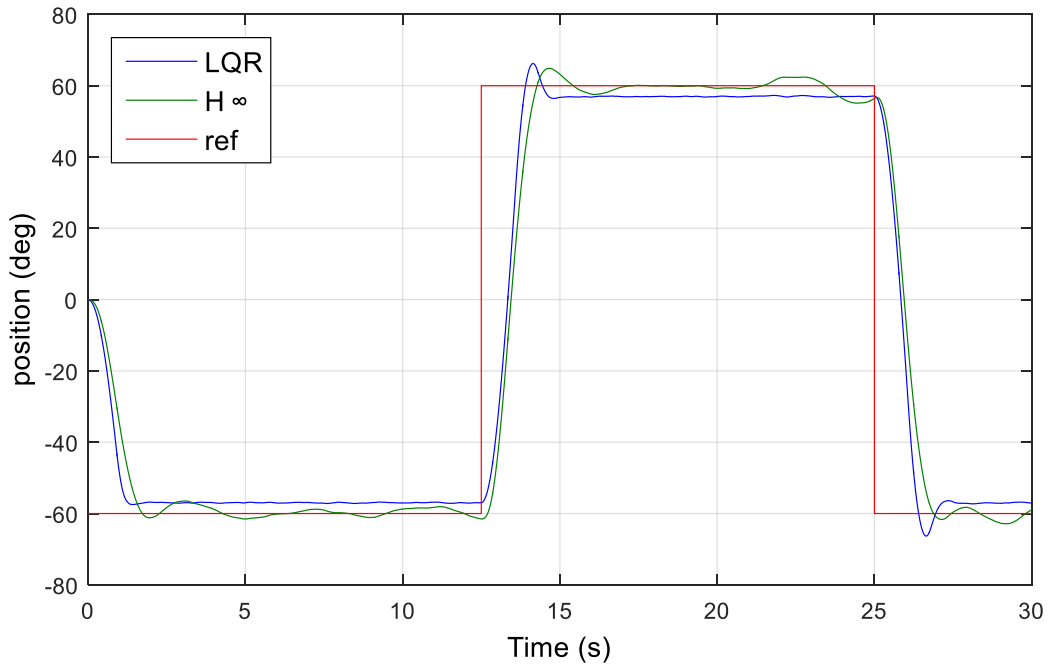


Figure 3-19 : Signal de sortie d'élévation avec une perturbation sur la commande

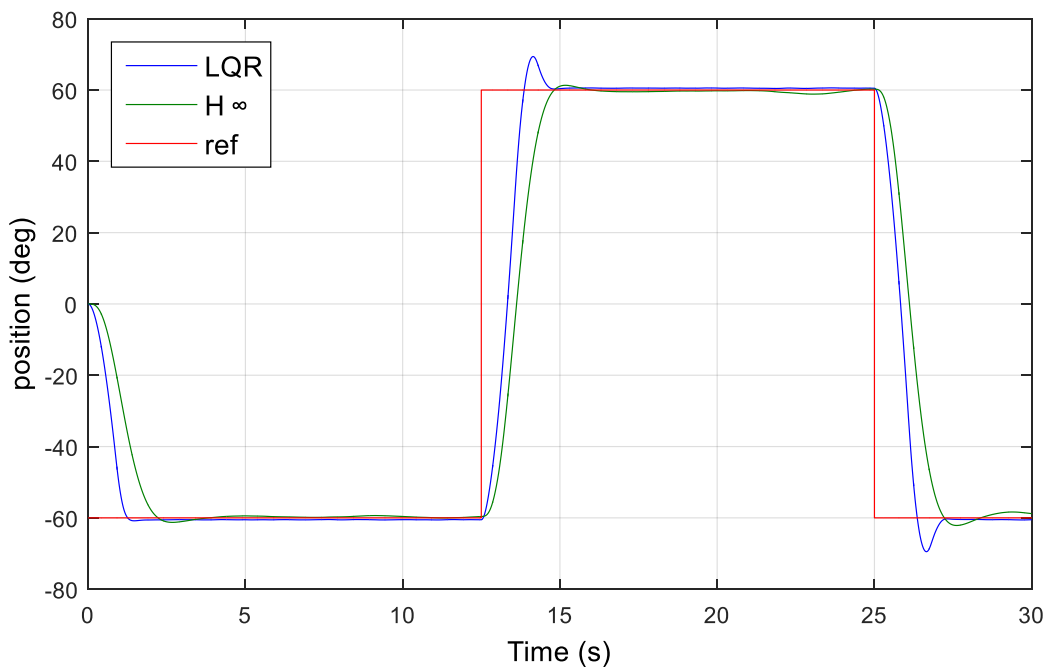


Figure 3-20 : Signal de sortie d'azimut avec une perturbation sur la commande

### 3.7.3 Discussion

Le contrôleur  $H_\infty$  a montré l'efficacité et la supériorité de loi de commande en termes de poursuite de la référence, de rejection de la perturbation, décrémentation de dépassement.

### 3.8 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté l'application de la commande robuste  $H_\infty$  sur le modèle Quanser AERO -2 DOF. Nous avons commencé par une définition générale de modèle et de paramètres, puis une modélisation par l'utilisation des équations mathématique d'Eluer Lagrange. La linéarisation de modèle est ce fait au point d'équilibre (repos), les fonctions de pondération jouent un rôle important dans la robustesse de système, c'est pourquoi ils ont été soigneusement choisis. Les résultants de simulation nous confirment le degré de robustesse de la commande  $H_\infty$  par rapport à la commande LQR.



## Conclusion générale

Ce travail de mémoire de fin d'études est basé sur l'étude de la commande  $H_\infty$  linéaire et non linéaire. Nous avons présenté les notions générales de base sur la commande robuste, la commande  $H_\infty$  linéaire et non linéaire, et les approches les plus utilisées pour la résolution des problèmes de commande  $H_\infty$ .

Nous avons exposé la méthode de résolution des problèmes linéaire par les équations de Riccati et pour les problèmes non linéaire par la méthode des approximations successives et la méthode des Inégalités Matricielles

Les perspectives d'application de ce type de commandes sont très importantes sur les procédés industriels, même aujourd'hui elles occupent une grande partie dans le milieu de recherche. Elles permettent de conserver un fonctionnement optimal du fait qu'elles prennent en considération les différents types de perturbations.

Les résultats de simulation de ce mémoire confirment la robustesse de la commande  $H_\infty$  linéaire sur le système à étudier.

## Bibliographies

- [1] Y. Granjon, *Automatique: Systèmes linéaires, non linéaires, à temps continu, à temps discret, représentation d'état Cours et exercices corrigés. 2e édition.* 2001.
- [2] S. Maalej, "Commande robuste des systèmes à paramètres variables," *Thèse Dr. Lille 1 Sci. Technol.*, 2014.
- [3] S. De Hillerin, "Commande robuste de systèmes non linéaires incertains.," *Thèse Dr. Dr. "Sciences Technol. l'Information, des Télécommunications des Systèmes,"* 2011.
- [4] F. G. D. Stéphane, "Commande  $H_\infty$  et  $\mu$ -analyse: des outils pour la robustesse," *HERMES Sci. Publ. Paris.*, 1999.
- [5] N. Radouène, "COMMANDE ROBUSTE PAR  $H_\infty$  DES SYSTEMES MULTIVARIABLES," *Mem. magister. UNIVERSITE BADJI MOKHTAR ANNABA*, 2008.
- [6] G. Zames, "Feedback and optimal sensitivity: Model reference transformations, multiplicative seminorms, and approximate inverses," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 26, no. 2, pp. 301–320, 1981.
- [7] B. A. Francis, "A course in  $H_\infty$  control theory," *Lect. notes Control Inf. Sci.*, vol. 88, 1987.
- [8] P. Apkarian, "Elements de la théorie de la commande robuste." 2009.
- [9] H.-S. Wang, C.-F. Yung, and F.-R. Chang, " $H_\infty$  control for nonlinear descriptor systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 47, no. 11, pp. 1919–1925, 2002.
- [10] H. Boursès and F. Aïoun, "Approche  $H_\infty$  et  $\mu$ -synthèse," A. Oustaloup, éditeur, La

- robustesse, Anal. Synth. Command. robustes*, pp. 162–235, 1994.
- [11] S. Yousfi, “Développement d’algorithmes pour la commande H des systèmes non linéaires: Application à un procédé industriel,” *Mem. magister. Université Mouloud Mammeri Tizi-Ouzou*, 2010.
- [12] A. J. Van der Schaft and A. J. Van Der Schaft, *L2-gain and passivity techniques in nonlinear control*, vol. 2. Springer, 2000.
- [13] P. Albertos and S. Antonio, *Multivariable control systems: an engineering approach*. Springer Science & Business Media, 2006.
- [14] M. M. Seddik, “Application de la commande  $H_\infty$  aux systèmes linéaires perturbés,” *Mémoire Magister, Univ. Ferhat Abbas–Setif Ufas–Algérie*, 2012.
- [15] S. FONT, G. DUC, and F. CARRERE, “Commande fréquentielle robuste. Application aux paliers magnétiques,” *Tech. l’ingénieur. Inform. Ind.*, vol. 2, no. R7432, pp. R7432-1, 1997.
- [16] J. Doyle, K. Glover, P. Khargonekar, and B. Francis, “State-space solutions to standard  $H_2$  and  $H_\infty$  control problems,” in *1988 American Control Conference*, 1988, pp. 1691–1696.
- [17] H. J. Marquez, *Nonlinear control systems: analysis and design*, vol. 161. John Wiley Hoboken^ eN. JNJ, 2003.
- [18] Y. V Orlov and L. T. Aguilar, *Advanced  $H_\infty$  control: Towards nonsmooth theory and applications*. Springer Science & Business Media, 2014.
- [19] B. B. Rochdi, “Commande robuste des systèmes non linéaires,” *Thèse Dr. d’oran*, 2015.
- [20] M. Yasmina and B. Lynda, “Application de la commande H non linéaire sur un modèle d’un pendule inversé,” *Mem. magister. Université Mouloud Mammeri*, 2017.

- [21] QUANSER, “Quanser 2-DOF Helicopter : Lab Manual,” 2016.
- [22] Y. Taskin, “Improving pitch and yaw motion control of twin rotor MIMO system,” *J. Vibroengineering*, vol. 16, no. 4, pp. 1650–1660, 2014.
- [23] T. ISSAADI and M. SAAD, “Conception de la commande linéaire quadratique régulateur (LQR) ‘Robustifiée’ en utilisant l’optimisation  $H_2/H_\infty$  (Appliquée à la commande d’un drone),” *Mem. magister.Université Mouloud Mammeri Tizi-Ouzou*, 2014.