République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieure et de la Recherche Scientifique
Université de Ghardaia

Faculté des Science et de Technologie
Département de Mathématique et Informatique
&
Laboratoire de Mathématiques et Sciences Appliquées

Projet de fin d'étude présenter en vue de l'obtention de diplôme de

MASTER

Domaine : Mathématiques et Informatiques
Spécialité : Analyse Fonctionnelle et applications

THÈME

Problème de Cauchy dans les Espace de Banach

Présenté par :

Mohammed Amine Gherma

Soutenu publiquement le : 06/09/2020

Devant le jury :

Abdelouahab Chikh Salah (M.C.B) :	(Univ. Ghardaia)	Présidente
Yacine Elhadj Moussa (M.A) :	(Univ. Ghardaia)	Examinateur
Smail Latreche (M.A) :	(Univ. Ghardaia)	Raporteur

Année universitaire 2019/2020

DEDICACE

Je dédie ce travail
À **Marhoume Dr.Abdenour Lani**
À mes parents.
À mes soeurs, et à mon frère.
À toute ma famille
À tous ceux qui m'ont enseigné.

Mohammed Amine Gherma
Ghardaia 2020

REMERCIEMENT

Je remercie mon encadreur Monsieur ***Smail Latreche*** pour le sujet qu'il m'a proposé et pour l'attention et la disponibilité dont il a su faire preuve au long de la préparation de ce mémoire et pendant mon parcours de master.

Je voudrais également remercier Monsieur ***Abdelouahab Chikh Salah*** et Monsieur ***Yacine Elhadj Moussa*** pour l'honneur qu'ils m'ont fait en portant leurs attention sur ce travail.

J ?adresse mes vifs remerciements à Monsieur ***Abdelhakim Dahmani*** pour l ?intérêt qu'il m'a porté et pour sa disponibilité et ses encouragements.

Merci à tous ceux qui m'ont enseigné en primaire, collège, lycée, université et ailleurs, et tous les personnels de ces établissements, sans eux je suis rien. Merci à tous les mathématiciens...

Merci mes amis, merci à tout ceux qui ont contribué de près ou de loin dans ce travail.

Et enfin dois-je dire à quel point mes parents sont aujourd'hui dans mes pensées ! mes parents qui m'ont toujours soutenu dans mes épreuves aussi bien au niveau moral, que matériel. Je leur adresse aujourd'hui un témoignage d'amour filial, et de reconnaissance.

Mohammed Amine Gherma
Ghardaia 2020

RÉSUMÉ

Résumé

dans ce mémoire on s'intéresse à l'existence d'une solution du problème de Cauchy, on transforme le problème intégro-différentiel en un problème de point fixe et on applique la théorie de point fixe dans les espaces de Banach de dimension fini on utilisons le Théorème de Peano mais dans dimension infini on donne une contre exemple ce pour ça ajouter à l'hypothèse de continuité de $F(t, x)$ d'autres conditions, plus loin on donnera une généralisation due à Ambrosetti

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

Les équations aux dérivées partielles intéressent les mathématiciens dès l'invention du calcul différentiel pendant XVIII Nième siècle, surtout pour leurs utilités dans les autres disciplines notamment la physique classique comme l'équation d'Euler-Lagrange, la physique quantique comme l'équation de Schrö- dinger, la thermodynamiques comme les équations de Maxwell ...etc. On trouve pas mal d'idées et techniques pour étudier l'existence, l'unicité, la stabilité et la contrôlabilité de différents types des EDP dans ce mémoire utilise et démontré deux théorèmes importants concernant les solutions du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

dans$\mathbb{R}^n$ avec chacun des des conditions spécifiques sur la fonction f :

— Théorème d'existence de PEANO

— Théorème de non-prolongement des solution (définies sur I)

un problème se pose alors de façon naturelle : Ces théorèmes restent-ils vraies dans les espaces de Banach de infini ? l'objet de mémoire est d'apporter des contre-exemples du à er J.Dieudonné(1950) qui donnent une réponse négative, et de démontrer le théorème de Szuflak(1963) qui pour ainsi dire généralise celui de Kromosselskii-krein sur l'existence des solutions du problème de Cauchy dans les espaces de dimension infinie .

CHAPITRE 1

PRÉLIMINAIRES

Dans ce chapitre, on introduit des définitions, notations, lemmes et quelques théorèmes qui sont utilisés le long de ce mémoire.

1.1 Notations et définitions

Définition 1.1 *(problème de cauchy)*
soit $x'(t) = f(t, x(t))$ une équation différentielle telle que y est une fonction inconnue de la variable t et f une fonction définie sur $I \times J$ oò I, J sont deux intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ Si le point $(t_0, x_0) \in I \times J$
un problème de cauchy est la recherche d'une fonction x telle que :

$$\begin{cases} x'(t) & = f(t, x) \\ x(t_0) & = x_0 \end{cases} \tag{1.1}$$

Définition 1.2 *Le couple (E, d) est appelé espace métrique si E un ensemble et $d : E \times E \to [0, \infty[$ une application vérifiant pour tout x, y, z de E :*

1. $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$,

2. $d(x, y) = d(y, x)$,

3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Définition 1.3 *Une suite* $(x_n) \subset E$ *est dite de Cauchy ssi*

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que pour } n, m > n_0, d(x_n, x_m) < \epsilon$$

Un espace métrique (E, d) *est dit complet si toute suite de Cauchy de* E *converge dans* E

.

Lemme 1.1 *(Lemme de Gronwall)*
soit $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}^+$ *deux fonction contines et si* $\exists A > 0$ *tel que :*

$$f(x) \leq A + \int_a^x g(t)f(t)dt \ \forall x \in [a, b]$$

alors

$$f(x) \leq Ae^{\int_a^x g(t)dt}$$

Définition 1.4 *Soit* $a \in E$ *et* $r \in [0, +\infty[$*. L'ensemble*

$$B(a, r) = \{x \in E \ d(x, a) < r\}$$

s'appelle boule ouverte de centre a *et de rayon* r*.*

Définition 1.5 *(partie ouverte) Un ensemble* U *de* E *est dit ouvert si :*

$$\forall x \in U, \exists \epsilon > 0 \text{ tel que } B(x, \epsilon) \subset U.$$

Définition 1.6 *(partie fermée) Un sous ensemble* A *de* E *est dit fermé si son complémentaire*

$$A^c = \{x \in E/x \notin A\}$$

est un ouvert de E*.*

Définition 1.7 *Soit* $a \in E$*. On dit qu' une suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de* E *converge vers* a *et on note* $x_n \mapsto a$ *si* $d(x_n, a) \mapsto 0$ *lorsque* $n \mapsto +\infty$

Définition 1.8 *Soient* $(X, \delta), (Y, d)$ *deux espaces métriques. Une application* $f : X \to Y$ *est continue au point* $a \in X$ *si :*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \text{ tel que } \forall x \in X, \delta(x, a) \leq \alpha \Rightarrow d(f(x), f(a)) \leq \epsilon$$

Proposition 1.1 *[1] Soient* $(X, \delta), (Y, d)$ *deux espaces métriques.* $f : X \to Y$ *Une application alors* f *est continue en point* $a \in X$ *si et seulement si pour toute suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *qui converge vers* a *la suite* $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $f(a)$

Théorème 1.1 *[1] Toute fonction* f *continue sur un compact est uniformément continue.*

Définition 1.9 *Soit* $(E, +, .)$ *un espace vectoriel, le couple* $(E, \| \, . \, \|)$ *est un espace normé si pour tout* $x, y \in E$ *il existe un nombre réel positif* $\| x \|$ *appelé norme de* x*, satisfaisant :*

1. $\| x \| = 0$ *si et seulement si* $x = 0$,

2. $\| ax \| = | a | \| x \|, a \in \mathbb{K}(\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C})$

3. $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$

Remarque : Un espace normé est un espace métrique dont la distance est définie par : $d(x, y) = \| x - y \|$

Définition 1.10 *Un espace de Banach est un espace normé complet .*

Exemple 1.1 $C([a, b], \mathbb{R}^n)$ *avec* $a, b \in \mathbb{R}$ *est l'espace de toutes les fonctions* y *continues définies de* $[a, b]$ *dans* $\mathbb{R}^n$*. le nombre*

$$\| y \|_\infty = \sup_{t\in[a,b]} \| y(t) \|$$

défini une norme rendant $(C([a, b], \mathbb{R}^n), \| \, . \, \|)$ *un espace de Banach.*

Définition 1.11 *Une partie* M *d'un espace métrique* (E, d) *est dite compacte si de toute suite d'élément de* M*, on peut extraire une sous suite convergente dans* M*.*
M *est relativement compacte si toute suite de* M *admet une sous suite convergente vers une limite appartenant à* $\bar{M}$ *(i.e si la fermeture de* M *est compacte)*

Définition 1.12 *(Application compacte) : Soit* M *un sous ensemble d'un espace de Banach* E *et soit* $A : M` \to E$ *une application.*
Si A *est continue et* $A(M)$ *est contenu dans un sous ensemble compact de* E*, Alors on dit que* A *est une application compacte*

Définition 1.13 *Soient* E, F *deux espaces normés et l'application* $f : E \to F$ *. On dit que* f *est complètement continue si :*

— *f est continu,*

— *f transforme tout ensemble bornée en un ensemble relativement compact*

Théorème 1.2 *(Arzela-Ascoli[2]) Soit $A \subset C([0,b],\mathbb{R}^n), A$ est relativement compact si :*

1. *A est bornée, c'est à dire qu'il existe $M > 0$:*

$$\| y(t) \| \leq M, \forall t \in [0,b] \text{ et } y \in A,$$

2. *A est équicontinu c'est à dire que pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta(\epsilon) > 0$ tel que :*

$$\forall t_1, t_2 \in [0,b], \mid t_1 - t_2 \mid < \delta \Longrightarrow \| y(t_1 - y(t_2)) < \epsilon, \forall y \in A$$

Définition 1.14 *Soient (X,d) et (Y,δ) deux espaces métriques. Soit k un réel strictement positif. On dit que $f : X \to Y$ est Lipschitzienne de rapport k si :*

$$\forall x, y \in X : \delta(f(x), f(y)) \leq kd(x,y).$$

Si de plus $k < 1$, on dit que f est contractante

Définition 1.15 *(Enveloppe convexe) : Soit E un espace de Banach réel, pour tout partie finie $D \subset E$ on désigne par l'enveloppe convexe de D l'intersection de toutes les parties convexes contenant D,*
il est définit par la formule suivante :

$$con(D) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} t_i x_i / t_i \geq 0, x_i \in D \text{ et } \sum_{i=1}^{n} t_i = 1 \right\}$$

Théorème 1.3 *(La convergence dominée de Lebesgue [3]) :Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $L^1([0,b],\mathbb{R}^n)$ qui converge p.p vers f.*
Supposons qu'il existe une fonction positive $g \in L^1([0,b],\mathbb{R}^+)$ telle que :

$$\| f_n(x) \| \leq g(x), \text{ p.p }, x \in [0,b].$$

Alors la fonction f est intégrable et on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \| f_n - f \|_{L^1} = 0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \int_0^b f_n(x)dx = \int_0^b f(x)dx$$

1.2 Quelques Théorèmes du point fixe

Définition 1.16 *Soient* (X, d) *un espace métrique,* $f : X \to X$ *une application on dit que* $x \in X$ *est un point fixe de* f *si* $f(x) = x$.

1.3 Théorème du point fixe de Banach

Vers 1922, Banach reconnu le rôle fondamental de la complétude métrique, il énonce le Théorème suivant :

Théorème 1.4 *(Théorème de Banach(1922) Soit* (E, d) *un espace métrique complet non vide et* $f : E \to E$ *une application* α*-contraction i.e il existe* $0 < \alpha < 1$ *tel que* $d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y)$*, pour tout* $x, y \in E$*. Alors* f *possède un unique point fixe.*

Démonstration :(i)L'unicité :
On pose que $x, y \in E$ deux points fixes de f alors $f(x) = x$, $f(y) = y$

$$d(x, y) = d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y)$$

comme $0 < \alpha < 1$ donc $d(x, y) = 0 \Longrightarrow x = y$.
(ii) L'existence :
On choisit un point $x_0 \in E$ quelconque et on définit la suite $x_n = f(x_{n-1})$, on montre par récurrence que $d(x_n, x_{n+1}) \leq \alpha^n d(x_0, x_1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et on montre que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy :

$$\begin{aligned}
d(x_n, x_{n+p}) \leq & \sum_{n=0}^{p-1} d(x_{n+k}, x_{n+k+1}) \\
\leq & \sum_{n=0}^{p-1} \alpha^{n+k} d(x_0, x_1) \\
\leq & \alpha^n \sum_{n=0}^{p-1} \alpha^k d(x_0, x_1) \\
\leq & \alpha^n \frac{1-\alpha^p}{1-\alpha} d(x_0, x_1) \\
\leq & \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_0, x_1)
\end{aligned}$$

et donc $d(x_n, x_{n+p}) \to 0$ lorsque $n \to +\infty$, ceci exprime le fait que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans E, et comme E est un espace complet, il existe

$x \in$tel que $x_n \to x$. Par continuité, $x_{n+1} = f(x_n) \to f(x)$, d'où $f(x) = x$.

1.4 Théorème du point fixe de Brouwer

Théorème 1.5 *(Théorème de Brouwer(1910) [4]) Soit C un compact, convexe non vide de R^n et $f : C \to C$ une application continue.*
Alors f admet au moins un point fixe dans C.

CHAPITRE 2

PROBLÈME DE CAUCHY DANS DES ESPACES DE BANACH DE DIMENSION FINIE

2.1 Théorème du point fixe de Schauder

Le théorème du point fixe de Schauder est une généralisation de théorème de Brouwer,d'un espace de dimension finie à un espace de dimension quelconque il s'énonce ainsi :

Théorème 2.1 ***Le premier théorème de Schauder, [7, 8]*** *Si Ω un sous-ensemble non vide, convexe et compact d'un espace de Banach E, et $F : \Omega \to \Omega$ une application continue sur Ω.*
Alors F admet au moins un point fixe dans Ω.

Théorème 2.2 ***Deuxième théorème de Schauder [9, 7, 8]***
Soit C un sous-ensemble non vide, borné, fermé et convexe d'un espace de Banach E.
Alors toute application continue et compacte $f : C \to C$ admet au moins un point fixe dans C

Preuve : On note K l'adhérence de $f(C)$ i.e $K = f(C)$ qui est par hypothèse un compact.
$K \subset C$ car C est un fermé (C étant compact alors $K = f(C)$ car $f(C)$ est compact). Pour chaque n, soit F_n un $\frac{1}{n}$-réseau de K

i.e $F_n = \{x_1, x_2, ..., x_k\} \subset K$ tel que
$K \subset \bigcup_{i=1}^{k} B\left(x_i, \frac{1}{n}\right)$ et soit $P_n : K \to cov(Fn)$ une projection de Schauder, comme C est convexe et F_n une partie de C alors $cov(F_n) \subset C$ est un sous ensemble convexe et compact. On définit $f_n : cov(F_n) \to cov(F_n)$,
$f_n = P_n \circ f_{|cov(F_n)}$. Par le théorème de **Brouwer** $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède au moins un point fixe y_n i.e $f_n(y_n) = y_n$. Or $(f(y_n))_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ qui est compact et donc la suite $(f(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ possède une sous suite convergente que nous noterons de la même manière. On pose

$$y = \lim_{n\to\infty} f(y_n) \tag{2.1}$$

et on a $y = \lim_{n\to+\infty} f(y_n) \in C$ car $(f(y_n))_{n\in\mathbb{N}} \subset K \subset C$ fermé d'où contient les limites de toutes ses suites convergentes.
Montrons $f(y) = y$. En effet :

$$\| f_n(y_n) - f(y_n) \| = \| P_n(f(y_n)) - f(y_n) \| < \frac{1}{n}$$

d'où

$$\begin{aligned} y &= \lim_{n\to\infty} f(y_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} f_n(y_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} y_n \end{aligned}$$

Alors $\lim_{n\to+\infty} y_n = y$
d'après (2.1) et par la continuité de f, on obtient : $f(y) = y$. Par conséquent f admet un point fixe.

2.2 Théorème du point fixe de Schaefer

Théorème 2.3 *(Théorème de Schaefer(1955)) : Soit $(E, \| \,.\, \|)$ un espace normé, $f : E \to E$ une application continue et compacte, Alors :*

1. *Ou bien l'équation $x = \lambda f(x)$ admet une solution pour $\lambda = 1$*
   ,
2. *Ou bien , $\forall \lambda \in]0, 1[$ l'ensemble $\{x \in E / x = \lambda f(x)\}$ est non borné.*

Preuve : *On note* $B = \{x \in E / x = \lambda f(x)\}$
B *est borné alors* $\exists M > 0$ *tel que* $\forall x \in B, \| x \| < M$. *On définit une autre fonction :*

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), \ si \ \| f(x) \| \leq M \\ \frac{M}{\|f(x)\|} f(x), \| f(x) \| > M \end{cases} \tag{2.2}$$

Ainsi $\tilde{f}$ *est définie de* $B(0, M)$ *dans elle même.*
On définit K *une partie de* $\tilde{f}(B(0, M))$ *tel que* K *fermé et convexe. On peut considérer que*
$\tilde{f} : K \to K$, *la fonction* f *est compacte alors* $\tilde{f}$ *est aussi alors on peut appliquer le théorème du point fixe de Schauder i.e* $\tilde{f}$ *admet un point fixe :*
$x = \tilde{f}(x)$.
Si ce point x *n'est pas un point fixe de* f *i.e* $x \neq f(x)$ *ce signifie que* $\| f(x) \| > M$, *d'après la définition de* $\tilde{f}$ *:*

$$x = \tilde{f}(x) = \frac{M}{\| f(x) \|} f(x) = \lambda f(x)$$

avec $\lambda = \frac{M}{\|f(x)\|}$

Alors $x \in B$ et on a :

$$\| x \| = \| \tilde{f}(x) \| = \frac{M}{\| f(x) \|} \| f(x) \| = M$$

contradiction avec l'hypothèse. Donc, x est un point fixe de f

2.3 Théorème Cauchy-Peano

Théorème 2.4 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ U un ouvert de $\mathbb{R}^n$,$(t_{0,x_0}) \in I \times U$ et $f : I \times U \to R^n$, une fonction continue*

. Alors le problème de Cauchy suivant admet au moins une solution locale

$$\begin{cases} x'(t) & = f(t, x(t)) \\ x(t_0) & = x_0 \end{cases} \tag{2.3}$$

Démonstration
On commence par remarquer que 2.3 est équivalent à

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds$$

car f est continue
On va se placer sur un cylindre appelé cylindre de sécurité : soit r, M > 0 tels que :
$\bar{B}\ (x_o, r) \subset U, J := [t_0 - \frac{r}{M}, t_0 + \frac{r}{M}] \subset I et \sup\limits_{(t,x)\in j\times B(x_0,r)} ||f(t,x)|| \leq M$ on note

$$\mathcal{A} = \{x : J \to \bar{B}\ (x_o, r) \text{ M-lipschitzienne telle que} x(t_0) = x_0\}$$

et on définit l'opérateur $\mathcal{T}$ sur$\mathcal{A}$ par

$$T(x)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds$$

Le but est donc de démontrer que T admet un point fixe. On commence par montrer que T est bien défini : pour $x \in \mathcal{A}$ et $t \in J$, on a :

$$||T(x(t)) - x_0|| = || \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds|| \leq M|t - t_0| < r$$

et pour $t_1, t_2 \in J$

$$||T(x(t_1)) - T(x(t)_2)|| = ||\int_{t_1}^{t_2} f(s, x(s))ds|| \leq M|t_1 - t_2|$$

donc T est bien défini. $\mathcal{A}$ est bien convexe, fermé et on montre par le théorème d'Ascoli que $\mathcal{A}$ est compact. En effet, pour $t \in J, \{x(t)|x \in A\} \subset \bar{B}\ (x_o, r)$ donc $\mathcal{A}$ est ponctuellement bornée (on est en dimension finie) et pour $x \in \mathcal{A}$

$$||X(t_1) - X(t_2)|| \leq M|t_1 - t_2|$$

donc $\mathcal{A}$ est bien équicontinu. Montrons que T est continu pour pouvoir appliquer le théorème de Schauder. Soit $x, y \in \mathcal{A}$ et $\epsilon > 0$, alors f est uniformément continue sur $J\times\ \bar{B}\ (x_o, r)$ donc il existe $\eta > 0$ tel que
si

$$||x - y||_\infty < \eta$$

alors

$$||f(t, x(t)) - f(t, y(t))|| < \epsilon$$

d'où pour $||x - y||_\infty < \eta$

$$||T(x(t)) - T(y(t))|| \leq \int_{t_0}^{t} ||f(s, x(s)) - f(s, y(s))||ds < \epsilon\frac{r}{M}$$

donc T est continu. Finalement,$\mathcal{A}$ est un convexe fermé non vide, T est continu de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}$ est compact donc $T(\mathcal{A})$ l est aussi, on peut donc appliquer le théorème de Schauder qui donne l' existence d'un point fixe pour T.

2.4 Contre exemple du Théorème d'existence de Peano

on considère l'espace de Banach suivant :

$$X = \left\{x = (x_n)_{n\in N} \quad \text{tel que} \quad x_n \in \mathbb{R} \quad \text{et} \lim_{n\to\infty} x_n = 0\right\}$$

normé par : $||x|| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$ et f l'application sur X définie par : $f : X \mapsto X$ telle que :

pour $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on a $f(y) = \left(\sqrt{|\ y_n\ |} + \frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

on a si $y_n \mapsto y$ alors $f(y_n) \mapsto f(y)$ donc f est continue.

cependant , on peut montrer que le système :

$$\begin{cases} y'(t) & = F(t, y(t)) \\ y(0) & = 0 \end{cases} \tag{2.4}$$

En posant $F(t, y(t)) = f(y(t))$, n'admet pas de solutions dans aucun intervalle de $\mathbb{R}$ contenant 0

en effet si cette solution existe, elle serait dérivable et

$Dy(t) = (z_n(t))_{n\in\mathbb{N}} = F(t, y(t)) = f(y(t)) = \left(\sqrt{|y_n|} + \frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

$\forall\epsilon > 0, \exists\eta > 0 \quad$ tel que si $|\ h\ | < \eta \Rightarrow \|\ \frac{y(t+h) - y(t)}{h} - z(t)\ \| \leq \epsilon$

avec $z(t) = (z_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ ceci est équivalent à :

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \left|\frac{y_n(t+h) - y_n(t)}{h} - z_n(t)\right| \leq \epsilon$$

d'oò l'on déduit que $\forall n \in \mathbb{N}$: $z_n(t) = y_n'\prime(t)$ dérivée qui doit satisfaire le système :

$$\begin{cases} y_n'(t) & =|\ y_n(t)\ |^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{n} \\ y_n(0) & = 0 \end{cases} \tag{2.5}$$

avec $\lim_{n\longrightarrow+\infty} y_n'(t) = 0$ car $(z(t) \in X)$

alors pour tout n, y_n est strictement croissante par rapport à t et puisque $y_n(0) = 0$ alors $y_n(t) > 0$ pour $t \in]0, c]$ et on a aussi :

$$y_n'(t) >|\ y_n(t)\ |^{\frac{1}{2}} > 0$$

alors on divise et on intègre directement on a :

$$\frac{y_n'(t)}{|\ y_n(t)\ |^{\frac{1}{2}}} > 1$$

$$\int_u^t \frac{y_n'(s)}{|\ y_n(s)\ |^{\frac{1}{2}}} ds > \int_u^t 1 ds$$

pour $0 < u < t \leq c$ et alors

$$2\int_u^t \frac{y_n'(s)}{2 \mid y_n(s) \mid^{\frac{1}{2}}} ds > \int_u^t 1 ds$$

c'est à dire

$$2(\mid y_n(t)^{\frac{1}{2}} \mid - \mid y_n(u)^{\frac{1}{2}} \mid) > t - u$$

finalement on a

$$\mid y_n(t)^{\frac{1}{2}} \mid - \mid y_n(u)^{\frac{1}{2}} \mid > \frac{(t-u)}{2}$$

et quand on fait tendre u vers 0 il reste que :

$$\mid y_n(t) \mid^{\frac{1}{2}} \geq \frac{t}{2}$$

c'est à dire

$$\mid y_n(t) \mid \geq \frac{t^2}{4}$$

pour $0 < t \leq c$ donc $(y_n(t))_{n\in\mathbb{N}} \notin X$ car $\lim\limits_{\longrightarrow\infty} y_n(t) \neq 0$ contradiction même argument pour les valeurs de t à gauche de 0 .
pour cela on voit qu'il faut ajouter à l'hypothèse de continuité de $F(t,x)$ d'autre conditions , ceci est en réalité à la non validité du **théorème d'Ascoli-Arzela** dans les espace de Banach quelconques, théorème qui joue un rôle fondamental dans la démonstration du **théorème de Peano** ,plus loin on donnera une généralisation due Ambrosetti (1967).

CHAPITRE 3

PROBLÈME DE CAUCHY DANS LES ESPACES DE BANACH DE DIMENSION INFINIE

3.1 Théorème de krasnoselskii-krein

En 1955 Krasnoselskii a observé que dans un bon nombre de problèmes, l'intégration d'un opérateur différentiel donne naissance à une somme de deux applications, une contraction et une application compacte. Il déclare alors :
Le principe suivant : L'intégrale d'un opérateur différentiel peut produire une somme de deux applications, une contraction et un opérateur compact. Pour mieux comprendre cette observation de Krasnoselskii
on considère l'équation différentielle suivante :

$$\dot{x}(t) = -a(t)x(t) - g(t,x), \tag{3.1}$$

Où $a(t+T) = a(t)$ et $g(t+T,x) = g(t,x)$ pour un certain $T > 0$
. On peut transformer cette équation sous une autre forme en écrivant,

$$x'(t)\exp(\int_0^t a(s)ds) = -a(t)x(t)\exp(\int_0^t a(s)ds) - g(t,x)\exp(\int_0^t a(s)ds)$$

Par conséquent,

$$\left(x(t)\exp\int_0^t a(s)ds\right)' = -g(t,x)\exp(\int_0^t a(s)ds)$$

Une intégration de $t-T$ à t donne

$$\int_{t-T}^t \left(x(u)\exp\int_0^u a(s)ds\right)' du = -\int_{t-T}^t \left(g(u,x(u))\exp(\int_0^u a(s)ds\right) du$$

Ainsi,

$$x(t)\exp\int_0^t a(s)ds - x(t-T)\exp\int_0^{t-T} a(s)ds = -\int_{t-T}^t g(u,x(u))\exp(\int_0^u a(s)ds)du \tag{3.2}$$

Alors

$$x(t) = x(t-T)\exp\int_0^{t-T} a(s)ds\exp -(\int_0^t a(s)ds) - \int_{t-T}^t g(u,x(u))\exp(\int_0^u a(s)ds)du\exp(-\int_0^t a(s$$

d'ou

$$x(t) = x(t-T)\exp(-\int_{t-T}^t a(s)ds) - \int_{t-T}^t g(u,x(u))\exp(-\int_0^u a(s)ds)du \tag{3.3}$$

Si on suppose que $\exp(-\int_{t-T}^{t} a(s)ds) = \alpha < 1$, et si $(E, \| \,.\, \|)$ est l'espace de Banach des fonctions $\phi : R \to R$ continues et $T-$périodique, alors l'équation (3.3) peut se mettre sous la forme

$$\phi(t) = (B\phi)(t) + (A\phi)(t)$$

avec B est une contraction de constante $\alpha < 1$ et A est une application compacte. Cet exemple montre bien la naissance de l'application $P\phi = B\phi + A\phi$ qui s'identifie à une somme d'une contraction et une application compacte. La recherche d'une solution pour (3.3) exige donc un théorème adéquat qui s'applique à cet opérateur hybride P et qui peut conclure l'existence d'un point fixe qui sera, à son tour, solution de l'équation initiale (3.1). Krasnoselskii trouva la solution en combinant les deux théorèmes de Banach et celui de Schauder en un seul théorème hybride mais puissant qui porte son nom. En clair, il établit le résultat suivant :

Lemme 3.1 *soit $\mathbb{M}$ un sous-ensemble fermé, borne et convexe dans un espace de Banach de dimension infinie $\mathbb{X}$, on considère T un application contractante de $\mathbb{M}$ dans $\mathbb{X}$ et S une application complètement continue de $\mathbb{M}$ dans $\mathbb{X}$(c'est à dire S continue et est une application compacte).*
on suppose $T(\mathbb{M}) + S(\mathbb{M}) \subset \mathbb{M}$, c'est à dire $Tu + Sv \in \mathbb{M} \forall (u, v) \in \mathbb{M}^2$.
***Alors** il existe dans $\mathbb{M}$ un point invariant par $T + S$.*

Démonstration : Soit x quelconque dans $\mathbb{M}$, on va chercher si l'on peut définir $y \in \mathbb{M}$ tel que $(I - T)y = Sx$, pour cela on construit la suite, $y_{n+1} = Sx + Ty_n$ avec $y_0 \in \mathbb{M}$ (par conséquent il est évident que $y_n \in \mathbb{M}$, par hypothèse)

$$\begin{aligned} \| y_{n+1} - y_n \| &= \| Sx + Ty_n - Sx - Ty_{n-1} \| \\ &= \| Ty_n - Ty_{n-1} \| \\ &\leq k \| y_n - y_{n-1} \| \text{ avec}(k \in]0, 1[) \end{aligned}$$

ceci suffit pour dire que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans un Banach, donc elle converge vers un certain y de $\mathbb{M}$, car $\mathbb{M}$ est un fermé dans $\mathbb{X}$.
et par la continuité on a aussi que $y = Sx + Ty$, et puisque y unique **Alors** $y = (I - T)^{-1}Sx$. on a ainsi défini une application de $\mathbb{M}$ dans $\mathbb{M}$. soit x et $\bar{x}$ de $\mathbb{M}$, on leur associe alors y et $\bar{y}$ telle que :
$y = Sx + Ty$ et $\bar{y} = S\,\bar{x} + T\,\bar{y}$ et on a :

$$\| y - \bar{y} \| \leq \| Ty - T\bar{y} \| + \| Sx - S\bar{x} \|$$

$$\| y - \bar{y} \| \leq k \| y - \bar{y} \| + \| Sx - S\bar{x} \|$$

$$\| y - \bar{y} \| - k \| y - \bar{y} \| \leq \| Sx - S\bar{x} \|$$

$$(1-k) \| y - \bar{y} \| \leq \| Sx - S\bar{x} \|$$

$$\| y - \bar{y} \| \leq \frac{1}{1-k} \| Sx - S\bar{x} \|$$

ce qui prouve que l'application définie précédemment par $(I-T)^{-1}S$ est complètement continue de $\mathbb{M}$ dans $\mathbb{M}$, et on applique le théorème de **schauder**.

<u>Théorème de schauder :</u>

Théorème 3.1 *soit H un sous-ensemble fermé borné et convexe d'un espace de Banach $\mathbb{X}$, Alors toute Application complètement continue $T : H \to H$ admet un point fixe.*
Puisque $\mathbb{M}$ est une fermé, borné et convexe, et que $(I-T)^{-1}S$ est une application de $\mathbb{M}$ dans $\mathbb{M}$ qui est complètement continue,
Alors il existe $x \in \mathbb{M}$, tel que $(I-T)^{-1}Sx = x$ donc $x = Sx + Tx$

<u>Théorème de Krasnosselskii-Krein :</u>

Théorème 3.2 *Soit $f(t,x) = g(t,x) + h(t,x)$, h et g continues de $\mathbb{U} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{X}$ dans $\mathbb{X}$, U ouvert et X un espace de Banach, Soit h telle que :*

$$\| h(t,x_1) - h(t,x_2) \| \leq k(t) \| x_1 - x_2 \| \; \forall (t,x_1),(t,x_2) \in \mathbb{U}$$

et :
**$k(t)$ localement Intégrable*
**g une application complètement continue de $\mathbb{U} \to \mathbb{X}$.*

Soit $(t_0, x_0) \in I \times D$, avec $I = [t_0 - a, t_0 + a]$ et $D = \{x \in \mathbb{X}, \| x - x_0 \| \leq b\}$ tel que $I \times D \subset \mathbb{U}$, on suppose aussi que :

$$\int_{t_0-a}^{t_0+a} k(t)dt < 1$$

et

$$a. \sup_{(t,x)\in I\times D} \| g(t,x) \| + \int_{t_0-a}^{t_0+a} (bk(t)+ \| h(t,x_0) \|)dt \leq b$$

Alors le système :

$$\begin{cases} x'(t) & = f(t,x(t)) \\ x(t_0) & = x_0 \end{cases}$$

admet une solution définie sur l'intervalle I

.

Démonstration :

Il faut voir que le sup $\| g(t,x) \|$ sur $I \times D$ existe, car $I \times D$ est fermé borné, et g est complètement continue.

Problème : Trouver $x(t)$ application continue de I et $\mathbb{X}$ tel que :

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} g(s,x(s)) + h(s,x(s))ds$$

Considérons l'espace de Banach $C = C(I,X)$ muni de la norme $\| \, . \, \|_\infty$ et $\mathbb{M} = \{x \in C, \| x - x_0 \| \leq b\}$.

Soit les applications : $T : \mathbb{M} \to \mathbb{M}$ et $S : \mathbb{M} \to \mathbb{M}$ définies par :

$x \to Tx$ telle que $Tx(t) = \displaystyle\int_{t_0}^{t} h(s,x(s))ds$ pour $t \in I$

$x \to Sx$ telle que $Sx(t) = \displaystyle\int_{t_0}^{t} g(s,x(s))ds$ pour $t \in I$

$$\begin{aligned} \| Tx - Ty \| &= \sup_{t\in I} | Tx(t) - Ty(t) | \\ &= \sup_{t\in I} | \int_{t_0}^{t} (h(s,x(s)) - h(s,y(s)))ds | \\ &\leq \sup_{t\in I} \int_{t_0}^{t} | (h(s,x(s)) - h(s,y(s))) | ds \\ &\leq \sup_{t\in I} \int_{t_0}^{t} k(s) | x(s) - y(s) | ds \\ &\leq \| x - y \| \times \sup_{t\in I} \int_{t_0}^{t} k(s) \\ &\leq \| x - y \| \end{aligned}$$

Ce qui prouve que T est contractante, en particulier continue.

Montrons que S est complètement continue

-Soit $\mathbb{B} \subset \mathbb{M}$ borné et soit $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ une suite infinie de points de $\mathbb{B}$, l'ensemble $\mathbb{G}$ engendré par les éléments $(g(s, x_n(s)))_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{X}$, pour $s \in I$, est relativement compact car image par g d'un ensemble inclut dans $I \times \mathbb{B}$ donc borné, (g complètement continue),

Et d'après **le théorème de Mazure**, l'enveloppe convexe de $\mathbb{G}$ est compact, $\mathbb{G}$ étant relativement compact, alors pour toute suite infinie de point de $\mathbb{G}$ on peut on extraire une sous suite qui converge dans $\mathbb{X}$, Soit donc $(g(s, x_{n_k}(s)))_{k\in\mathbb{N}}$ la sous suite extraite, donc pour t^* fixé dans I, $x_0 + \int_{t_0}^{t^*} g(s, x_{n_k}(s))ds$ converge dans $\mathbb{X}$, et c'est exactement $Sx_{n_k}(t^*)$
Donc pour t^* fixé dans I, $\{Sx_n(t^*) \in \mathbb{X}/n \in \mathbb{N}\}$ est relativement compact.
puisque $\mathbb{H} = \{Sx_n : I \to \mathbb{X}/n \in \mathbb{N}\}$ est equicontinue alors D'après **Ascoli-Arzèla**, $S(\mathbb{B})$ est relativement compact
" ce qui prouve que S est compact "

-Soit $y \in \mathbb{M}$, $(x_n)_{n\mathbb{N}}$ une suite infinie de $\mathbb{M}$ telle que $\lim_{n\to\infty} x_n = y$ donc

$$\forall s \in I \lim_{n\to\infty} g(s, x_n(s)) = g(s, y(s)), \text{(car g est continue)}$$

$g(I \times \mathbb{B})$ étant borné, le théorème de la convergence dominée, ou le théorème de Weierstrass nous prouve que $\lim_{n\to\infty} Sx_n(t) = Sy(t)$ dans $\mathbb{X}$.
Pour tout t dans I, alors supposons que Sx_n ne converge pas vers Sy c'est-à-dire
$\exists \epsilon > 0, \exists n_1, ...n_k, ...$ tel que $\| Sx_{n_k} - Sy \| \geq \epsilon$, or on a vu plus haut que la suite Sx_{n_k} converge vers un élément $\eta \in C$, $\| \eta - Sy \| \geq \epsilon$ contradiction, avec le fait que $Sx_{n_k}(t) \to Sy(t)$ dans $\mathbb{X}$ pour $t \in I$ alors S est continue .

<u>S est complètement continue .</u>

$\forall (u,v) \in \mathbb{M} \times \mathbb{M}$ on a :

$$\begin{aligned}
\parallel Tu(t) - Sv(t) - x_0 \parallel &= \parallel \int_{t_0}^{t} h(s,u(s)) + g(s,v(s))ds \parallel \\
&\leq \parallel \int_{t_0}^{t} h(s,u(s))ds \parallel + \parallel \int_{t_0}^{t} g(s,v(s))ds \parallel \\
&\leq \int_{t_0}^{t} \parallel h(s,u(s)) \parallel ds + \int_{t_0}^{t} \parallel g(s,v(s)) \parallel ds \\
&\leq \mid t - t_0 \mid \sup_{(t,x)\in I\times\mathbb{D}} \parallel g(t,x) \parallel + \int_{t_0-a}^{t_0+a} \parallel h(s,u(s)) - h(s,u_0) + h(s
\\
&\leq a. \sup_{(t,x)\in I\times\mathbb{D}} \parallel g(t,x) \parallel + \int_{t_0-a}^{t_0+a} (k(s) \parallel u(s) - u_0 \parallel + \parallel h(s,u_0) \parallel)d
\end{aligned}$$

puisque $\parallel u(s) - u_0 \parallel \leq b$, on a :

$$\parallel Tu(t) - Sv(t) - x_0 \parallel \leq a. \sup_{(t,x)\in I\times\mathbb{D}} \parallel g(t,x) \parallel + \int_{t_0-a}^{t_0+a} (k(s)b + \parallel h(s,u_0) \parallel)ds \leq b \text{ (par lyp}$$

Ce qui signifie que : $\parallel Tu(t) - Sv(t) - x_0 \parallel \leq b \Leftrightarrow Tu + Sv \in \mathbb{M}$
Alors en utilisant le Lemme précédent, on conclut que $T+S$ Admet un point invariant, c'est-à-dire il existe $x : I \to \mathbb{X}$ continue telle que :

$$x = Tx + Sx \Leftrightarrow x(t) = Tx(t) + Sx(t)$$

x est Solution du système précédent et :

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,x(s))ds$$

3.2 Indice de non-compacité Théorème de Darbo

3.2.1 Rappel Topologiques :

Définition :"Espace métrique précompact"

Un espace métrique (E, d), est dit espace métrique précompact s'il vérifie la condition suivante :
Pour tout $\epsilon > 0$, il existe un recouvrement finie de E par des ensemble de diamètre inférieur à ϵ
ou autrement dit : pour tout $\epsilon > 0$, il existe un sous ensemble fini F de E tel que : $\forall x \in E$ on a $d(x, F) \leq \epsilon$

Proposition 3.1 *Dans un espace métrique (E, d), pour qu'un ensemble $K \subset E$, Soit relativement compact, il faut et il suffit que toute suite infinie de points de K admette une valeur d'adhérence.*

Définition 3.1 ***"Ensemble èquicontinu"***
Soit X un espace Topologique, (F, d) un espace métrique, H une partie de l'ensemble des applications $\mathfrak{F}(X, F)$
On dit que H est un ensemble équicontinu dans X si on a :
$\forall \epsilon > 0$, *et* $\forall x_0 \in X$, $\exists \mathbf{V}$ *voisinage de* x_0 *dans* X, *tel que :*

$$\forall x \in \mathbf{V} \text{ et } \forall f \in H \ d(f(x), f(x_0)) \leq \epsilon$$

Si X est un espace de normé, on a :

$$H \text{ èquicontinue} \Longleftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ tel que } \parallel x - x' \parallel < \eta \text{ Alors } d(f(x), f(x')) < \epsilon \ \forall f \in H$$

3.2.2 Indice de non-compacité d'une ensemble

Définition 3.2 *Soit X une espace de Banach, et A un partie bornée de X, on appelle "Indice de non-compacité" de A dans X, le réel positif défini par :*

$$\alpha(A) = \inf \left\{ c > 0, \exists n_c \in \mathbb{N} \ et \ \left\{ x_1^c, x_2^c, ..., x_{n_c}^c \right\} \subset A \right\} \ tel \ que A \subset \bigcup_{i=1}^{n_c} B(x_i^c, \frac{1}{2}c)$$

3.2.3 Propriétés

Proposition 3.2 *Soit X un espace de Banach, et A une partie bornée de X, Alors :*

$$\alpha(A) = 0 \Longleftrightarrow A \ est \ relativement \ compact$$

démonstration :

Soit A une partie bornée de X telle que $\alpha(A) = 0$

$$\alpha(A) = 0 \Longleftrightarrow \forall c > 0, \exists n_c \in \mathbb{N} \text{ et } \left\{ x_1^c, ..., x_{n_c}^c \right\} \subset A \text{ tel que } A \subset \bigcup_{i=1}^{n_c} B(x_i^c, \frac{1}{2}c)$$

$\Longleftrightarrow A$ est prècompact dans un espace de Banach, donc A est relativement compact.

Proposition 3.3 *A et B deux ensembles bornés d'un Banach X on a :*

1. $\alpha(A + B) \leq \alpha(A) + \alpha(B)$
2. *A est borné on a* $\alpha(\overline{co(A)}) = \alpha(A)$

Définition 3.3 ***Une α-contraction***
Soit G ouvert d'un Banach X, et f un application de G dans X continue , on dit que f est $\alpha -$ contraction s'il existe $k \in]0, 1[$ tel que :
quel que soit A borne de G on a : $\alpha(f(A)) \leq k.\alpha(A)$

Définition 3.4 ***(L'enveloppe convexe et fermé)***
Soit Ω un ensemble d'un espace vectoriel normé E.
l'enveloppe convexe et fermé d'un ensemble Ω est le plus petit convexe et fermé contenant Ω c'est-à-dire

$$co(\Omega) = \bigcap \{K \subset E : \Omega \subset K, K \ convexe \ et \ fermé\}$$

3.3 Théorème de DARBO

Dans cette section on présente le théorème de Darbo et quelques généralisations qui donne l'existence du point fixe pour des applications continues sur un sous-ensembles non vides, bornés, fermés et convexes des espaces Banach.
Maintenant nous rappelons le théorème du point fixe suivant qui est une version du point fixe classique pour les applications lipschitziennes dans le contexte des Indice de non-comompacité.

Théorème 3.3 *(Darbo,[5]). Si M est un sous-ensemble fermé, borné et convexe d'un Banach X, et Si f est une α-contraction de M dans M*
Alors il existe au moins un point fixe de M pour f

Démonstration :

puisque $f(M) \subset M$ et M est fermé convexe, on a :
$M_1 = \overline{cof(M)} \subset M$, d'ou $f(M_1) \subset f(M)$ et $M_2 = \overline{cof(M_1)} \subset M_1$,
on obtient ainsi une suite de fermés convexes : $M_{n+1} = cof(M_n)$, et il suit que :
$\overline{cof(M_n)} \subset \overline{cof(M_{n-1})} = M_n$, ainsi $M_{n+1} \subset M_n$ et est bien fermé convexe.
il est clair : $x \in M_n \iff f(x) \in M_{n+1}$, Notons :

$$\begin{aligned}
\alpha(M_{n+1}) =& \overline{cof(M_n)} \\
=& \alpha(f(M_n)) \\
\leq& k.\alpha(M_n) \\
\leq& k.\overline{cof(M_{n-1})} \\
\leq& k.\alpha(f(M_{n-1})) \\
\leq& k.k.\alpha(M_{n-1}) \\
\leq& k^2.\alpha(M_{n-1}) \\
& . \\
& . \\
& . \\
& . \\
\leq& k^n\alpha(M)
\end{aligned}$$

Alors par consèquent $\lim_{n\to\infty} \alpha(M_n) = 0$ car $k \in]0, 1[$

Montrons que l'intersection de M_n est non vide, Soit $(x_n)_n$ une suite infini telle que $x_n \in M_n$, M_1 peut être recouvert par un système fini de boules de diamètre au plus égal à $2k\alpha(M_1) = c_1$, car $\alpha(M_1) \leq k\alpha(M)c_1$ (on suppose que $\alpha(M) \leq 0$), $(x_n)_n \in M_1$, il existe au moins un boule de ce système qui contient une infinité de points , notons la $(x_{1_m})_m \subset M_1$, elle vérifie alors
$\| x_{1_j} - x_{1_q} \| \leq c_1, \forall j, q$. soit M_2 contient $(x_{1_m})_m$ sauf peut-être le premier, et d'autre part peut-être recouvert par une système fini de boules de diamètres au Plus ou égal à $2k^2\alpha(M) = c_2$. Ainsi il existe au moins un boule qui contient une infinité de points de $(x_{1_m})_m$, notons là, $(x_{2_m})_m$ et elle est tel que :
$\| x_{2_j} - x_{2_q} \| \leq c_2, \forall j, q$. et on réitère ce procédé, puis on considère la suite diagonale $(x_{i_i})_{i \in \mathbb{N}}$: il est clair que $\| x_{i_i} - x_{m_m} \| \leq c_1$, avec $c_i = 2k^i\alpha(M)$, ce qui entraîne que la suite converge vers un élément $x \in X$, Vu que $(M_n)_n$ Sont emboités, et que chaque M_n est fermé Alors $x \in M_n$. Ce qui montre que M_n n'est pas vide. $\alpha(M_n) \leq k^i\alpha(M) \forall i \in \mathbb{N}$, donc $\alpha(M_n) = 0$. Ainsi f est une Application continue de l'ensemble fermé et convexe et compact M_n en lui-même, il existe Alors au moins un point fixé par f,d'après le Théorème de **SCHAUDER**.

3.4 Quelques généralisations du théorème de Darbo

Théorème 3.4 *[6] Soit Ω un sous-ensemble non vide, fermé, borné et convexe d'un espace de Banach E,et $T : \Omega \to \Omega$ une fonction continue telle que*

$$\psi(\alpha(TX)) \leq \phi(\alpha(X)) \tag{3.4}$$

*pour chaque sous-ensemble non vide X de Ω, où ψ **et** $\phi : R^+ \to R$ sont deux fonctions.*
telle que :

1. *pour $u, v \in R^+$ si $\psi(u) \leq \phi(v)$, alors $u \leq v$.*
2. *pour $\{u_n\}$ et $\{v_n\} \subset R_+$ avec $\lim u_n = \lim v_n = w$*

$$\text{si } \psi(u_n) \leq \phi(v_n) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ alors } w = 0.$$

alors : T admet un point fixe dans Ω.

Preuve :
Voir [6]

Théorème 3.5 *[6] Soit Ω est un sous-ensemble non vide, fermé, borné et convexe d'un espace de Banach E. et $T : \Omega \to \Omega$ une fonction continue telle que*

$$\psi(\alpha(TX)) \leq \phi(\alpha(X)) - \theta(\alpha(X)) \quad (3.5)$$

pour chaque sous-ensemble non vide X de Ω, où ψ, ϕ et $\theta : R^+ \to R^+$ sont trois fonctions telles que ϕ et θ sont bornées sur tout intervalle borné dans R^+ et ψ est continue.
De plus, supposons que

1. $\psi(x) \leq \phi(y)) \Longrightarrow x \leq y$;

2. *pour toute suite $\{x_n\}$ dans R^+ avec $x_n \to t > 0$;*

$$\psi(t) - \lim_{n\to\infty} \sup \phi(x_n) + \lim_{n\to\infty} \inf \theta(x_n) > 0$$

Alors, T admet un point fixe dans Ω.

Preuve :
Voir [6]

3.5 Théorème de d'Ambrosetti :

Théorème 3.6 *Soit :*
-X un espace de Banach
-$I = [a, b] \subset \mathbb{R}$
-$C_u(I, X)$ = espace de Banach des application continues de I dans X, muni de la norme sup.
-$H \subset C_u(I, X)$ borné et equicontinue
-$H_t = \{f'(t)/t \in I$ et $f \in H\}$
Alors :

$$\alpha(H) = \sup_{t\in I} \alpha(H_t)$$

Démonstration :
H étant une partie de $C_u(I, X)$, équicontinue Alors :

$$\forall\epsilon > 0, \exists\eta > 0 \text{ telle que si } \mid t - t' \mid < \eta \Longrightarrow \| f(t) - f(t') \| < \epsilon \ \forall f \in H$$

On construit la suite finie de points définis par :

$$a = t_0 < t_1 < ...... < t_{n-1} < t_n = b \text{ avec } \sup_{1\leq i\leq n} (t_i - t_{i-1}) < \eta$$

H étant borné dans $C_u(I,X)$, alors $\forall t \in I, H_t$ est borné dans X
On introduit alors :
$\alpha(H_a) = u_0, ..., \alpha(H_{t_j}) = u_j, ..., \alpha(H_b) = u_n$ on a :
$\forall j \in \{0, ..., n\}$ il existe $\left\{x_{j,1}, x_{j,2}, ..., x_{j,k_j}\right\} \in X$ telle que :

$$H_{t_j} \subset \bigcup_{1\leq p\leq k_j} S_p^j \text{ avec } S_p^j = \left\{x \in X / \parallel x - x_{j,p} \parallel \leq \frac{1}{2}u_j + \epsilon\right\}$$

Soit $f \in H$, On a pour $t \in [t_{j-1}; t_j], \parallel f(t) - f(t_j) \parallel < \epsilon$, et il existe un élément de $x_{j,p} : 1 \leq p \leq k_j$ noté x_{j,p_j} tel que :

$$\parallel f(t_j) - x_{j,p_j} \parallel \leq \frac{1}{2}u_j + \epsilon, \text{ Alors } \parallel f(t) - x_{j,p_j} \parallel \leq \frac{1}{2}u_j + 2\epsilon$$

On construit l'élément $g \in C_u(I,X)$ défini par les relations :

$$\begin{cases} g(t) = x_{1,p_1} & t \in [a, t_1] \\ g(t) = \dfrac{t_2 - t}{t_2 - t_1}x_{1,p_1} + \dfrac{t - t_1}{t_2 - t_1}x_{2,p_2} & t \in [t_1, t_2] \\ g(t) = \dfrac{t_3 - t}{t_3 - t_2}x_{2,p_2} + \dfrac{t - t_2}{t_3 - t_2}x_{3,p_3} & t \in [t_2, t_3] \\ . & . \\ . & . \\ . & . \\ . & . \\ g(t) = \dfrac{t_n - t}{t_n - t_{n-1}}x_{n-1,p_{n-1}} + \dfrac{t - t_{n-1}}{t_n - t_{n-1}}x_{n,p_n} & t \in [t_{n-1}, t_n] \end{cases}$$

Soit $t \in [a,b]$, il existe $j \in \{1,2,....,n\}$ tel que $t \in [t_{j-1},t_j]$ et puisque H est équicontinue, On peut voir que :

$$f(t) = \frac{t_j - t}{t_j - t_{j-1}} f(t_{j-1}) + \frac{t - t_{j-1}}{t_j - t_{j-1}} f(t_j) + \xi(t) \text{ avec } \parallel \xi(t) \parallel < \epsilon$$

On voit alors que pour $t \in I$, il existe j tel que pour $t \in [t_{j-1},t_j]$ on a :

$$\parallel f(t) - g(t) \parallel < \frac{t_j - t}{t_j - t_{j-1}} \parallel f(t_{j-1}) - x_{j-1,p_{j-1}} \parallel + \frac{t_{j-1} - t}{t_j - t_{j-1}} \parallel f(t_j) - x_{j,p_j} \parallel + \epsilon$$

On obtient alors que : $\parallel f(t) - g(t) \parallel < \frac{1}{2} u_j + 2\epsilon$

Donc $\parallel f - g \parallel < \dfrac{1}{2} \sup\limits_{1 \leq j \leq n} u_j + 2\epsilon$

L'ensemble des $g \in C_u(I,X)$ construit comme précédemment est fini car il sont construit de manière qu'elles ne dépendent que de $(x_{j,p_j})_{1 \leq j \leq n}$ avec $x_{j,p_j} \in \left\{x_{j,1}, x_{j,2}, ..., x_{j,k_j}\right\}$

On a :

$$\forall f \in H, \exists g \in C_u(I,X) \text{ telle que : } \parallel f - g \parallel < \frac{1}{2} \sup u_j + 2\epsilon$$

Ce qui signifie que : $\alpha(H) \leq u_j + 4\epsilon \leq \sup(H_t) + 4\epsilon, \forall \epsilon > 0, t \in I$

Alors

$$\alpha(H) \leq \sup_{t \in I} \alpha(H_t)$$

et il est évident que $\forall t \in I \alpha(H_t) \leq \alpha(H)$

<u>**Conclusion :**</u>

$$\alpha(H) = \sup_{t \in I} \alpha(H_t)$$

Conséquence immédiate : le théorème d'Arzela-Ascoli en est une conséquence.

3.6 Théorème Szuffla

Théorème 3.7 *Soit* $I = [0, a]$, X *un espace de Banach, et* B *la boule :*

$$B = \{x \in X / \parallel x - x_0 \parallel \leq b\} \text{ avec } x_0 \in X \text{ et } b \in \mathbb{R}^+$$

On considère $f : B \times I \mapsto X$ *une application continue pour laquelle il existe* $k > 0$ *tel que :*

$$\alpha(f(S, I)) \leq k.\alpha(S), \forall S \subset B \tag{3.6}$$

Alors le système suivant :

$$\begin{cases} x'(t) & = f(t, x(t)) \\ x(t_0) & = x_0 \end{cases} \tag{3.7}$$

Possède au moins une solution définie sur $[0, h]$ *avec* $h = \min(a, \frac{b}{M}, \frac{1}{k})$ *et* $M = \sup \parallel f(x,t) \parallel$, $(x, t) \in B \times I$

Démonstration :

Remarque :

1. $S \subset B$ est borné car B est Borné, et puisque f est continue et $S \times I$ est borné Alors (3.7) est bien défini .

2. M est fini d'après ce qui précède.

a) Idée de la Démonstration :
le problème 3.7 est équivalent au problème intégral : $x(t) = x_0 + \int_0^t f(x(s), s)ds$. Il faut donc construire une application T de $C(I, X)$ qui doit vérifier les hypothèses du Théorème **Darbo** , afin qu'elle admette un point fixe, point qui coïncide avec la solution du système 3.7

b) Démonstration : posons $J = [0, h]$
On a $C(J, X)$ muni de la norme de la convergence uniforme est un espace de Banach, et puisque B est fermé dans X, alors $C(J, B)$ est fermé dans $C(J, X)$. on considère l'application T de $C(J, B)$ dans lui même définie par :

$$x \mapsto Tx \text{ avec } Tx(t) = x_0 + \int_0^t f(x(s), s)ds$$

T est continue : Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite infinie d'éléments dans $C(J, B)$ convergente dans $C(J, B)$ vers un éléments ξ. On a $x_n(s)$ converge vers $\xi(s)$ dans X, pour chaque $s \in J, f$ étant continue on a $f(x_n(s), s)$ converge vers $f(\xi(s), s)$,

il en résulte en vertu du théorème de **Weierstrass** que pour chaque t de J, $Tx_n(t)$ converge vers $T\xi(t)$ dans X.
On déduit que l'ensemble des valeurs $Tx_n(t)$ pour t fixé dans J est relativement compact dans X, (Car toute suite de cet ensemble admet au moins une valeur d'adhérence). De plus les éléments Tx_n dans $C(J, X)$ Sont èquicontinus et bornés, il en résulte du Théorème **Ascoli-Arzèla** que l'ensemble des Tx_n est relativement compact dans $C(J, E)$, comme toute suite infinie extraite de la suite Tx_n est relativement Compact dans $C(J, X)$
Donc toute suite infinie extraite de la suite Tx_n est convergente dans $C(J, X)$ donc vers $T\xi$.
On vient de démontrer que :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ tel que : } \parallel x_n - \xi \parallel < \eta \Longrightarrow \parallel Tx_n - T\xi \parallel < \epsilon$$

C'est à dire que T est continue dans $C(J, X)$
Montrons que T est une α-contraction
Soit L un sous-ensemble borné quelconque de $C(J, B)$, on considère un système fini $(y_i)_{1\leq i\leq n} \in C(J, B)$ tel que $\forall x \in L, \exists y_i$ tel que :
$\forall s \in J, \parallel x(s) - y_i(s) \parallel < \frac{1}{2}\alpha(L) + \epsilon$, chaque y_i étant continu sur J compact donc uniformément continue, par conséquent il existe $\{s_{i1}, s_{i2}, ..., s_{ik_i}\} \in J$ tel que $\forall s \in J$ on peut trouver $s_{ip}(1 \leq p \leq k_i)$ pour lequel on a : $\parallel y_i(s) - y_i(s_{ip}) \parallel < \epsilon$, on note $x_1, x_2, ..., x_m$ le système fini de points de X engendré par $y_i(s_{ip})$ pour $1 \leq p \leq r_i$ et $1 \leq i \leq n$ on a alors :

$$\forall s \in J, \forall x \in L, \exists (x_l)_{1\leq l\leq m} \in X \text{ tel que } \parallel x(s) - x_l \parallel < \frac{1}{2}\alpha(L) + 2\epsilon$$

pour t fixé dans J, on étudie l'ensemble F des éléments de X engendré par : $\frac{1}{t}\int_0^t f(x(s), s)ds$ quand x décrit L.
Remarque : A ensemble borné : $y \in co(A) \Leftrightarrow y = \sum_{i=1}^{n} a_i y_i$ avec $y_i \in A$, système fini et $a_i \geq 0$ tel que $a_1 + a_2 + ... + a_n = 1$.
Soit la subdivision de l'intervalle $[0, t]$ tel que $s_0 = 0, s_1, ..., s_{n-1}, s_n = t$ $\int_0^t f(x(s), s)ds$ existe et on a que $f(x(s), s) = f(x(s_i), s_i)$;pour $s_{i-1} < s < s_i$ et on remarque alors que :

$$\int_0^t f(x(s), s)ds = \sum_{i=1}^{n} f(x(s_i, s_i)) = \sum_{i=1}^{n} f_i.s_i$$

Donc $\dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^t f(x(s), s)ds = \sum_{i=1}^{n} f_i.\frac{s_i}{t}$ avec $s_i \geq 0$ et $\sum_{i=1}^{n} \frac{s_i}{t} = 1$ et (f_i) système fini de $(f(x(s), s))_{s\in J}$

Donc d'après la remarque précédente : $\dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^t f(x(s),s)ds \in \overline{co(f(x(s),s))} \subset \overline{coW}$, où $W = \{f(x(s),s)/x \in L, s \in J\}$,on vient de montrer que $F \subset \overline{coW}$ d'après l'indice de non compacité , F et W étant borné on a $\alpha(F) < \alpha(\overline{coW}) = \alpha(W)$
Soit $V = \bigcup_{i=1}^m B(x_i, \frac{1}{2}\alpha(L) + 2\epsilon)$, on a bien $\forall s \in J, \forall x \in L, x(s) \in V \cap B$ il en résulte que $W \subset f(B \cap V, I)$ d'ou :
$\alpha(W) \leq \alpha(f(B \cap V, I)) < k\alpha(B \cap V) \leq k\alpha(V) = k(\alpha(L) + 4\epsilon)$
$\alpha(F) \leq \alpha(W) \leq k\alpha(L)$ alors $\alpha(tF) \leq k.t\alpha(L)$
et Finalement : $\alpha(TL(t)) \leq k.t\alpha(L) \leq k.h\alpha(L)$
d'autre part TL est un ensemble borné et équicontinu
et d'après le Théorème **d'Ambrosetti** : $\alpha(TL) = \alpha(TL(t)) \leq k.h\alpha(L)$
On vient de démontrer que :
$T : C(J,B) \longmapsto C(J,B)$ continue et qui vérifie :
$\forall L$ sous ensemble borné de $C(J,B)$, $\alpha(TL) \leq k.h\alpha(L)$ et avec le choix de h on a $h.k \in]0,1[$.
T est une α-contraction de $C(J,B)$ dans $C(J,B)$

Conclusion :

$C(J,B)$ étant borné, fermé et convexe et d'après le Théorème de **Darbo**, T admet au moins un point fixe $x(t) \in C(J,B)$ tel que $Tx = x$, et $x(t)$ est donc solution du problème intégrale,
c'est-à-dire $x(t)$ solution du système :

$$\begin{cases} x'(t) & = f(t, x(t)) \\ x(t_0) & = x_0 \end{cases}$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Mostafaï, Cours De Topologie, OPU.

[2] E. Zeidler, Nonlinear Functionnal Analysis of Epidemics,of Epidemics, World Scientific Publishing, Co. Pte. Ltd. 2009.

[3] H. Brézis,Analyse Fonctionnelle, théorie et applications.Dunod,1999.

[4] D.R. Smart, Fixed Point Theorem, Cambridge Tracts in Mathematics, No.66, Cambridge University Press, London.New York,1974.

[5] J. Bana ?, K. Goebel, Measures of Noncompactness in Banach spaces, Lect. Notes Pure Appl. Math., Dekker, New York, 1980, vol. 60

[6] A. Samadi, M. B. Ghaemi, An Extension of Darbo ?s Theorem and Its Application, Abstract and Applied Analysis, 2014, vol. 2014, pp. 1-11.

[7] J. M. Ayerbe Toledano ,T. Dominguez Benavides, G. Lopez Acedo, Measures of noncompactness in metric fixed point theory, Operator theory advances and applications, Basel. Boston. Berlin, Birkhauser, 1997, Vol. 99.

[8] J. Bana ?, Measures of noncompactness in the study of solutions of nonlinear differential and integral equations, Cent. Eur. J. Math., 2012, 10(6), 2003-2011

[9] R. P. Agarwal, M. Meehan, and D. O ?Regan, Fixed Point Theory and Applications, Cambridge Tracts in Mathematics, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2001, vol. 141.