République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et La Recherche Scientifique

Université De Ghardaïa

Faculté des Science et de Technologie

Département de Mathématique et Informatique

Laboratoire de Mathématiques et Sciences Appliquées

Projet de fin d'étude présenté en vue de l'obtention de diplôme de

MASTER

Département : Mathématiques et Informatique

Spécialité : Analyse Fonctionnelle et applications

THÈME

Solutions positives pour une classe de problèmes aux limites elliptiques semi-linéaires

Présenté par :

Bouchra OULAD HADDAR

Soutenu publiquement le : 06/ 09/ 2020, devant le jury composé de :

Smail LATRÈCHE	MA(Univ. Ghardaia)	Président
Yacine HADJ MOUSSA	Pr(Univ. Ghardaia)	Examinateur
Bahia BAHEDDI	MA(Univ. Ghardaia)	Raporteur

Année universitaire 2019/2020

DÉDICACES

Je dédie ce travail :

À ma chère **mère**, qui m'a encouragé tout au long de ma vie et qui est crédité de ma carrière et de ma diligence et qui m'a fourni toutes les raisons du succès.

À mon cher **père**, qui m'a soutenu et a planté la volonté et la continuité malgré les difficultés et m'a appris toutes les significations de respect et de dignité.

À mes sœurs, mes frères, mes oncles et toute ma famille, jeunes et vieux.

A vous tous **mes amis et collègues**, qui m'avez prouvé que les frères ne sont pas seulement dans l'utérus.

A vous **mes professeurs**, guide de la connaissance et du progrès et éleveurs de générations.

B. Oulad haddar

REMERCIEMENT

Au nom ***Allah*** Clément et Miséricordieux !

Je tiens, en premier lieu, remercier ***Allah*** de m'avoir guidé tout au long de ce chemin et de m'avoir donné la force, le courage et la volonté pour accomplir ce travail.

Mes remerciements vont également à tous les membres du Jury, pour l'honneur qu'ils me font en acceptant d'être dans le Jury de ma thèse et à tous les enseignants de l'université.

Il m'est particulièrement agréable de remercier mon aimable promotrice Mademoiselle **BAHEDI Bahia**, pour m'avoir proposé ce thème, pour ses orientations qui m'ont permis de mener mon travail à bien.

Je remercie tout particulièrement M.**LATRÈCHE Smail**, j'ai l'honneur et le plaisir d'être parmi ses étudiantes.

Mon respect et mes remerciements vont ensuite, aux deux personnes les plus chères pour moi, ma mère et mon père, pour leurs amour, leurs conseils ainsi que leurs soutien inconditionnel, qui m'a permis de réaliser les études que je voulais faire et par conséquent ce mémoire.

Enfin, j'exprime mes remerciements à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

B. Oulad haddar

ملخص

في هذه المذكرة، نقدم دراسة حول وجود حلول موجبة لفئة من المسائل الإهليجية شبه خطية، و يتم إثبات ذلك من خلال تحويلها الى مسألة نقطة صامدة، و باستعمال مبدأ الحد الأقصى تم اثبات بان حلولها موجبة. تطرقنا في بداية الامر لدراستها ضمن حالة خاصة من مؤثرات التفاضل الخطية الإهليجية التي تتمثل في مؤثر لابلاسيان تحت ظروف حدود من نوع دريكلي وقد تم ايضا التوصل الى وحدانية الحل و الشرط الضروري لوجوده، وبعد ذلك تناولنا دراسة اخرى لحالة اعم من مؤثرات التفاضل الخطية الإهليجية من الدرجة الثانية تحت شروط معينة، وقد تم البرهان على وجود الحل بالاعتماد على طريقة الحلول السفلية و الحلول العلوية.

الكلمات المفتاحية: نظام الإهليجي شبه خطي ، حل موجب ، طريقة الحلول السفلية و العلوية ، مؤثر لابلاسيان ، مبدأ الحد الأقصى.

Résumé

Dans ce mémoire, nous présenterons une étude sur l'existence de solutions positives d'une classe de problèmes elliptiques semi-linéaires. Ceci est prouvé en le transformant en un problème de point fixe et en utilisant le principe du maximum pour obtenir la positivité des solutions. Nous allons considérer d'abord le cas particulier de l'opérateur Laplacien soumis à conditions au bord de type Dirichlet, l'unicité de la solution est obtenue ainsi qu'une condition nécessaire de l'existence. Ensuite, nous allons examiner le cas plus général des opérateurs différentiels elliptiques linéaires de deuxième ordre sous conditions au bord de type Robin, l'existence de la solution est démontrée en s'appuyant sur la méthode de sous et sur-solutions.

Mots clés: système elliptique semi-linéaire, solution positive, la méthode de sous et sur solutions, opérateur Laplacien, principe du maximum.

Abstract

In this thesis, we will present a study on the existence of positive solutions to a class of semilinear elliptic problems, by transforming it into a fixed point problem and using the principle of maximum to obtain the positivity of the solutions. We first discussed it in a particular case of linear elliptic differential operators, which is a Laplacian operator with Dirichlet boundary conditions, the uniqueness of the solution is also obtained as well as a necessary condition to the existence. Then, we have examined another study of a more general case of of second orde linear elliptic differential operators with Robin boundary conditions, the existence of the solution has been demonstrated by relying on the method of lower and upper solutions.

Keywords: semilinear elliptic system, positive solution, the method of lower and upper solutions, Laplacian operator, maximum principle.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

Dans ce mémoire, nous présentons deux études sur l'existence de solutions positives d'une classe de problèmes elliptique, la première étude est réalisée par Zhong Jinbiao et Chen Zuchi "Existence and uniqueness of positive solutions to a class of semilinear elliptic systems"[17] et la deuxième par Ruyun Ma, Ruipeng Chen et Yanqiong Lu "Method of lower and upper solutions for elliptic systems with nonlinear boundary condition and its applications"[15].

Dans le premier chapitre, nous rappelons des notions et des résultats qui nous serons utiles dans les chapitres ultérieurs tels que application compacte, l'opérateur différentiel elliptique et l'opérateur Laplacien, la fonction de Green, des théorèmes de l'existence et l'unicité des solutions aux problèmes elliptiques linéaires et le principe du maximum.

Dans le deuxième chapitre, nous examiné les résultats de Zhong Jinbiao et Chen Zuchi sur l'existence et l'unicité de la solution du problème elliptique semi-linéaire soumis à conditions au bord de type Dirichlet :

$$\begin{cases} -\Delta u &= g(x,v), \quad dans\ \Omega \\ -\Delta v &= f(x,u), \quad dans\ \Omega \\ u=v &= 0, \quad sur\ \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^n (n \geq 1)$ un ensemble ouvert borné suffisamment régulière, connexe et convexe.
$f(x,u)$, $g(x,u)$ sont des fonctions données sur $\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^+$.
Robert Dalmasso [8] a étudié le problème (1), Zhong Jinbiao et Chen Zuchi ont maintenu les hypothèses de monotonie et de positivité de f et g de [8], sauf que leur travail différent dans la méthode utilisée et qui est presque identiques à la méthode FJSA Corrêa [7].
L'idée pour démontrer l'existence de la solution consiste ici à transformer le problème (1) en

un problème de point fixe, en utilisant l'inverse de l'opérateur Laplacien dont nous allons parlé dans le premier chapitre. En appliquant le principe du maximum on obtient la positivité de la solution, quant à l'unicité de la solution on l'obtient en utilisant des hypothèses basées sur f, g et la fonction de Green. On termine par une condition nécessaire pour l'existence de la solution.

Dans le troisième chapitre, nous présentons les résultats d'Ruyun Ma, Ruipeng Chen et Yanqiong Lu dans [15] qui utilisent la méthode de sous et sur-solution pour démontrer l'existence de la solution du problème elliptique suivantes

$$\left\{\begin{array}{rcll} L_k u_k & = & f_k(x, u_k, [u]_k), & dans\ \Omega, \\ \frac{\partial u_k}{\partial \nu} + b_k(x) u_k & = & g_k(x, u_k), & sur\ \partial\Omega, \end{array}\right. \quad k = 1, 2, ..., m, \tag{2}$$

où Ω un ensemble borné suffisamment régulière, connexe et convexe dans $\mathbb{R}^n (n \geq 2)$ et ν est le vecteur normale unitaire orienté vers l'extérieur.
$u = (u_1, ..., u_m), [u]_k = (u_1, ..., u_{k-1}, u_{k+1}, ..., u_m)$, et $L_k (k = 1, 2, ..., m)$ est un opérateur uniformément elliptique de la forme

$$L_k(x)u = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^k(x)\partial_{ij}u + \sum_{i=1}^{n} a_i^k(x)\partial_i u + a^k(x)u,$$

où $(a_{ij}^k)_{n\times n}$ est une matrice symétriques.
$f_k(x, u_k, [u]_k)$ sont des fonctions données sur $\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^m$, $g_k(x, u_k)$ sont des fonctions données sur $\partial\Omega \times \mathbb{R}^m$.
Dans ce travail nous considérons le cas particulière où $g_k(x, u_k) \equiv 0$ pour tout
$k = 1, 2, ..., m$. Le problème devient

$$\left\{\begin{array}{rcll} L_k u_k & = & f_k(x, u_k, [u]_k), & dans\ \Omega, \\ \frac{\partial u_k}{\partial \nu} + b_k(x) u_k & = & 0, & sur\ \partial\Omega, \end{array}\right. \quad k = 1, 2, ..., m, \tag{3}$$

On montre que le système (3) est équivalent à un problème de point fixe, en utilisant ce dernier résultat et les hypothèses basées sur f_k et en utilisant la méthode de sous et sur-solutions nous obtenons l'existence de la solution.
Dans le cas particulier où $m = 1$, le résultat de [15] généralise le théorème 2.1 de Herbert Amann [2]. Nous terminons par une application sur le modèle juvénile-adulte[15].

NOTATION

Notation	Définition
q	Exposant conjugue de p, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$
$C(\bar{\Omega})=C^0(\bar{\Omega})$	Espace des fonctions continues sur $\bar{\Omega}$
$L^\infty(\Omega)$	$\{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \setminus u$ mesurable $\exists C$ tel que $\mid u(x) \mid \leq C$ presque pour tous les points $x \in \Omega\}$
$\parallel . \parallel_{L^\infty(\Omega)} = \parallel . \parallel_{C(\bar{\Omega})}$	Notée par $\parallel . \parallel_\infty$ et égale à $\sup_{x\in\Omega} \mid u(x) \mid$
$C^r(\bar{\Omega}), C^\infty(\bar{\Omega})$	L'espace des fonctions r fois continument différentiables et des fonctions indéfiniment dérivable sur $\bar{\Omega}$ respectivement
$\parallel . \parallel_{C^r(\bar{\Omega})}$	$\sum_{i=0}^r \sum_{\mid s \mid = i} \parallel D^s u \parallel_{C(\bar{\Omega})}$
$L^p(\Omega), 1 \leq p < \infty$	$\{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \setminus u$ mesurable, $\int_\Omega \mid u \mid^p < \infty\}$
$\parallel . \parallel_{L^p(\Omega)}$	$(\int_\Omega \mid u(x) \mid^p dx)^{\frac{1}{p}}$
$W_p^k(\Omega)$	Espace de Sobolev, à dérivées faibles jusqu'à l'ordre k dans $L^p(\Omega)$
$H^k(\Omega), H_0^k(\Omega)$	$W_2^k(\Omega)$, $W_2^k(\Omega)$ avec trace nulle respectivement
$\parallel . \parallel_{W_p^k(\Omega)}, k \in \mathbb{N}$	$(\sum_{\mid s \mid=0}^k \parallel \partial_x^s u \parallel_{L^p(\Omega)}^p)^{\frac{1}{p}}$
$C^\alpha(\bar{\Omega})$	L'espace des fonctions α-Hölderiennes c'est à dire $\{u \in C(\bar{\Omega}); \sup_{x\neq y} \dfrac{\mid u(x)-u(y) \mid}{\mid x-y \mid^\alpha} < \infty, \alpha \in]0,1[\}$
$< u >_{C^\alpha(\bar{\Omega})}^{(\alpha)}$	$\inf\{C \geq 0 : \mid u(x)-u(y) \mid \leq C \mid x-y \mid^\alpha, x, y \in \bar{\Omega}\}$
$\parallel . \parallel_{C^\alpha(\bar{\Omega})}$	$< u >_{C^\alpha(\bar{\Omega})}^{(\alpha)} + \parallel u \parallel_{C(\bar{\Omega})}$
$C^{r+\alpha}(\bar{\Omega})$	L'espace des fonctions $u \in C^r(\bar{\Omega})$ tel que les dérivées d'ordre r appartiennent à $C^\alpha(\bar{\Omega})$
$\parallel . \parallel_{C^{r+\alpha}(\bar{\Omega})}$	$\parallel u \parallel_{C^r(\bar{\Omega})} + \sum_{\mid s \mid=r} < \partial^s u >_{C(\bar{\Omega})}^{(\alpha)}$

CHAPITRE 1 PRÉLIMINAIRES

Dans ce chapitre, nous introduisions des définitions, des théorèmes et des propositions qui seront utilisées dans le reste de ce mémoire.

1.1 Opérateur elliptique linéaire

Notons $L = L(x, \partial_x)$ l'opérateur différentiel elliptique linéaire de deuxième ordre sur l'ensemble ouvert borné Ω de $\mathbb{R}^n$,

$$L(x, \partial_x)u(x) = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\partial_{ij}u(x) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\partial_i u(x) + c(x)u(x), \tag{1.1}$$

où ∂_i et ∂_{ij} désignent les première et deuxième dérivées partielles par rapport à x_i et x_i, x_j respectivement.

1.1.1 Opérateur uniformément elliptique

Définition 1.1.1 *[11] On dit que l'opérateur différentiel L est uniformément elliptique, s'il existe une constante $\mu > 0$ telle que*

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\zeta_i\zeta_j \geq \mu|\zeta|^2,\ \forall \zeta \in \mathbb{R}^n,\ x \in \Omega \tag{1.2}$$

et

$$a_{ij}, b_i, c \in L^{\infty}(\Omega).$$

1.2 Principes du maximum

Soit Ω un ensemble ouvert borné et connexe de $\mathbb{R}^n$.

Théorème 1.2.1 *[16]Soit $u \in C^2(\Omega)$ satisfait l'inégalité*

$$-Lu \geq 0 \text{ dans } \Omega,$$

où $c(x) \geq 0$ et borné sur Ω. Si u atteint un minimum non positif m_0 en un point x_0 de Ω, alors $u \equiv m_0$. De plus, si $x_0 \in \partial\Omega$ est un point minimum de u, alors $\partial u/\partial n < 0$ à x_0 sauf si $u \equiv m_0$ sur Ω.

Théorème 1.2.2 *[16] Soient c, β_0 des fonctions positives bornées, qui ne sont pas identiquement nulles en même temps. Si $u \in C^2(\Omega)$ satisfait*

$$\begin{cases} -Lu & \geq & 0, & \text{dans } \Omega \\ \partial u/\partial n + \beta_0(x)u & \geq & 0, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

alors $u \geq 0$ sur $\bar{\Omega}$. De plus, $u > 0$ sur Ω sauf si $u \equiv 0$.

1.3 Problème aux limites elliptique linéaire

Soit Ω un ensemble ouvert borné et connexe de $\mathbb{R}^n$ de frontière suffisamment régulière, nous considérerons le problème de Dirichlet :

$$\begin{cases} Lu(x) & = & f(x) & dans & \Omega, \\ u(x) & = & \varphi(x) & sur & \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.3}$$

Et sous la condition de Robin :

$$\begin{cases} Lu(x) & = & f(x) & dans & \Omega, \\ Bu = \alpha_0(x)\frac{\partial u}{\partial n} + \beta_0(x)u & = & h(x) & sur & \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.4}$$

Théorème 1.3.1 *[12] Supposons que Ω est un ensemble ouvert borné et connexe avec $\partial\Omega$ de classe C^{1+1}. Supposons également qu'un opérateur différentiel elliptique de second ordre L soit donné par (1.1), où les coefficients $a_{ij} \in C(\bar{\Omega})$, b_i, $c \in L^\infty(\Omega)$ tel que $c \geq 0$ et ils satisfont la condition (1.2). Si $f \in L^p(\Omega)$ et $\varphi \in W_p^{1-1/p}(\partial\Omega)$ pour tout $0 < p < \infty$. Alors le problème de Dirichlet (1.3) admet une solution unique dans $W_p^2(\Omega)$ et vérifie l'estimation suivante*

$$\| u \|_{W_p^2(\Omega)} \leq C(\| f \|_{L^p(\Omega)} + \| \varphi \|_{W_p^{1-1/p}(\partial\Omega)}),$$

où la constante C est indépendante de f et φ.

Théorème 1.3.2 *[16] Pour tout $f \in L^P(\Omega)$, $h \in W_p^m(\partial\Omega)$ où $p \geq 1$ et $c \geq 0$, tel que c, β_0 ne sont pas tous deux identiques nulle, le problème (1.4) admet une solution unique u dans $W_p^2(\Omega)$ et il existe un constante C' indépendante de f, h telle que*

$$\| u \|_{W_p^2(\Omega)} \leq C^{'}(\| f \|_{L^p(\Omega)} + \| h \|_{W_p^{m-1/p}(\Gamma)}),$$

où $m = 2$ lorsque $\alpha_0 = 0$ et $m = 1$ lorsque $\alpha_0 > 0$.

Théorème 1.3.3 *[16]Soit $f \in C^\alpha(\bar{\Omega})$, $h \in C^{1+\alpha}(\partial\Omega)$ lorsque $\alpha_0 > 0$ et $h \in C^{2+\alpha}(\partial\Omega)$ lorsque $\alpha_0 = 0$ et soit $c \geq 0$ et non identiquement nulle lorsque $\beta_0 \equiv 0$. Il existe alors une solution unique $u \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$ de problème (1.4). De plus u satisfait l'estimation de Schauder*

$$\| u \|_{C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})} \leq C^{''}(\| f \|_{C^\alpha(\bar{\Omega})} + \| h \|_{C^{1+\alpha}(\partial\Omega)})$$

où $C^{''}$ est une constante indépendante de u, f et h.

1.4 Théorèmes du Point fixe et théorème de convergence dominée

1.4.1 Application compacte

Soient E, F deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) et A une application linéaire de E dans F.

Définition 1.4.1 *A est appelé application compacte s'il transforme toute partie bornée de E en une partie relativement compacte de F.*

Définition 1.4.2 *B est relativement compacte dans E si $\bar{B}$ est compacte.*

Théorème 1.4.1 *Soit E un espace métrique, alors :*
E compact $\Leftrightarrow$ de tout suite de E on peut en extraire une sous-suite convergente dans E.

Définition 1.4.3 *A est une application compacte si de toute $(x_n)_n$ de la boule unité B de E on peut en extraire une sous suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ telle que la suite $(A(x_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ converge dans F.*

Remarque 1 *si A n'est pas linéaire, nous utilisons la définition 1.4.1 pour démontrer que A est compacte.*

1.4.2 Théorèmes d'injections continues et compacte

Théorème 1.4.2 *[13] Soit Ω un ensemble ouvert connexe de classe $C^{0,1}$ dans $\mathbb{R}^n$. Alors,*

1. *si $kp < n$, l'espace $W_p^k(\Omega)$ s'injecte continument dans $L^{p^*}(\Omega)$, pour $p^* = np/(n-kp)$ et s'injecte de manière compacte dans L^q pour tout $q < p^*$;*
2. *si $0 \leq r < k - \frac{n}{p} < r+1$, l'espace $W_p^k(\Omega)$ s'injecte continument dans $C^{r+\beta}(\bar{\Omega})$, pour $\beta = k - \frac{n}{p} - r$ et s'injecte de manière compacte dans $C^{r+\alpha}(\bar{\Omega})$ pour tout $\alpha < \beta$.*

Théorème 1.4.3 *[1] Soit Ω un ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $r \geq 0$ et soit $0 < \alpha < \beta \leq 1$. Alors on a les injections suivantes*

(1) $C^{r+1}(\bar{\Omega})$ dans $C^r(\bar{\Omega})$,

(2) $C^{r+\alpha}(\bar{\Omega})$ dans $C^r(\bar{\Omega})$,

(3) $C^{r+\beta}(\bar{\Omega})$ dans $C^{r+\alpha}(\bar{\Omega})$.

sont continu.
De plus si Ω est borné, alors les injections (1) et (2) sont compactes. Si Ω est convexe, nous avons les injections continues de

(4) $C^{r+1}(\bar{\Omega})$ dans $C^{r+1}(\bar{\Omega})$,

(5) $C^{r+1}(\bar{\Omega})$ dans $C^{r+\alpha}(\bar{\Omega})$.

Et si Ω est convexe borné, alors l'injection (1) est compacte et (5) est compacte si $\alpha < 1$.

Corollaire 1

- *Si Ω est borné. Alors pour $0 \leq \alpha \leq 1$, $C^{1+\alpha}(\bar{\Omega})$ s'injecte de façon compacte dans $C(\bar{\Omega})$.*
- *Si Ω est convexe borné. Alors pour $\alpha < 1$, $C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$ s'injecte de façon compacte dans $C^{\alpha}(\bar{\Omega})$.*

Preuve
Soit Ω borné et $0 \leq \alpha \leq 1$, d'après (2) on a $C^{1+\alpha}(\bar{\Omega})$ s'injecte de façon compacte dans $C^1(\bar{\Omega})$ et d'après (1) on a $C^1(\bar{\Omega})$ s'injecte de façon compacte dans $C(\bar{\Omega})$.
Soit Ω convexe et borné, d'après (2) on a $C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$ s'injecte de façon compact dans $C^2(\bar{\Omega})$ et d'après (1) on a $C^2(\bar{\Omega})$ injecte de façon compact dans $C^1(\bar{\Omega})$ et d'après (5) on a $C^1(\bar{\Omega})$ injecte de façon compact dans $C^{\alpha}(\bar{\Omega})$ pour $\alpha < 1$, d'où $C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$ injecte de façon compacte dans $C^{\alpha}(\bar{\Omega})$. pour $\alpha < 1$.

1.4.3 Théorèmes du point fixe

Théorème 1.4.4 *[11](Point fixe de Schauder) Soit X un espace de Banach. Supposons que $K \subset X$ soit compact et convexe, supposons également que*

$$T : K \longrightarrow K$$

est continu. Alors T admet un point fixe dans K.

Théorème 1.4.5 *[10] Soit X un espace de Banach et K un sous-ensemble convexe fermé de X. Si T est une application compacte qui vérifie $T(K) \subset K$ et s'il existe $R > 0$ telle que $U \neq tT(U)$ pour tout $U \in K$ avec $\| U \| = R$ et $0 \leqslant t \leqslant 1$, alors T admet un point fixe $U \in K$ avec $\| U \| \leqslant R$.*

1.4.4 Théorème de convergence dominée

Théorème 1.4.6 *Soit (f_n) une suite de fonction de $L^P(\Omega)$ qui converge simplement sur Ω vert une fonction f. S'il existe $g \in L^p(\Omega)$ telle que pour tout n on a $| f_n | \leq g$, alors*

1. $f \in L^P(\Omega)$.
2. $\| f_n - f \|_{L^P(\Omega)} \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow +\infty$.

1.5 Opérateur Laplacien

1.5.1 Définition et propriétés

Soit Ω un ensemble ouvert borné et connexe de $\mathbb{R}^n$ de frontière suffisamment régulière.

Définition 1.5.1 *Dans le cas $L = -\Delta = \sum_{i=1}^n \partial_{x_i x_i}$, on l'appelle L l'opérateur Laplacien et $L^{-1} = (-\Delta)^{-1}$ son inverse.*

En prend maintenant le problème (1.3) dans le cas particulier

$$L = -\Delta : C(\bar{\Omega}) \longrightarrow C(\bar{\Omega}).$$

Remarque 2 *D'après le théorème 1.3.1 l'opérateur Laplacien L est inversible d'inverse défini sur $L^P(\Omega)$, donc on peut restreindre sur $C(\bar{\Omega})$.*

Proposition 1.5.1 *L'inverse de l'opérateur Laplacien L est compact de $C(\bar{\Omega})$ dans $C(\bar{\Omega})$.*

Preuve

d'après la définition 1.4.3 l'inverse de l'opérateur Laplacien $(-\Delta)^{-1} : C(\bar{\Omega}) \longrightarrow C(\bar{\Omega})$ est compact si pour tout suit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C(\bar{\Omega})$, tel que $\| v_n \|_\infty \leq 1$ il existe une sous suite $(v_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tell que la suite $((-\Delta)^{-1}v_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge dans $C(\bar{\Omega})$.

Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C(\bar{\Omega})$, tel que $\| v_n \|_\infty \leq 1$. On pose $-\Delta u_n = v_n$ et en utilisant le théorème 1.3.1 alors

$$\| (-\Delta)^{-1}v_n \|_{W_p^2(\Omega)} \leq C \| v_n \|_{L^p(\Omega)},$$

puisque $\| v_n \|_\infty \leq 1, \| (-\Delta)^{-1}v_n \|_{W_p^2(\Omega)} \leq C|\Omega|^{\frac{1}{p}}$, où $|\Omega|$ la mesure de Ω et comme $W_p^2(\Omega)$ s'injecte de façon compacte dans $C^{1+\alpha}(\bar{\Omega})$ pour tout $\alpha < \beta$ d'après le théorème 1.4.2 où $r = 1, k = 2, \beta = 1 - \frac{n}{p}$ pour $p > n$, il existe une sous suite $(v_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tell que la suite $((-\Delta)^{-1}v_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge dans $C^{1+\alpha}(\bar{\Omega})$ d'où la convergence dans $C(\bar{\Omega})$.

1.5.2 Formules de Green

Théorème 1.5.1 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné de classe C^1. Alors si $u, \phi \in H^1(\Omega)$ on a la formule suivante :*

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\phi dx = -\int_\Omega u\frac{\partial \phi}{\partial x_i}dx + \int_{\partial\Omega} u\phi\eta_i ds \ \forall i = 1, ..., n$$

où $\eta = (\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n)^T$ est la normale extérieure à Ω.

Cette formule est la généralisation de l'intégration par parties dans $\mathbb{R}^n$.

Corollaire 2 *(Formule de Green pour l'opérateur Laplacien) Soit $u \in H^2(\Omega)$ et $\phi \in H^1(\Omega)$ alors*

$$-\int_\Omega \Delta u\phi dx = \int_\Omega \nabla u\nabla\phi dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta}\phi ds$$

avec $\frac{\partial u}{\partial \eta} = \langle \nabla u, \eta \rangle$.

1.5.3 Formulation variationnelle et théorème de Lax-Milgram

Dans cette section et les sections qui la suit, nous utiliserons les définitions et les théorèmes mentionnées par Lawrence C. Evans dans [11].

Formulation variationnelle

On considère le problème 1.3 sous condition aux bord de Dirichlet homogène suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u &= f(x) \quad dans \quad \Omega, \\ u &= 0 \quad sur \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.5}$$

Nous choisissons l'espace $H_0^1(\Omega)$ pour la condition aux bord $u = 0$ sur $\partial\Omega$.
Multipliant les deux côtés de la première équation de (1.5) par $v \in H_0^1(\Omega)$ puis en l'intégrant sur Ω et en utilisant la formule de Green, on obtient

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx = \int_\Omega f(x) v dx,$$

Définition 1.5.2

1. *La forme bilinéaire $B[\ ,\ ]$ associée à l'opérateur Laplacien pour le problème (1.5) est*
$$B[u,v] = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx$$
pour $u, v \in H_0^1(\Omega)$.
2. *Nous disons que $u \in H_0^1(\Omega)$ est une solution faible du problème (1.5), si*
$$B[u,v] = \langle f, v\rangle_{L^2(\Omega)} \tag{1.6}$$
pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$ où $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2(\Omega)}$ le produit scalaire sur $L^2(\Omega)$.

L'identité (1.6) est parfois appelée **formulation variationnelle** de (1.5).

Théorème de Lax-Milgram

Théorème 1.5.2 *Soit H un espace de Hilbert réel ou complexe muni de norme associée notée $\| \cdot \|$.*
Soient :

1) *$\text{\c{B}} : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire (ou une forme sesquilinéaire si H est complexe) qui est :*
   (a) *continue sur $H \times H$: $\exists \alpha > 0\ \forall (u,v) \in H^2\ |\text{\c{B}}[u,v]| \leq \alpha \parallel u \parallel \parallel v \parallel$*
   (b) *coercive sur H : $\exists \beta > 0\ \forall u \in H\ \text{\c{B}}[u,u] \geq \beta \parallel u \parallel^2$.*
2) *$L(.)$ une forme linéaire continue sur H.*

Sous ces hypothèses, il existe un unique $u \in H$ tel que

$$\text{\c{B}}[u,v] = L(v) \tag{1.7}$$

pour tout $v \in H$.

1.5.4 Problème aux valeurs propres

Définition 1.5.3 *On dit que λ est une valeur propre de l'opérateur Laplacien sous condition au bord de Dirichlet homogène, si il existe une solution non triviale w qui vérifie*

$$\begin{cases} -\Delta w = \lambda w & dans \quad \Omega \\ w = 0 & sur \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.8}$$

Définition 1.5.4 *On appelle $\lambda_1 > 0$ la valeur propre principale, ou la première valeur propre de Laplacien sous condition au bord de Dirichlet homogène.*

Nous avons utilisé le théorème suivante pour un cas particulier d'opérateurs elliptiques symétriques représentés par l'opérateur Laplacien.

Théorème 1.5.3 *(Principe variationnel pour la valeur propre principale)*

(i) Nous avons

$$\lambda_1 = \min\{B[u,u] | u \in H_0^1, \| u \|_{L^2} = 1\}. \tag{1.9}$$

(ii) De plus, le minimum ci-dessus est atteint pour une fonction w_1 positive dans Ω, qui vérifie

$$\begin{cases} -\Delta w_1 = \lambda_1 w_1 & dans \quad \Omega \\ w_1 = 0 & sur \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

(iii) Enfin, si $u \in H_0^1(\Omega)$ est une solution faible de

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda_1 u & dans \quad \Omega \\ u = 0 & sur \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

alors u est un multiple de w_1.

Remarque 3

1. *L'expression (1.9) est équivalente à la déclaration*

$$\lambda_1 = \min_{\substack{u \in H_0^1(\Omega) \\ u \neq 0}} \frac{B[u,u]}{\| u \|^2_{L^2(\Omega)}}.$$

Théorème 1.5.4 *[9] (Théorème de Krein-Rutman) Soit T un opérateur compact dans $L^p(\Omega)$ tel que $u \geq 0$ implique que $Tu \geq 0$. Si $r(T)$ est le rayon spectral de T supposons non nul, alors $r(T)$ est égal à une valeur propre de T. Cette valeur propre correspond à un vecteur propre positive $u_{r(T)}$ avec*

$$Tu_{r(T)} = r(T) u_{r(T)}, \; u_{r(T)} \geq 0 \text{ et } u_{r(T)} \neq 0.$$

1.5.5 Inégalité de Poincaré

Proposition 1.5.2 *Soit Ω borné de classe C^1. Il existe une constante $C_\Omega > 0$ telle que pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$,*

$$\| u \|_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega \| \nabla u \|_{L^2(\Omega)}$$

Remarque 4 *On a la forme bilinéaire $B[u,u] = \| \nabla u \|^2_{L^2(\Omega)}$ avec le problème 1.5 et d'après la définition de λ_1 dans la remarque 3 on obtient $\| u \|^2_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{\lambda_1} \| \nabla u \|^2_{L^2(\Omega)}$ pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$, d'où la solution de problème 1.5 vérifié l'inégalité de Poincaré avec $C_\Omega = \sqrt{\frac{1}{\lambda_1}}$.*

1.5.6 Fonction de Green

Nous allons essayer de trouver une formule de représentation générale pour les solutions du problème de Dirichlet (1.3).
On introduit une fonction de correction $h(x,y)$ pour chaque x fixe de manière à résoudre le problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta_y h &= \quad 0 \quad & dans \quad \Omega, \\ \quad h &= \Phi(x-y) \quad & sur \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.10}$$

telle que Φ est la solution fondamentale de l'équation : $-\Delta u = 0$ et

$$\Phi(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \log \mid x \mid & pour \quad n = 2 \\ \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)} \frac{1}{|x|^{n-2}} & pour \quad n \geq 3, \end{cases} \tag{1.11}$$

où $\alpha(n)$ est le volume de la boule unité sur $\mathbb{R}^n$.

Définition 1.5.5 *La fonction de Green est*

$$G(x,y) = \Phi(x-y) - h(x,y), (x, y \in \Omega, x \neq y)$$

où

$$\frac{\partial G}{\partial \nu}(x,y) = \nabla_y G(x,y).\nu(y),$$

est la dérivée normale extérieure de G par rapport à la variable y.

Théorème 1.5.5 *(Formule de représentation utilisant la fonction de Green) Si $u \in C^2(\bar{\Omega})$ résout le problème (1.3) pour certaines fonctions continues f et φ, alors*

$$u(x) = \int_\Omega G(x,y) f(y) dy - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G}{\partial \nu}(x,y) \varphi(y) ds_y, \forall x \in \Omega.$$

CHAPITRE 2

EXISTENCE ET UNICITÉ DE SOLUTIONS POSITIVES POUR UNE CLASSE DE SYSTÈMES ELLIPTIQUES SEMI-LINÉAIRES

Dans ce chapitre, nous travaillons sur l'article [17], qui présente des résultats sur l'existence et l'unicité de solutions positives pour des systèmes elliptiques semi-linéaires.
On considère le système elliptique semi linéaire avec condition de Dirichlet homogène

$$\begin{cases} -\Delta u &= g(x,v), \quad \mathit{dans}\ \Omega \\ -\Delta v &= f(x,u), \quad \mathit{dans}\ \Omega \\ u = v &= \quad 0, \qquad \mathit{sur}\ \partial\Omega \end{cases} \tag{2.1}$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^n (n \geq 1)$ un ensemble ouvert borné suffisamment régulière, connexe et convexe.
$f(x,u)$, $g(x,u)$ sont des fonctions données sur $\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^+$.
On considéré sur f et g les hypothèse suivantes qui ne sont pas nécessairement toutes vérifiées en même temps

(H1) $f(x,s), g(x,s)$ des fonctions continues et positives sur $\bar{\Omega} \times R^+$ et

$$\lim_{s\to 0^+} f(x,s) > 0, \quad \lim_{s\to 0^+} g(x,s) > 0, x \in \bar{\Omega} \tag{2.2}$$

et $\lim_{s\to+\infty} \frac{f(x,s)}{s}, \lim_{s\to+\infty} \frac{g(x,s)}{s}$ sont continues.

(H2) $(0,+\infty) \ni s \to \frac{f(x,s)}{s}, (0,+\infty) \ni s \to \frac{g(x,s)}{s}$ décroissent pour tout $x \in \Omega$;

(H3) $(0,+\infty) \ni s \to f(x,s), (0,+\infty) \ni s \to g(x,s)$ sont strictement croissantes pour tout $x \in \Omega$;

(H4) $(0,+\infty) \ni s \to f(x,s), (0,+\infty) \ni s \to g(x,s)$ décroissent pour tout $x \in \Omega$.

Remarque 5 *L'hypothèse* $(H4)$ *implique* $(H2)$.

On pose

$$a(x) = \lim_{s\to+\infty} \frac{f(x,s)}{s}, b(x) = \lim_{s\to+\infty} \frac{g(x,s)}{s},$$

par (H1) et (H2), nous savons que $a(x)$ et $b(x)$ sont des fonctions positives, continues et bornées satisfaisant

$$f(x,s) \geq a(x)s, g(x,s) \geq b(x)s, \tag{2.3}$$

Nous définissons

$$\| a(x) \| = \| a \|_\infty, \| b(x) \| = \| b \|_\infty .$$

Soit $M = \max\{\| a \|_\infty, \| b \|_\infty\}$, on a l'hypothèse

(H5) $M < \lambda_1$, où λ_1 est la première valeur propre de l'opérateur Laplacien sous des conditions au bord de Dirichlet homogène.

Lemme 2.1.1 *Si (H1) vérifie, alors les solutions du problème (2.1) doivent être strictement positives sur* Ω.

Preuve

Supposons (H1) et soit (u,v) la solution du problème (2.1), comme $f \geq 0, g \geq 0$, on a

$$\begin{cases} -\Delta u & \geq & 0, & dans & \Omega, \\ -\Delta v & \geq & 0, & dans & \Omega, \\ u = v & = & 0, & sur & \partial\Omega. \end{cases}$$

En appliquant le principe du maximum, on obtient $u > 0, v > 0$ sur Ω ou $u \equiv v \equiv 0$ sur Ω. Si $u \equiv v \equiv 0$ sur Ω, on a $f(x,0) = g(x,0) = 0$ et puisque f, g sont continues,
$\lim_{s\to 0} f(x,s) = \lim_{s\to 0} g(x,s) = 0, \forall x \in \bar{\Omega}$ contradiction avec (2.2) ; d'où le résultat c'est à dire $u > 0, v > 0$ sur Ω.

Considérons le système linéaire

$$\begin{cases} -\Delta u & = & b(x)v, & dans & \Omega, \\ -\Delta v & = & a(x)u, & dans & \Omega, \\ u = v & = & 0, & sur & \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.4}$$

les deux premières équations sont exprimées comme suit :

$$-\Delta \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b(x) \\ a(x) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Définissant

$$L = -\Delta, U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, A(x) = \begin{pmatrix} 0 & b(x) \\ a(x) & 0 \end{pmatrix},$$

alors le problème (2.4) sous la forme

$$\begin{cases} LU = A(x)U, & dans \quad \Omega, \\ U = 0, & sur \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.5}$$

Remarque 6 *Selon la remarque 2, l'opérateur L est inversible de $C(\bar{\Omega})$ dans $C(\bar{\Omega})$ et son inverse est compact d'après la proposition 1.5.1.*

Lemme 2.1.2 *Si $M < \lambda_1$ alors pour $t \in]0,1]$, la seule solution du problème*

$$\begin{cases} U = tL^{-1}(A(x)U), & dans \quad \Omega \\ U = 0, & sur \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{2.6}$$

est la solution triviale.

Preuve

Supposons $M < \lambda_1$. Le problème (2.6) équivalent à

$$\begin{cases} -\Delta u = tb(x)v, & dans \quad \Omega, \\ -\Delta v = ta(x)u, & dans \quad \Omega, \\ u = v = 0, & sur \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.7}$$

Multiplier la première équation de (2.7) par u et la deuxième équation par v, puis en l'intégrant sur Ω et en utilisant la formule de Green et comme $(u-v)^2 = u^2 + v^2 - 2uv \geq 0$, on obtient

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 dx = t\int_\Omega b(x)uvdx \leqslant M\int_\Omega |uv|dx \leqslant \frac{M}{2}\int_\Omega (u^2+v^2)dx,$$

de même

$$\int_\Omega |\nabla v|^2 dx = t\int_\Omega a(x)uvdx \leqslant M\int_\Omega |uv|dx \leqslant \frac{M}{2}\int_\Omega (u^2+v^2)dx.$$

Donc,

$$\int_\Omega (|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2)dx \leqslant M\int_\Omega (u^2+v^2)dx. \tag{2.8}$$

Par la remarque 4

$$\| u \|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant \frac{1}{\lambda_1} \| \nabla u \|^2_{L^2(\Omega)},$$

$$\| v \|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant \frac{1}{\lambda_1} \| \nabla v \|^2_{L^2(\Omega)},$$

de (2.8), on obtient

$$\int_\Omega (|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2)dx \leqslant \frac{M}{\lambda_1}\int_\Omega (|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2)dx.$$

Comme $M < \lambda_1$, $\nabla u = \nabla v = 0$ pour tout $x \in \Omega$; donc u, v sont des constantes, puisque $u = v = 0$ sur $\partial\Omega$, nous obtenons $u \equiv v \equiv 0$.

Nous écrivons le problème (2.1) comme suit :

$$\begin{cases} LU &= A(x)U + F(x,U), \quad dans \quad \Omega, \\ U &= \quad 0, \quad sur \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.9}$$

où

$$U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in X, \ F(x,U) = \begin{pmatrix} g(x,v) - b(x)v \\ f(x,u) - a(x)u \end{pmatrix}.$$

puisque L admet un inverse .On peut écrire

$$U = L^{-1}A(x)U + L^{-1}F(x,U),$$

On définit :

$$TU : L^{-1}A(x)U + L^{-1}F(x,U).$$

donc le système se ramène à un problème de point fixe, dans la partie positive $K = \{U | U \in X, U \geq 0 \ et \ U_{/\partial\Omega = 0}\}$ de l'espace de Banach

$$X = C(\bar{\Omega}) \times C(\bar{\Omega}),$$

muni de la norme

$$\| U \| = \max\{\| u \|_\infty, \| v \|_\infty\}.$$

2.2 Existence et unicité de la solution

Dans le théorème 2.2.1, on démontre l'existence de solutions et ajouterons le théorème 2.2.2 pour obtenir l'unicité.

Théorème 2.2.1 *Supposons* $(H1), (H2)$ *et* $(H5)$, *alors le problème (2.1) admet au moins une solution positive et bornée.*

Preuve

Supposons (H1) et (H2), (H5). Pour démontrer que le problème (2.1) admet au moins une solution positive et bornée il suffit de démontrer que T possède un point fixe positif non nul. Pour cela il suffit démontrer que T elle vérifie le théorème 1.4.5.

K est un ensemble fermé et convexe de X, en effet, la convexité est évidente ; K est fermé car si $(U_n)_{n\in N} \in K$ tel que ,

$$U_{n_{n\to+\infty}} \longrightarrow U$$

comme $U_n \in X = [C(\bar{\Omega})]^2$ converge uniformément vert U, on a $U \in X$ et comme

$$U_n \geq 0, U_{n/\partial\Omega} = 0, \text{ on a } U \geq 0, U_{/\partial\Omega} = 0,$$

d'où $U \in K$.

$T(K) \subset K$, car pour $U \in K$, par (H1) et (H2) et d'après (2.3) nous savons que $A(x)U$ et $F(x,U)$ sont positives en appliquant le principe du maximum on obtient $T(U) \geq 0$, comme $A(x)U \in X \subset [L^p(\Omega)]^2$ et $F(x,U) \in X \subset [L^p(\Omega)]^2$ d'après le théorème 1.3.1 on a $L^{-1}A(x)U + L^{-1}F(x,U) = T(U) \in [W_p^2(\Omega)]^2$ donc on peut restreindre sur X, alors $T(U) \in X$, par la définition de T on a T nulle sur le frontière.

T est compacte car si $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée dans K, par la continuité de f et g et puisque $A(x)$ est borné on a $A(x)U_n$ et $F(x,U_n)$ sont bornées et par la compacité de L^{-1} il existe une sous suite $(U_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tel que $L^{-1}A(x)U_{n_k} + L^{-1}F(x,U_{n_k}) = T(U_{n_k})$ est convergente, d'où T est compacte.

D'après le théorème 1.4.5 s'il existe une constante $R > 0$ tel que $U \neq tT(U)$ pour tout $U \in K$ avec $\| U \| = R$ et $t \in [0,1]$ alors T admet un point fixe $U \in K$ avec $\| U \| \leq R$.

On démontrer par l'absurde que l'hypothèse du théorème 1.4.5 est vérifiée, supposons qu'il existe $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \in K$ tel que $\| U_n \| = n$, et $\exists t_n \in [0,1]$ avec $U_n = t_nT(U_n)$; on a

$$\| U_n \|_{n\to+\infty} \longrightarrow +\infty, ,$$

et

$$U_n = t_nT(U_n) = t_nL^{-1}A(x)U_n + t_nL^{-1}F(x,U_n).$$

D'après [17] ceci implique que $\| u_n \|_{n\to+\infty} \longrightarrow +\infty$ et $\| v_n \|_{n\to+\infty} \longrightarrow +\infty$, ce qui est n'est pas le cas nécessairement. Pour cette raison nous proposons de procéder comme suit :

Soient $(t_{n_k}), (v_{n_k}(x)), (u_{n_k}(x))$ des suites extraites de même indice n_k, on définit les suites de fonctions par :

$$\left\{ \begin{array}{rcccl} (F_k(x), G_k(x)) & = & \frac{F(x,U_{n_k}(x))}{\|U_{n_k}\|} & = & \left(\frac{f(x,v_{n_k}(x)) - b(x)v_{n_k}(x)}{\|U_{n_k}\|}, \frac{g(x,u_{n_k}(x)) - a(x)u_{n_k}(x)}{\|U_{n_k}\|} \right). \\ w_k(x) & = & \frac{U_{n_k}(x)}{\|U_{n_k}\|} & = & \left(\frac{u_{n_k}(x)}{\|U_{n_k}\|}, \frac{v_{n_k}(x)}{\|U_{n_k}\|} \right). \end{array} \right. \tag{2.10}$$

Remarque on a

$$\frac{f(x,v_{n_k}(x)) - b(x)v_{n_k}(x)}{\| U_{n_k} \|} = \frac{v_{n_k}(x)}{\| U_{n_k} \|} \left(\frac{f(x,v_{n_k}(x))}{v_{n_k}(x)} - b(x) \right)$$

et

$$\frac{g(x,u_{n_k}(x)) - a(x)u_{n_k}(x)}{\| U_{n_k} \|} = \frac{u_{n_k}(x)}{\| U_{n_k} \|} \left(\frac{g(x,u_{n_k}(x))}{u_{n_k}(x)} - a(x) \right).$$

l'objectif est de définir pour tout $x \in \Omega$, les sous suites $(u_{n_k}(x))$ et $(v_{n_k}(x))$ tel que

$$F_k(x) \longrightarrow 0 \quad \text{lorsque} \quad k \longrightarrow +\infty$$
$$G_k(x) \longrightarrow 0 \quad \text{lorsque} \quad k \longrightarrow +\infty.$$

On a $t_n \in [0,1]$ alors on peut extraie une sous suite convergente $t_{n_k} \longrightarrow t \in [0,1]$.

Soit $x \in \Omega$, on envisage les deux cas suivants :

1. $(u_{n_k}(x))_k$ borné, alors :

   a) si $(v_{n_k}(x))_k$ est borné,

   comme $(u_{n_k}(x))_k$ est borné, on a

   $$\frac{u_{n_k}(x)}{\| U_{n_k} \|} \longrightarrow 0 \text{ lorsque } k \longrightarrow +\infty \text{ et } \frac{g(x, u_{n_k}(x))}{u_{n_k}(x)} - a(x) \text{ est borné,}$$

   c'est à dire $\lim_{k \longrightarrow +\infty} G_k(x) \longrightarrow 0$, de même $\lim_{k \longrightarrow +\infty} F_k(x) \longrightarrow 0$;

   b) si $(v_{n_k}(x))_k$ n'est pas borné, alors il existe une sous suite soit encore notée $(v_{n_k}(x))$ tel que $\lim_{k \longrightarrow +\infty} v_{n_k}(x) \longrightarrow +\infty$. Comme $(u_{n_k}(x))_k$ borné (on a toujours $t_{n_k} \longrightarrow t$), de même que dans le cas 1.a)

   $$\lim_{k \longrightarrow +\infty} G_k(x) \longrightarrow 0 \text{ car } (u_{n_k}(x))_k \text{ est borné}$$

   et

   $$\lim_{k \longrightarrow +\infty} F_k(x) \longrightarrow 0 \text{ car } \frac{f(x, v_{n_k}(x))}{v_{n_k}(x)} \longrightarrow b(x) \text{ lorsque } k \longrightarrow +\infty$$

   puisque

   $$\lim_{k \longrightarrow +\infty} v_{n_k}(x) \longrightarrow +\infty \text{ et } 0 \leq \frac{v_{n_k}(x)}{\| U_{n_k} \|} \leq 1.$$

2. $(u_{n_k}(x))_k$ n'est pas borné, alors il existe une sous suite soit encore notée $(u_{n_k}(x))_k$ tel que $\lim_{k \longrightarrow +\infty} u_{n_k}(x) \longrightarrow +\infty$,

   a) si $(v_{n_k}(x))_k$ est borné, de même que dans 1.a)

   $$\lim_{k \longrightarrow +\infty} F_k(x) \longrightarrow 0 \text{ car } (v_{n_k}(x))_k \text{ est borné}$$

   et

   $$\lim_{k \longrightarrow +\infty} G_k(x) \longrightarrow 0 \text{ car } \frac{g(x, u_{n_k}(x))}{u_{n_k}(x)} - a(x) \longrightarrow 0 \text{ lorsque } k \longrightarrow +\infty$$

   puisque $\lim_{k \longrightarrow +\infty} u_{n_k}(x) \longrightarrow +\infty$ et $0 \leq \frac{u_{n_k}(x)}{\|U_{n_k}\|} \leq 1$;

   b) si $(v_{n_k}(x))_k$ n'est pas borné, alors on peut extraire une sous suite encore notée $(v_{n_k}(x))_k$ tel que $\lim_{k \longrightarrow +\infty} v_{n_k}(x) \longrightarrow +\infty$, donc

   $$\frac{f(x, v_{n_k}(x))}{v_{n_k}(x)} - b(x) \longrightarrow 0 \text{ lorsque } k \longrightarrow +\infty \text{ puisque } \lim_{k \longrightarrow +\infty} v_{n_k}(x) \longrightarrow +\infty$$

et comme

$$0 \leq \frac{v_{n_k}(x)}{\| U_{n_k} \|} \leq 1 \text{ on a } \lim_{k \longrightarrow +\infty} F_k(x) \longrightarrow 0$$

de même on obtient $\lim_{k \longrightarrow +\infty} G_k(x) \longrightarrow 0$.

D'après ce qui précède, pour tout $x \in \Omega$ on a :

$$U_{n_k}(x) = t_{n_k} L^{-1} A(x) U_{n_k}(x) + t_{n_k} L^{-1} F(x, U_{n_k}(x))$$

implique que

$$w_k(x) = t_{n_k} L^{-1} A(x) w_k(x) + t_{n_k} L^{-1} \frac{F(x, U_{n_k}(x))}{\| U_{n_k} \|} \tag{2.11}$$

et

$$\frac{F(x, U_{n_k}(x))}{\| U_{n_k} \|} \longrightarrow 0 \text{ simplement}, \text{ lorsque } k \longrightarrow +\infty,$$

le théorème de convergence dominée assure que

$$\frac{F(x, U_{n_k}(x))}{\| U_{n_k} \|} \longrightarrow 0 \text{ dans } L^P(\Omega) \times L^P(\Omega), \text{ lorsque } k \longrightarrow +\infty$$

d'où $L^{-1}(\frac{F(x,U_{n_k}(x))}{\|U_{n_k}\|}) \longrightarrow 0$ lorsque $k \longrightarrow +\infty$ dans $W_p^2(\Omega) \times W_p^2(\Omega)$ d'après le théorème 1.3.1 et d'après le théorème 1.4.2 et le corollaire 1 $W_p^2(\Omega)$ s'injecte de façon compacte dans $C(\bar{\Omega})$ pour tout $p > n$ alors

$$L^{-1} \frac{F(x, U_{n_k}(x))}{\| U_{n_k} \|} \longrightarrow 0 \text{ dans } X, \text{ lorsque } k \longrightarrow +\infty.$$

Comme $\| w_k \| \leq 1$ et L^{-1} est compacte, $A(x)$ borné il existe une sous suite soit encore notée $(w_k)_k$ tel que $L^{-1} A(x) w_k(x)$ converge dans X, donc
$w_k(x) = t_{n_k} L^{-1} A(x) w_k(x) + t_{n_k} L^{-1} \frac{F(x,U_{n_k}(x))}{\|U_{n_k}\|}$ converge dans K vers une limite soit notée $w(x)$.
Par conséquent, $w(x) = t L^{-1} A(x) w(x)$ car

$$t_{n_k} L^{-1} \frac{F(x, U_{n_k}(x))}{\| U_{n_k} \|} \longrightarrow 0 \text{ et } t_{n_k} L^{-1} A(x) w_k(x) \longrightarrow t L^{-1} A(x) w(x), \text{ lorsque } k \longrightarrow +\infty.$$

Le lemme 2.1.2 assure que $w(x) \equiv 0$, ce qui contredit le fait que $\| w(x) \| = 1$.
D'après le théorème 1.4.5, T admet un point fixe $U \in K$ avec $\| U \| \leq R$, c'est à dire
$LU = A(x)U + F(x, U)$.
Alors U est une solution positive et bornée du problème (2.1).

Théorème 2.2.2 *Supposons* $(H1) - (H3)$, *alors le problème (2.1) admet au plus une solution positive et bornée.*

Preuve

La démonstration est effectuée en trois étapes :

$1^{\text{ièr}}$ étape :

Supposons (H1)-(H3) et soit $(u_1, v_1)^T$ et $(u_2, v_2)^T$ deux solutions bornées et positives du problème (2.1), soit $R = \max\{\| u_1 \|_\infty, \| v_1 \|_\infty, \| u_2 \|_\infty, \| v_2 \|_\infty\}$.

Par (H1) $f(x,u), g(x,v)$ sont continus et positifs sur $\bar{\Omega} \times [0, R]$.

Dénoter

$$m = \inf_{\Omega\times[0,R]} g(x,v), M = \sup_{\Omega\times[0,R]} g(x,v).$$

Nous avons $m > 0, M > 0$ car par (H3) on a $(0, +\infty) \ni s \to g(x,s)$ sont strictement croissantes pour tout $x \in \Omega$; donc

$$\begin{aligned} \text{soit} \quad v > s &\Rightarrow g(x,v) > g(x,s), \forall x \in \Omega, \\ &\Rightarrow g(x,v) \geq \lim_{s\to 0} g(x,s), \quad v \geq 0, \forall x \in \bar{\Omega}, \end{aligned}$$

et par (H1) on a

$$\lim_{s\to 0} g(x,s) > 0, \quad \forall x \in \bar{\Omega},$$

donc

$$m = \inf_{\Omega\times[0,R]} g(x,v) > 0 \Rightarrow M > 0.$$

Comme,

$$\begin{cases} -\Delta(u_1 - \frac{m}{M}u_2) = g(x,v_1) - \frac{m}{M}g(x,v_2), \forall x \in \Omega, \\ (u_1 - \frac{m}{M}u_2)_{/\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

On a $g(x,v_1) - \frac{m}{M}g(x,v_2) \geq 0$ car

$$\begin{aligned} \begin{cases} M \geq g(x,v_2) \\ g(x,v_1) \geq m \end{cases} \quad &\Rightarrow \quad Mg(x,v_1) \geq mg(x,v_2), \\ &\Rightarrow \quad g(x,v_1) - \frac{m}{M}g(x,v_2) \geq 0, \end{aligned}$$

par le principe du maximum nous avons

$$u_1 - \frac{m}{M}u_2 \geq 0, \text{ c'est à dire, } u_1 \geq \frac{m}{M}u_2, \text{ de même } u_2 \geq \frac{m}{M}u_1. \tag{2.12}$$

$2^{\text{ème}}$étape :

Posons $P = \{ \tau > 0 | \ u_1 \geq \tau u_2 \text{ et } u_2 \geq \tau u_1, x \in \Omega\}$, puisque $\tau = \frac{m}{M} \in P, P$ n'est pas vide.

Comme

$$u_1 \geq \tau u_2 \quad et \quad u_2 \geq \tau u_1,$$

on a

$$u_1 \geq \tau u_2 \geq \tau(\tau u_1) \geq \tau^2 u_1,$$

alors

$$\tau^2 \leq 1 \text{ donc } \tau \in]0,1].$$

D'où $\sup_{\tau \in P} \tau = \lambda$ existe, donc

$$u_1 \geq \lambda u_2, u_2 \geq \lambda u_1 \text{ pour } \lambda \in]0,1] \tag{2.13}$$

3$^{\text{ème}}$étape :

Nous affirmons que $\lambda = 1$.

Par l'absurde, supposons $0 < \lambda < 1$. Par (H2) et comme $0 < \lambda < 1$ on a

$$\frac{f(x,\lambda u_i)}{\lambda u_i} \geq \frac{f(x,u_i)}{u_i} \quad \forall i = 1,2.$$

Donc

$$f(x,\lambda u_i) \geq \lambda f(x,u_i) \quad \text{de même} \quad g(x,\lambda v_i) \geq \lambda g(x,v_i) \quad i = 1,2. \tag{2.14}$$

Soit $G(x,y) > 0$ la fonction de Green de l'opérateur Laplacien $-\Delta$ avec la condition au bord de Dirichlet homogène, donc

$$v_1(x) = \int_\Omega G(x,y) f(y,u_1(y))dy, \quad v_2(x) = \int_\Omega G(x,y) f(y,u_2(y))dy,$$

d'après (H3) et (2.13) on a

$$v_1(x) \geq \int_\Omega G(x,y) f(y,\lambda u_2(y))dy, \quad v_2(x) \geq \int_\Omega G(x,y) f(y,\lambda u_1(y))dy$$

et en tenant compte de (2.14), on obtient

$$v_1(x) \geq \lambda \int_\Omega G(x,y) f(y,u_2(y))dy = \lambda v_2(x), \quad v_2(x) \geq \lambda \int_\Omega G(x,y) f(y,u_1(y))dy = \lambda v_1(x).$$

Donc

$$v_1 \geq \lambda v_2,\ v_2 \geq \lambda v_1. \tag{2.15}$$

Puisque,

$$\begin{cases} -\Delta(u_1 - \lambda u_2) = g(x,v_1) - \lambda g(x,v_2), \forall x \in \Omega, \\ (u_1 - \lambda u_2)/\partial\Omega = 0 \end{cases} \tag{2.16}$$

et d'après (H3) et (2.15), on a

$$g(x,v_1) - \lambda g(x,v_2) \geq g(x,\lambda v_2) - \lambda g(x,v_2),$$

d'après (2.14) et dernière inégalité

$$g(x, v_1) - \lambda g(x, v_2) \geq \lambda g(x, v_2) - \lambda g(x, v_2) = 0, \quad \forall x \in \Omega.$$

En appliquant le principe du maximum sur (2.16), on obtient $u_1 > \lambda u_2$. De même $u_2 > \lambda u_1$ et $v_1 > \lambda v_2, v_2 > \lambda v_1$ (car $0 < \lambda < 1$).

En utilisant ces inégalités et l'hypothèse (H3) et d'après (2.14) on a

$$\begin{aligned} g(x, v_1) - \lambda g(x, v_2) &> g(x, \lambda v_2) - \lambda g(x, v_2) \\ &\geq \lambda g(x, v_2) - \lambda g(x, v_2) = 0, \quad \forall x \in \Omega, \end{aligned} \tag{2.17}$$

pour $x \in \partial\Omega$, on a $v_1 = v_2 = 0$ donc

$$g(x, v_1) - \lambda g(x, v_2) = (1 - \lambda) g(x, 0), \quad \forall x \in \partial\Omega,$$

en tenant compte de (H1), on obtient

$$g(x, v_1) - \lambda g(x, v_2) > 0, \quad \forall x \in \partial\Omega, \tag{2.18}$$

de (2.17) et (2.18) on a

$$g(x, v_1) - \lambda g(x, v_2) > 0, \quad \forall x \in \bar{\Omega},$$

donc, par (H1) et puisque $0 \leq v_1, v_2 \leq R$ on obtient

$$\inf_{\bar{\Omega}} [g(x, v_1) - \lambda g(x, v_2)] = \bar{m} > 0.$$

Comme $\bar{m} > 0, \exists \xi > 0$ tq $\bar{m} > \xi M > \xi g(x, v)$ et comme $\lambda < 1, \exists \xi' > 0$ tq $(\lambda + \xi') < 1$.
Prendre $\xi_1 = \min\{\xi, \xi'\}$ pour que

$$\bar{m} > \xi_1 g(x, v_2), \quad (\lambda + \xi_1) < 1. \tag{2.19}$$

On a

$$\begin{cases} -\Delta[u_1 - (\lambda + \xi_1) u_2] = g(x, v_1) - (\lambda + \xi_1) g(x, v_2), \forall x \in \Omega, \\ [u_1 - (\lambda + \xi_1) u_2]_{/\partial\Omega} = 0 \end{cases} \tag{2.20}$$

et

$$\begin{aligned} g(x, v_1) - (\lambda + \xi_1) g(x, v_2) &= (g(x, v_1) - \lambda g(x, v_2)) - \xi_1 g(x, v_2) \\ &\geq \bar{m} - \xi_1 g(x, v_2) > 0, \end{aligned}$$

alors en appliquant le principe du maximum sur (2.20) pour obtenir

$$u_1 > (\lambda + \xi_1) u_2.$$

De même, il existe $\xi_2 > 0$ tel que $(\lambda + \xi_2) < 1$ et $\bar{m} > \xi_2 g(x, v_1)$ et qui vérifie $u_2 > (\lambda + \xi_2)u_1$.
Si on prend $\varepsilon = \min\{\xi_1, \xi_2\}$ alors $(\lambda+\varepsilon) < 1$ et $(\lambda+\varepsilon)$ vérifie $u_1 > (\lambda+\varepsilon)u_2$ et $u_2 > (\lambda+\varepsilon)u_1$.
D'où, $\lambda + \varepsilon \in P$ une contradiction par rapport à la définition de λ.
Par conséquent $\lambda = 1$, donc $u_1 = u_2, v_1 = v_2$ par (2.13) et (2.15) respectivement ; ceci termine la preuve.

2.3 Condition nécessaire d'existence de solutions

Théorème 2.3.1 *Supposons* $(H1), (H4)$ *et que le problème (2.1) admet au moins une solution positive et bornée, alors* $M < \lambda_1$.

Corollaire 3 *Supposons* $(H1)$ *et* $(H4)$, *alors* $(H5)$ *est vérifie si et seulement si le problème (2.1) admet au moins une solution positive et bornée.*

Le théorème 2.2.1, assurer l'implication directe et le théorème 2.3.1 réalise l'implication réciproque.

Preuve du théorème 2.3.1

Supposons (H1), (H4), soit $(u, v)^T$ une solution bornée et positive du problème (2.1) et $\omega_1 > 0$ le vecteur propre correspondant à λ_1, d'après lemme 2.1.1 $u > 0$, $v > 0$.
Multipliant les deux côtés de la première équation de (2.1) par ω_1 puis en l'intégrant sur Ω et en utilisant deux fois la formule de Green, on obtient

$$-\int_\Omega u\Delta\omega_1 dx = \int_\Omega g(x, v)\omega_1 dx,$$

alors,

$$\lambda_1 \int_\Omega u\omega_1 dx = \int_\Omega g(x, v)\omega_1 dx.$$

Donc, on a

$$\begin{aligned}
\int_\Omega g(x, v)\omega_1 dx = \lambda_1 \int_\Omega u\omega_1 dx &< \sup_{x\in\Omega} u\lambda_1 \int_\Omega \omega_1 dx \\
&< \| u \|_\infty \lambda_1 \int_\Omega \omega_1 dx \\
&< \lambda_1(\| u \|_\infty + \| v \|_\infty) \int_\Omega \omega_1 dx,
\end{aligned}$$

1^{ier} cas : Si a et b ne sont pas nuls
on a $v <\| u \|_\infty + \| v \|_\infty$ et $\frac{\|b\|_\infty}{b} \geq 1$ donc $v < \frac{(\|u\|_\infty+\|v\|_\infty)\|b\|_\infty}{b}$, d'après (H4) on a $s \to g(x, s)$

décroissent pour $x \in \Omega$, alors

$$\lambda_1(\| u \|_\infty + \| v \|_\infty) \int_\Omega \omega_1 dx > \int_\Omega g(x, \frac{(\| u \|_\infty + \| v \|_\infty) \| b \|_\infty}{b})\omega_1 dx,$$

d'après (2.3) on a $g(x,s) \geq b(x)s$, ce qui implique

$$\lambda_1(\| u \|_\infty + \| v \|_\infty) \int_\Omega \omega_1 dx > \int_\Omega b\frac{(\| u \|_\infty + \| v \|_\infty) \| b \|_\infty}{b}\omega_1 dx,$$

donc

$$\lambda_1(\| u \|_\infty + \| v \|_\infty) \int_\Omega \omega_1 dx >\| b \|_\infty (\| u \|_\infty + \| v \|_\infty) \int_\Omega \omega_1 dx.$$

D'où $\lambda_1 >\| b \|_\infty$, de même nous pouvons que $\lambda_1 >\| a \|_\infty$, donc $M < \lambda_1$.

$2^{\text{ème}}$cas : Si $a \equiv b \equiv 0$ d'où $M = 0 < \lambda_1$.

$3^{\text{ème}}$cas : Soit a nulle et b non nulle, alors $M =\| b \|_\infty < \lambda_1$ (d'après le $1^{\text{ièr}}$cas), même chose pour b nulle et a non nulle on obtient $M =\| a \|_\infty < \lambda_1$.

CHAPITRE 3

MÉTHODE DES SOUS-SOLUTIONS ET SUR-SOLUTIONS POUR LES SYSTÈMES ELLIPTIQUES

Nous présentons dans ce chapitre l'étude de [15] sur les systèmes elliptiques de la forme

$$\begin{cases} L_k u_k = f_k(x, u_k, [u]_k), & dans\ \Omega, \\ \frac{\partial u_k}{\partial \nu} + b_k(x) u_k = 0, & sur\ \Omega, \end{cases} \quad k = 1, 2, ..., m, \tag{3.1}$$

où Ω un ensemble borné suffisamment régulière, connexe et convexe dans $\mathbb{R}^n (n \geq 2)$, ν est le vecteur normale unitaire orienté vers l'extérieur, f_k sont des fonctions données sur $\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^m$.
$u = (u_1, ..., u_m), [u]_k = (u_1, ..., u_{k-1}, u_{k+1}, ..., u_m)$ et L_k $(k = 1, 2, ..., m)$ est un opérateur uniformément elliptique de la forme

$$L_k(x)u = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^k(x)\partial_{ij}u + \sum_{i=1}^{n} a_i^k(x)\partial_i u + a^k(x)u,$$

avec $(a_{ij}^k)_{n\times n}$ matrice symétrique.
Nous supposons que $a_{ij}^k \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega}), a_i^k \in C^{1+\alpha}(\bar{\Omega})$ et $a^k \in C^{\alpha}(\bar{\Omega})$ pour $\alpha \in]0, 1[$.
On considéré les hypothèse suivantes sur les fonctions f_k et a^k, b_k :

(H1) pour $k = 1, 2, ..., m, f_k : \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ est α-Hölder continu par rapport à la première variable et localement Lipschitzienne par rapport à la deuxième variable.

(H2) Pour $k = 1, 2, ..., m, a^k > 0$ sur Ω et $b_k \in C^{1+\alpha}(\partial\Omega)$ satisfaisant $b_k > 0$ sur $\partial\Omega$.

Une solution $u = (u_1, ..., u_m)$ de (3.1) est une solution classique, si pour chaque $k = 1, 2, ..., m$, $u_k \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ et

$$L_k u_k(x) = f_k(x, u_k(x), [u]_k(x)), \forall x \in \Omega \text{ et } \frac{\partial u_k(x)}{\partial \nu} + b_k(x)u_k(x) = 0, \forall x \in \partial\Omega.$$

Pour $v = (v_1, ..., v_m)$ et $w = (w_1, ..., w_m)$ donnés, on dit $v \le w$ si $v_k \le w_k$ pour chaque $k = 1, 2, ..., m$.

Nous définissons

$$[v, w] = \{u \in [C(\bar{\Omega})]^m : v_k(x) \le u_k(x) \le w_k(x) \ \forall x \in \bar{\Omega}, k = 1, 2, ..., m\}.$$

Définition 3.1.1 *Soit $\underline{u}, \overline{u} \in [C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})]^m$. Alors $(\underline{u}, \overline{u})$ est dit couple ordonné de sous et sur-solutions de (3.1), si $\underline{u} \le \overline{u}$ et pour tout $u \in [\underline{u}, \overline{u}]$ et tout $k = 1, 2, ..., m$,*

$$\begin{array}{rcll} L_k\underline{u}_k & \le & f_k(x, \underline{u}_k, [u]_k), & dans\ \Omega, \\ \frac{\partial \underline{u}_k}{\partial \nu} + b_k(x)\underline{u}_k & \le & 0, & sur\ \partial\Omega, \\ L_k\overline{u}_k & \ge & f_k(x, \overline{u}_k, [u]_k), & dans\ \Omega, \\ \frac{\partial \overline{u}_k}{\partial \nu} + b_k(x)\overline{u}_k & \ge & 0, & sur\ \partial\Omega, \end{array}$$

respectivement.

Remarque 7 *Pour tout $v = (v_1, ..., v_m) \in [C(\bar{\Omega})]^m \subset L^P(\Omega)$, il est bien connu d'après le théorème 1.3.2 que le système*

$$\left\{ \begin{array}{rcll} L_k u_k & = & v_k & dans\ \Omega, \\ \frac{\partial u_k}{\partial \nu} + b_k(x)u_k & = & 0, & sur\ \partial\Omega, \end{array} \right. \quad k = 1, 2, ..., m, \tag{3.2}$$

a une solution unique $u = (u_1, ..., u_m) =: S(v) \in [W_p^2(\Omega)]^m$ et vérifie les estimations suivant

$$\| u_k \|_{W_p^2(\Omega)} \le C' \| v_k \|_{L^p(\Omega)}, \ k = 1, 2, ..., m. \tag{3.3}$$

Puisque $[C(\bar{\Omega})]^m$ s'injecte continument dans $[L^p(\Omega)]^m$ pour tout $1 < p < \infty$, il existe une constante C_2 tel que

$$\| u_k \|_{W_p^2(\Omega)} \ \le \ C_2 \| v_k \|_{C(\bar{\Omega})}, \ \ k = 1, 2, ..., m. \tag{3.4}$$

Cette estimations implique que $S : [C(\bar{\Omega})]^m \longrightarrow [W_p^2(\Omega)]^m$ est un opérateur linéaire borné. Puisque $[W_p^2(\Omega)]^m$ s'injecte de façon compacte dans $[C^{1+\alpha}(\bar{\Omega})]^m$ d'après le théorème 1.4.2 pour tout $\alpha < \beta, n < p$ où $\beta = 1 - n/p$ et d'après le corollaire 1 on a $[C^{1+\alpha}(\bar{\Omega})]^m$ s'injecte de façon compacte dans $[C(\bar{\Omega})]^m$ donc $[W_p^2(\Omega)]^m$ s'injecte de façon compacte dans $[C(\bar{\Omega})]^m$, d'où $S : [C(\bar{\Omega})]^m \longrightarrow [C(\bar{\Omega})]^m$ est un opérateur linéaire borné compact.

Nous définissons l'application T par

$$T(u) = S(F(u)), \tag{3.5}$$

où $F(u) = (f_1, ..., f_m)$.

Lemme 3.1.1 *Supposons* $(H1)$ *et* $(H2)$ *vérifiées. Alors le système (3.1) est équivalent au problème du point fixe* $u = T(u)$ *dans* $[C(\bar{\Omega})]^m$*. L'application* $T : [\underline{u}, \overline{u}] \subset [C(\bar{\Omega})]^m \longrightarrow [C(\bar{\Omega})]^m$ *est continue et compacte.*

Preuve

Supposons $(H1)$ et $(H2)$ sont vérifiées.

Soit u solution classique de (3.1) alors $u \in [C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})]^m$ ce qui implique que

$$L_k u_k = f_k \in C(\bar{\Omega}) \text{ et } u \subset [C(\bar{\Omega})]^m,$$

donc $u, F(u) \in [C(\bar{\Omega})]^m$ et on a $u = S(F(u))$, c'est-à-dire $u = T(u)$ donc toute solution du système (3.1) est point fixe de T.

Inversement, supposons que $u \in [C(\bar{\Omega})]^m$ est un point fixe de T.

Puisque

$$F(u) \in [C(\bar{\Omega})]^m \subset [L^P(\Omega)]^m,$$

par (3.3), S est une application de $[L^P(\Omega)]^m$ dans $[W_p^2(\Omega)]^m$, il s'ensuit que $u \in [W_p^2(\Omega)]^m$.

Il est bien connu que $[W_p^2(\Omega)]^m$ s'injecte de manière compacte dans $[C^{1+\alpha}(\bar{\Omega})]^m$, d'après théorème 1.4.2 pour tout $\alpha < \beta, n < p$ où $\beta = 1 - n/p$; d'où $u \in [C^1(\bar{\Omega})]^m \cap [W_p^2(\Omega)]^m$. Cela implique que $x \to F(u)(x) \in [C^\alpha(\bar{\Omega})]^m$, en effet, soit $x, y \in \Omega$ telle que $x \neq y$ on a

$$\begin{aligned}
\frac{| f_k(x, u(x)) - f_k(y, u(y)) |}{| x - y |^\alpha} &= \frac{| f_k(x, u(x)) - f_k(x, u(y)) + f_k(x, u(y)) - f_k(y, u(y)) |}{| x - y |^\alpha} \\
&\leq \frac{| f_k(x, u(x)) - f_k(x, u(y)) |}{| x - y |^\alpha} + \frac{| f_k(x, u(y)) - f_k(y, u(y)) |}{| x - y |^\alpha}
\end{aligned}$$

puisque f_k est α-Hölder continu par rapport à la première variable, on a

$$\sup_{x \neq y} \frac{| f_k(x, u(y)) - f_k(y, u(y)) |}{| x - y |^\alpha} < \infty$$

et puisque f_k localement Lipschitzienne par rapport à la deuxième variable, il existe $\sigma_k > 0$ telle que

$$| f_k(x, u(x)) - f_k(x, u(y)) | \leq \sigma_k \mid u(x) - u(y) \mid$$

donc

$$\frac{| f_k(x, u(x)) - f_k(y, u(y)) |}{| x - y |^\alpha} \leq \sigma_k \frac{| u(x) - u(y) |}{| x - y |^\alpha} + \sup_{x \neq y} \frac{| f_k(x, u(y)) - f_k(y, u(y)) |}{| x - y |^\alpha}$$

comme $u \in C^1(\bar{\Omega})$ et $C^\alpha(\bar{\Omega}) \subset C^1(\bar{\Omega})$,

$$\sup_{x \neq y} \frac{| u(x) - u(y) |}{| x - y |^\alpha} < \infty$$

alors

$$\sup_{x\neq y} \frac{\mid f_k(x,u(x)) - f_k(y,u(y)) \mid}{\mid x-y \mid^{\alpha}} \leq \infty.$$

Finalement, $F(u) \in [C^{\alpha}(\bar{\Omega})]^m$ implique d'après le théorème 1.3.3 que

$$u \in [C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})]^m.$$

Par conséquent, $u \in [C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})]^m$ et u est une solution classique du problème (3.1).

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [\underline{u}, \overline{u}]$, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée dans $[C(\bar{\Omega})]^m$ par la continuité de F on a $F(u_n)$ bornée et par la compacité de S il existe une sous suite $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que la suite $S(F(u_{n_k}))$ convergente donc T est compact et puisque $F(u) \in [C(\bar{\Omega})]^m$ et $S : [C(\bar{\Omega})]^m \longrightarrow [C(\bar{\Omega})]^m$ est un opérateur linéaire borné alors T est continu, d'où T est compact et continu de $[\underline{u}, \overline{u}]$ dans $[C(\bar{\Omega})]^m$.

3.2 Existence de solutions

Dans le théorème suivant, on démontre l'existence de solutions par la méthode de sous et sur-solutions.

Théorème 3.2.1 *Supposons que $(H1)$ et $(H2)$ sont satisfaits. Soit $(\underline{u}, \overline{u})$ un couple ordonné de sous et sur-solutions de (3.1). Alors (3.1) admet au moins une solution u dans $[\underline{u}, \overline{u}]$.*

Preuve

Supposons $(H1)$ et $(H2)$ et que $\underline{u}, \overline{u}$ soient les sous et sur-solutions de (3.1) ; donc $\underline{u} \leq \overline{u}$ et pour tout $u \in [\underline{u}, \overline{u}]$ et tout $k = 1, 2, ..., m$,

$$\begin{array}{rcll} L_k\underline{u}_k & \leq & f_k(x, \underline{u}_k, [u]_k), & dans\ \Omega, \\ \frac{\partial \underline{u}_k}{\partial \nu} + b_k(x)\underline{u}_k & \leq & 0, & sur\ \partial\Omega, \\ L_k\overline{u}_k & \geq & f_k(x, \overline{u}_k, [u]_k), & dans\ \Omega, \\ \frac{\partial \overline{u}_k}{\partial \nu} + b_k(x)\overline{u}_k & \geq & 0, & sur\ \partial\Omega, \end{array} \tag{3.6}$$

l'hypothèse de régularité (H1) pour f_k localement Lipschitz par rapport à la deuxième variable implique l'existence de constante positive $\sigma_k (k = 1, 2, ..., m)$ telle que

$$\mid f_k(x, s_i, [r]_i) - f_k(x, l_i, [r]_i) \mid \leq \sigma_k \mid (s_i - l_i) \mid, \forall s, r, l \in [C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})]^m, \forall x \in \bar{\Omega}, \tag{3.7}$$

pour tout $i = 1, 2, ..., m$.

Pour $i = k$ et $s = \overline{u}, r = l = v$ on a

$$f_k(x, \overline{u}_k, [v]_k) - f_k(x, v_k, [v]_k) \geq -\sigma_k(\overline{u}_k - v_k), \forall \underline{u} \leq v \leq \overline{u}, \forall x \in \bar{\Omega}, \tag{3.8}$$

et pour $s = r = v, l = \underline{u}$ on a

$$f_k(x, v_k, [v]_k) - f_k(x, \underline{u}_k, [v]_k) \geq -\sigma_k(v_k - \underline{u}_k), \forall \underline{u} \leq v \leq \overline{u}, \forall x \in \bar{\Omega}. \tag{3.9}$$

On ajoute M_k aux deux membres de chaque une des équations différentielles du système (3.1) tel que

$$M_k := \sigma_k + \max\{\| a^k \|_{C(\bar{\Omega})}, \| b_k \|_{C(\partial\Omega)}\}.$$

Alors le système (3.1) est équivalent au système

$$\begin{cases} L_k u_k + M_k u_k &= f_k(x, u_k, [u]_k) + M_k u_k, \quad dans\ \Omega, \\ \frac{\partial u_k}{\partial \nu} + b_k(x) u_k &= 0, \quad sur\ \partial\Omega, \end{cases} \quad k = 1, 2, ..., m. \tag{3.10}$$

De plus, $\underline{u}$ et $\overline{u}$ sont également des sous et sur-solutions pour le système (3.10). Par lemme 3.1.1, le système (3.10) est équivalent à l'équation du point fixe $u = T(u)$ dans $[C(\bar{\Omega})]^m$ et $T : [\underline{u}, \overline{u}] \longrightarrow [C(\bar{\Omega})]^m$ est une application continu et compact.

Montrons maintenant que

$$T : [\underline{u}, \overline{u}] \longrightarrow [\underline{u}, \overline{u}].$$

Soit $v \in [\underline{u}, \overline{u}]$ et $u = T(v)$. Alors u et v satisfont

$$\begin{cases} L_k u_k + M_k u_k &= f_k(x, v_k, [v]_k) + M_k v_k, \quad dans\ \Omega, \\ \frac{\partial u_k}{\partial \nu} + b_k(x) u_k &= 0, \quad sur\ \partial\Omega, \end{cases} \quad k = 1, 2, ..., m. \tag{3.11}$$

D'autre part, puisque $v \in [\underline{u}, \overline{u}]$, $\underline{u} \leq v \leq \overline{u}$, donc $\underline{u}_k \leq [v]_k \leq \overline{u}_k$ alors avec (3.6) on a $\overline{u}$ vérifie

$$\begin{cases} L_k \overline{u}_k + M_k \overline{u}_k &\geq f_k(x, \overline{u}_k, [v]_k) + M_k \overline{u}_k, \quad dans\ \Omega, \\ \frac{\partial \overline{u}_k}{\partial \nu} + b_k(x) \overline{u}_k &\geq 0, \quad sur\ \partial\Omega, \end{cases} \quad k = 1, 2, ..., m. \tag{3.12}$$

Soit $w_k = \overline{u}_k - u_k$, par (3.11) et (3.12) on a

$$\begin{cases} L_k w_k + M_k w_k &\geq f_k(x, \overline{u}_k, [v]_k) - f_k(x, v_k, [v]_k) + M_k(\overline{u}_k - v_k), \quad dans\ \Omega, \\ \frac{\partial w_k}{\partial \nu} + b_k(x) w_k &\geq 0, \quad sur\ \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.13}$$

pour $k = 1, 2, ..., m$.

De plus, on conclut de (3.8) et (3.13) que

$$\begin{cases} L_k w_k + M_k w_k &\geq (M_k - \sigma_k)(\overline{u}_k - v_k) \geq 0, \quad dans\ \Omega, \\ \frac{\partial w_k}{\partial \nu} + b_k(x) w_k &\geq 0, \quad sur\ \partial\Omega, \end{cases} \quad k = 1, 2, ..., m. \tag{3.14}$$

Par le principe du maximum, il s'ensuite que $w_k \geq 0$; d'où $u_k \leq \overline{u}_k$. De mêmes avec la troisième et la quatrième inégalité de (3.6) et par (3.9), pour $w_k = u_k - \underline{u}_k$ nous obtenons $\underline{u}_k \leq u_k$. Par conséquent, T application de $[\underline{u}, \overline{u}]$ en lui-même.

Il est clair que $[\underline{u}, \overline{u}]$ est un sous-ensemble convexe fermé borné de $[C(\bar{\Omega})]^m$ et comme T est continue et compacte, l'existence d'un point fixe découle du théorème du point fixe de Schauder, d'où le problème (3.1) admet au moins une solution u dans $[\underline{u}, \overline{u}]$.

3.3 Application

Dans cette section, on applique la méthode de sous et sur-solutions pour étudier l'existence de solutions du système elliptique suivant

$$\begin{cases} -\Delta u &= a(x)v - c(x)u - e(x)u(u+v), & dans\ \Omega, \\ -\Delta v &= b(x)u - d(x)v - f(x)v(u+v), & dans\ \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} + \alpha(x)u &= 0, & sur\ \partial\Omega, \\ \frac{\partial v}{\partial \nu} + \beta(x)v &= 0, & sur\ \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.15}$$

Nous supposons que α et β satisfont (H2), les coefficients a, b, c, d, e et f sont des fonctions strictement positives sur $C^{\alpha}(\bar{\Omega})$.
On considère le système suivant

$$\begin{cases} -\Delta u &= a(x)v - c(x)u, & dans\ \Omega, \\ -\Delta v &= b(x)u - d(x)v, & dans\ \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} + \alpha(x)u &= 0, & sur\ \partial\Omega, \\ \frac{\partial v}{\partial \nu} + \beta(x)v &= 0, & sur\ \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.16}$$

Lemme 3.3.1 *Soit $u_0, v_0 \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ tel que $u_0 > 0, v_0 > 0$ sur $\bar{\Omega}$ et*

$$\begin{cases} -\Delta u_0 &\geq a(x)v_0 - c(x)u_0, & dans\ \Omega, \\ -\Delta v_0 &\geq b(x)u_0 - d(x)v_0, & dans\ \Omega, \\ \frac{\partial u_0}{\partial \nu} + \alpha(x)u_0 &\geq 0, & sur\ \partial\Omega, \\ \frac{\partial v_0}{\partial \nu} + \beta(x)v_0 &\geq 0, & sur\ \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.17}$$

où l'égalité n'est pas vérifiée dans certaines des équations de (3.17). Alors (3.16) satisfait le principe du maximum fort.

Le problème (3.16) satisfait le principe du maximum fort si $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ tels que

$$\begin{cases} -\Delta u &\geq a(x)v - c(x)u, & dans\ \Omega, \\ -\Delta v &\geq b(x)u - d(x)v, & dans\ \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} + \alpha(x)u &\geq 0, & sur\ \partial\Omega, \\ \frac{\partial v}{\partial \nu} + \beta(x)v &\geq 0, & sur\ \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.18}$$

alors soit (i) $u, v \equiv 0$ sur Ω ou (ii) $u > 0, v > 0$ sur $\bar{\Omega}$.

Preuve

Supposons $u_0, v_0 \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ tel que $u_0 > 0, v_0 > 0$ sur $\bar{\Omega}$ et satisfaisant (3.17) où l'égalité n'est pas vérifiée. Par l'absurde, supposons qu' il existe u_1, v_1 non tous les deux identiquement nulles satisfaisant (3.18) mais qui ne satisfaisaient pas (ii). Pour $t \in [0,1]$, on définit

$$\begin{aligned} u_t &= (1-t)u_0 + tu_1, \\ v_t &= (1-t)v_0 + tv_1. \end{aligned}$$

Puisque $u_0, v_0 > 0$ sur $\bar{\Omega}$, $\exists t_0 \in]0,1]$ tel que

$$\begin{aligned} u_t, v_t > 0 \quad & \text{sur } \bar{\Omega}, \forall t \in [0, t_0[\\ u_{t_0} \; ou \; v_{t_0} \quad & \text{à un zéro dans } \bar{\Omega}. \end{aligned}$$

Nous supposons qu'il existe $x_1 \in \bar{\Omega}$ telle que $u_{t_0}(x_1) = 0$. On multiplie la première équation de (3.17) et (3.18) par $(1-t_0)$ et t_0 respectivement, puis on somme et on obtient

$$-\Delta u_{t_0} \geq a(x)v_{t_0} - c(x)u_{t_0}, \quad \forall x \in \Omega, \tag{3.19}$$

donc,

$$-\Delta u_{t_0} + c(x)u_{t_0} \geq a(x)v_{t_0} \geq 0, \quad \forall x \in \Omega. \tag{3.20}$$

De même avec la troisième équation de (3.17) et (3.18), en déduire que

$$\tfrac{\partial u_{t_0}}{\partial \nu} + \alpha(x)u_{t_0} \geq 0, \quad \forall x \in \partial\Omega, \tag{3.21}$$

en utilisant le principe du maximum on obtient $u_{t_0} \equiv 0$ ou $u_{t_0} > 0$ sur Ω.
Puisque $\exists x_1 \in \bar{\Omega}$ tel que $u_{t_0}(x_1) = 0$, on a

$$u_{t_0} \equiv 0 \text{ si } x_1 \in \Omega$$

si $x_1 \in \partial\Omega$, on a $u_{t_0} \equiv 0$ ou $u_{t_0} > 0$ sur Ω, supposons que $u_{t_0} > 0$ sur Ω on a x_1 est un point minimum de u_{t_0} alors par le théorème 1.2.1 de principe du maximum on obtient $\frac{\partial u_{t_0}}{\partial \nu}(x_1) < 0$ contradiction par (3.21), donc dans le deux cas

$$u_{t_0} \equiv 0 \tag{3.22}$$

par (3.20) nous obtenons

$$v_{t_0} \equiv 0. \tag{3.23}$$

Puisque u_1 et v_1 ne sont pas tout les deux identiquement à nulles, $t_0 < 1$.
Ainsi, par (3.22) et (3.23) et comme

$$\begin{aligned} u_{t_0} &= (1-t_0)u_0 + t_0 u_1 \\ v_{t_0} &= (1-t_0)v_0 + t_0 v_1, \end{aligned}$$

on a $u_1 = \theta u_0$, $v_1 = \theta v_0$ telle que $\theta = (t_0 - 1)/t_0 < 0$; mais puisque u_0, v_0 satisfont (3.17),

$$\begin{cases} -\Delta u_1 = \theta(-\Delta u_0) & \leq \; a(x)v_1 - c(x)u_1, \;\; \textit{dans } \Omega, \\ -\Delta v_1 = \theta(-\Delta v_0) & \leq \; b(x)u_1 - d(x)v_1, \;\; \textit{dans } \Omega, \\ \frac{\partial u_1}{\partial \nu} + \alpha(x)u_1 = \theta(\frac{\partial u_0}{\partial \nu} + \alpha(x)u_0) & \leq \; 0, \;\; \textit{sur } \partial\Omega, \\ \frac{\partial v_1}{\partial \nu} + \beta(x)v_1 = \theta(\frac{\partial v_0}{\partial \nu} + \beta(x)v_0) & \leq \; 0, \;\; \textit{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Ceci est impossible puisque u_1, v_1 satisfont (3.18), d'où (3.16) satisfait le principe du maximum fort.

Corollaire 4 *Supposons que $a(x) - c(x) < 0$ et $b(x) - d(x) < 0$ pour tout $x \in \Omega$, alors le système (3.16) vérifie le principe du maximum fort.*

Preuve

Soit M est n'importe quel nombre positif, en choisissant $u_0 \equiv v_0 \equiv M$ alors

$$\begin{cases} -\Delta u_0 = 0 & \geq \; a(x)v_0 - c(x)u_0 = (a(x) - c(x))M, \;\; \textit{dans } \Omega, \\ -\Delta v_0 = 0 & \geq \; b(x)u_0 - d(x)v_0 = (b(x) - d(x))M, \;\; \textit{dans } \Omega, \\ \frac{\partial u_0}{\partial \nu} + \alpha(x)u_0 = \alpha(x)M & \geq \; 0, \;\; \textit{sur } \partial\Omega, \\ \frac{\partial v_0}{\partial \nu} + \beta(x)v_0 = \beta(x)M & \geq \; 0, \;\; \textit{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Donc d'après lemme (3.3.1) le système (3.16) vérifie le principe du maximum fort ceci termine la preuve.

Soit

$$X = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega}) \times C^{2+\alpha}(\bar{\Omega}) : \frac{\partial u}{\partial \nu} + \alpha(x)u = 0, \frac{\partial v}{\partial \nu} + \beta(x)v = 0 \right\},$$

$$Y = C^{\alpha}(\bar{\Omega}) \times C^{\alpha}(\bar{\Omega}).$$

Le système (3.16) peut s'écrire sous la forme

$$\begin{cases} LU - A(x)U = 0, & \textit{dans } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} + \alpha(x)u = 0, & \textit{sur } \partial\Omega, \\ \frac{\partial v}{\partial n} + \beta(x)v = 0, & \textit{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.24}$$

où

$$U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \; A(x) = \begin{pmatrix} -c(x) & a(x) \\ b(x) & -d(x) \end{pmatrix}, \; L = -\Delta. \tag{3.25}$$

Lemme 3.3.2 *[5] L'opérateur*

(i) $L - A(x) + M : X \longrightarrow Y$ *est inversible.*

(ii) $(L - A(x) + M)^{-1} : Y \longrightarrow Y$ *est strictement positif et compact.*

où M *est une constante strictement positif suffisamment grande.*

Preuve

Soit $F = (f_1, f_2) \in Y$, telle que

$$\begin{cases} Lu - a(x)v + c(x)u + Mu &= f_1 \quad dans\ \Omega, \\ Lv - b(x)u + d(x)v + Mv &= f_2 \quad dans\ \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} + \alpha(x)u &= 0, \quad sur\ \partial\Omega, \\ \frac{\partial v}{\partial \nu} + \beta(x)v &= 0, \quad sur\ \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.26}$$

on multiplie la première équation de (3.26) par $u^{'} \in H^1(\Omega)$ et la deuxième équation par $v^{'} \in H^1(\Omega)$, puis on somme et intégrant sur Ω et en utilisant la formule de Green, on obtient

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \nabla u \nabla u^{'} dx + \int_\Omega \nabla v \nabla v^{'} dx + \int_{\partial\Omega} \alpha(x) u u^{'} ds + \int_{\partial\Omega} \beta(x) v v^{'} ds + M \int_\Omega (u u^{'} + v v^{'}) dx \\ &\quad + \int_\Omega (c(x) u u^{'} - a(x) v u^{'} - b(x) u v^{'} + d(x) v v^{'}) dx = \int_\Omega (f_1 u^{'} + f_2 v^{'}) dx. \end{aligned} \tag{3.27}$$

On définit la forme bilinéaire

$$\begin{aligned} B\left(\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u^{'} \\ v^{'} \end{pmatrix}\right) &= \int_\Omega \nabla u \nabla u^{'} dx + \int_\Omega \nabla v \nabla v^{'} dx + \int_{\partial\Omega} \alpha(x) u u^{'} ds + \int_{\partial\Omega} \beta(x) v v^{'} ds \\ &\quad + M \int_\Omega (u u^{'} + v v^{'}) dx + \int_\Omega (c(x) u u^{'} - a(x) v u^{'} - b(x) u v^{'} + d(x) v v^{'}) dx \end{aligned}$$

et la forme linéaire

$$l \begin{pmatrix} u^{'} \\ v^{'} \end{pmatrix} = \int_\Omega (f_1 u^{'} + f_2 v^{'}) dx.$$

On démontrer que B et l satisfont le théorème de Lax-Milgram.

1) a) la continuité de B,

$$\begin{aligned} \left| B\left(\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u^{'} \\ v^{'} \end{pmatrix}\right) \right| &\leq \int_\Omega \mid \nabla u \nabla u^{'} \mid dx + \int_\Omega \mid \nabla v \nabla v^{'} \mid dx + \int_{\partial\Omega} \mid \alpha(x) u u^{'} \mid ds \\ &\quad + \int_{\partial\Omega} \mid \beta(x) v v^{'} \mid ds + M \int_\Omega (\mid u u^{'} \mid + \mid v v^{'} \mid) dx \\ &\quad + \int_\Omega (\mid c(x) u u^{'} \mid + \mid a(x) v u^{'} \mid + \mid b(x) u v^{'} \mid + \mid d(x) v v^{'} \mid) dx, \end{aligned}$$

les coefficients $a, b, c, d \in C^\alpha(\bar{\Omega})$ donc sont des fonctions bornées sur Ω, on pose $C_1 = \max\{\max_\Omega a, \max_\Omega b, \max_\Omega c, \max_\Omega d\}$ et comme $\alpha(x), \beta(x) \in C^{1+\alpha}(\partial\Omega)$ et alors $\alpha(x), \beta(x)$

sont des fonctions bornées, on pose $C_2 = \max\{\max_{\partial\Omega}\alpha, \max_{\partial\Omega}\beta\}$, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a

$$\begin{aligned}\left|B\left(\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix},\begin{pmatrix}u'\\v'\end{pmatrix}\right)\right| &\leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla u'\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla v'\|_{L^2(\Omega)}\\ &+C_2(\|u\|_{L^2(\partial\Omega)}\|u'\|_{L^2(\partial\Omega)} + \|v\|_{L^2(\partial\Omega)}\|v'\|_{L^2(\partial\Omega)})\\ &+(C_1+M)(\|u\|_{L^2(\Omega)}\|u'\|_{L^2(\Omega)} + \|v\|_{L^2(\Omega)}\|v'\|_{L^2(\Omega)})\\ &+C_1(\|v\|_{L^2(\Omega)}\|u'\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\|v'\|_{L^2(\Omega)}),\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\left|B\left(\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix},\begin{pmatrix}u'\\v'\end{pmatrix}\right)\right| &\leq (1+C_1+M+C_2)(\|u\|_{H^1(\Omega)}\|u'\|_{H^1(\Omega)} + \|v\|_{H^1(\Omega)}\|v'\|_{H^1(\Omega)})\\ &+C_1(\|v\|_{H^1(\Omega)}\|u'\|_{H^1(\Omega)} + \|u\|_{H^1(\Omega)}\|v'\|_{H^1(\Omega)})\\ &\leq (1+C_1+M+C_2)(\|u\|_{H^1(\Omega)}\|u'\|_{H^1(\Omega)} + \|v\|_{H^1(\Omega)}\|v'\|_{H^1(\Omega)}\\ &+\|v\|_{H^1(\Omega)}\|u'\|_{H^1(\Omega)} + \|u\|_{H^1(\Omega)}\|v'\|_{H^1(\Omega)}),\end{aligned}$$

comme,

$$\begin{aligned}&(\|u\|_{H^1(\Omega)}\|u'\|_{H^1(\Omega)} + \|v\|_{H^1(\Omega)}\|v'\|_{H^1(\Omega)} + \|v\|_{H^1(\Omega)}\|u'\|_{H^1(\Omega)} + \|u\|_{H^1(\Omega)}\|v'\|_{H^1(\Omega)})\\ &\qquad\leq 2(\|u\|^2_{H^1(\Omega)} + \|v\|^2_{H^1(\Omega)})^{\frac{1}{2}}(\|u'\|^2_{H^1(\Omega)} + \|v'\|^2_{H^1(\Omega)})^{\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

on obtient

$$\left|B\left(\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix},\begin{pmatrix}u'\\v'\end{pmatrix}\right)\right| \leq (1+C_1+M+C_2)\left\|\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}\right\|_{H^1(\Omega)}\left\|\begin{pmatrix}u'\\v'\end{pmatrix}\right\|_{H^1(\Omega)}$$

où

$$\left\|\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}\right\|_{H^1(\Omega)} = (\|u\|^2_{H^1(\Omega)} + \|v\|^2_{H^1(\Omega)})^{\frac{1}{2}}.$$

b) la coercitive de B :

$$\begin{aligned}B\left(\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix},\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}\right) &= \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_{\partial\Omega}\alpha(x)\mid u\mid^2 ds + \int_{\partial\Omega}\beta(x)\mid v\mid^2 ds\\ &+M(\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|v\|^2_{L^2(\Omega)}) + \int(c(x)u^2 - a(x)vu - b(x)uv + d(x)v^2)dx,\end{aligned}$$

ensuite,

$$\begin{aligned}B\left(\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix},\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}\right) &\geq \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)} + M(\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|v\|^2_{L^2(\Omega)})\\ &+\min\{\min_{x\in\bar\Omega}c(x), \min_{x\in\bar\Omega}d(x)\}(\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|v\|^2_{L^2(\Omega)}) - 2C_2\int_\Omega uv dx,\end{aligned}$$

par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$B\left(\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right) \geq \| \nabla u \|^2_{L^2(\Omega)} + \| \nabla v \|^2_{L^2(\Omega)} + (M + C_3)(\| u \|^2_{L^2(\Omega)} + \| v \|^2_{L^2(\Omega)})$$
$$- 2C_2(\| u \|_{L^2(\Omega)} \| v \|_{L^2(\Omega)}),$$

où $C_3 = \min\{\min_{x\in\bar{\Omega}} c(x), \min_{x\in\bar{\Omega}} d(x)\}$, comme

$$-2C_2(\| u \|_{L^2(\Omega)} \| v \|_{L^2(\Omega)}) \geq -C_2(\| u \|^2_{L^2(\Omega)} + \| v \|^2_{L^2(\Omega)})$$

on a

$$B\left(\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right) \geq \| \nabla u \|^2_{L^2(\Omega)} + \| \nabla v \|^2_{L^2(\Omega)} + (M + C_3 - C_2)(\| u \|^2_{L^2(\Omega)} + \| v \|^2_{L^2(\Omega)}),$$

donc

$$B\left(\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right) \geq \min\{1, M + C_3 - C_2\}(\| u \|^2_{H^1(\Omega)} + \| v \|^2_{H^1(\Omega)}),$$

de sorte que $M + C_3 > C_2$ on a

$$B\left(\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right) \geq \min\{1, M + C_3 - C_2\} \left\| \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right\|^2_{H^1(\Omega)}.$$

2) la continuité de l :

$$\left| l \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} \right| = \left| \int_\Omega (f_1 u' + f_2 v') dx \right|,$$

en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz on obtient

$$\begin{aligned} \left| l \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} \right| &\leq \| f_1 \|_{L^2(\Omega)} \| u' \|_{L^2(\Omega)} + \| f_2 \|_{L^2(\Omega)} \| v' \|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq (\| f_1 \|^2_{L^2(\Omega)} + \| f_2 \|^2_{L^2(\Omega)})^{\frac{1}{2}} (\| u' \|^2_{L^2(\Omega)} + \| v' \|^2_{L^2(\Omega)})^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

donc

$$\left| l \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} \right| \leq \| F \|_{L^2(\Omega)} (\| u' \|^2_{H^1(\Omega)} + \| v' \|^2_{H^1(\Omega)})^{\frac{1}{2}},$$

où

$$\| F \|_{L^2(\Omega)} = (\| f_1 \|^2_{L^2(\Omega)} + \| f_2 \|^2_{L^2(\Omega)})^{\frac{1}{2}}$$

d'où

$$\left| l \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} \right| \leq \| F \|_{L^2(\Omega)} \left\| \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} \right\|_{H^1(\Omega)}.$$

Donc, B et l satisfont les hypothèses du théorème de Lax-Milgram, alors il existe un unique solution $U \in H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$, tel que

$$B\left(\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}\right) = l\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}, \forall \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} \in H^1(\Omega) \times H^1(\Omega).$$

Si $u' \equiv 0$, on a la deuxième équation de (3.26), si $v' \equiv 0$, on a la première équation de (3.26), donc U est une solution de (3.26).

Puisque $H^1(\Omega) = W_2^1(\Omega)$ s'injecte de façon compacte dans $C^\alpha(\bar{\Omega})$, pour $\alpha < \beta$ où $\beta = 1 - \frac{n}{2}$, on a $u, v \in C^\alpha(\bar{\Omega})$ et comme $f_1, f_2, a, b, c, d, \in C^\alpha(\bar{\Omega})$, par la première et la deuxième équation de (3.26) on a $u, v \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$, d'où $U \in X$ donc $L - A(x) + M$ est inversible de X à Y, alors $(L - A(x) + M)^{-1}$ définit de Y à X.

Comme Ω borné et convexe et $\alpha < 1$, d'après la corollaire 1 on a $X = C^{2+\alpha}(\bar{\Omega}) \times C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$ s'injecté de façon compacte dans $Y = C^\alpha(\bar{\Omega}) \times C^\alpha(\bar{\Omega})$. D'où $(L - A(x) + M)^{-1}$ est compact de Y à Y.

De plus, si M est choisi suffisamment grand tels que $a(x) - c(x) < M$ et $b(x) - d(x) < M$ pour tout $x \in \Omega$, d'après le corollaire 4 $(L - (A(x) - M))^{-1} = (L - A(x) + M)^{-1}$ est strictement positif.

Lemme 3.3.3 *L'opérateur $L - A$ sous condition au bord de Robin homogène admet une valeur propre principale; c'est-à-dire qu'il existe $\lambda_1(A) \in \mathbb{R}$ et $u_0, v_0 \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ tels que $u_0 > 0, v_0 > 0$ sur $\bar{\Omega}$ et*

$$\begin{cases} -\Delta u_0 + c(x)u_0 - a(x)v_0 &= \lambda_1(A)u_0, \quad \textit{dans } \Omega, \\ -\Delta v_0 - b(x)u_0 + d(x)v_0 &= \lambda_1(A)v_0, \quad \textit{dans } \Omega, \\ \frac{\partial u_0}{\partial \nu} + \alpha(x)u_0 &= 0, \quad \textit{sur } \partial\Omega, \\ \frac{\partial v_0}{\partial \nu} + \beta(x)v_0 &= 0, \quad \textit{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.28}$$

Preuve

Il est bien connu d'après lemme 3.3.2 que si $M > 0$ est suffisamment grand, on a $L - A(x) + M : X \longrightarrow Y$ est inversible de telle sorte que $(L - A(x) + M)^{-1}$ soit strictement positive et compact.

On peut maintenant appliquer le théorème de Krein-Rutman sur $(L - A(x) + M)^{-1}$ donc $(L - A(x) + M)^{-1}$ a une valeur propre principale strictement positive, qui est notée μ.

Il existe donc $\tilde{U} = \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{pmatrix} \in Y \times Y$ avec $\tilde{u} > 0, \tilde{v} > 0$ sur $\bar{\Omega}$, telle que $(L - A(x) + M)^{-1}\tilde{U} = \mu\tilde{U}$,

implique que $\tilde{U} = \mu(L - A(x) + M)\tilde{U}$.
Alors, $(L - A(x))\tilde{U} = (1/\mu - M)\tilde{U}$ d'où $L - A(x)$ a une valeur propre principale égale dans ce cas à $1/\mu - M$.

Proposition 3.3.1 *Supposons que $A_1(x) = (a^1_{ij}(x))_{2\times 2}$ et $A_2(x) = (a^2_{ij}(x))_{2\times 2}$ sont des matrices avec entrées strictement positives dans les éléments hors diagonale. Si $A_1(x) \geq A_2(x)$, c'est-à-dire $a^1_{ij}(x) \geq a^2_{ij}(x)$ pour tout $x \in \Omega$ et $i, j = 1, 2$ mais $A_1(x)$ différente de $A_2(x)$, alors $\lambda_1(A_1) < \lambda_1(A_2)$.*

Preuve
Par le lemme 3.3.3, il existe $U_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}$ de sorte que

$$u_1 > 0, v_1 > 0 \text{ sur } \bar{\Omega} \text{ et } [L - A_1(x) - \lambda_1(A_1)]U_1 = 0.$$

Alors

$$\begin{aligned} [L - A_2(x) - \lambda_1(A_1)]U_1 &= [L - A_1(x) - \lambda_1(A_1)]U_1 + (A_1(x) - A_2(x))U_1 \\ &= (A_1(x) - A_2(x))U_1 \geq 0, \end{aligned} \tag{3.29}$$

mais

$$(A_1(x) - A_2(x))U_1 \neq 0,$$

d'après lemme 3.3.1, nous savons que le système

$$[L - A_2(x) - \lambda_1(A_1)]U = 0,$$

satisfait le principe du maximum fort.
De plus, si $\gamma > 0$ désigne la valeur propre principale du système

$$L - A_2(x) - \lambda_1(A_1)I,$$

En déduire que

$$\lambda_1(A_2) = \lambda_1(A_1) + \gamma > \lambda_1(A_1).$$

Ceci termine la preuve.
Pour toute fonction strictement positive $\xi \in C^\alpha(\bar{\Omega})$ on note $\overline{\xi}$ et $\underline{\xi}$ le maximum et le minimum de ξ dans $\bar{\Omega}$ respectivement. Soit

$$M = \max\left\{\frac{\overline{a}}{\underline{e}}, \frac{\overline{b}}{\underline{f}}\right\} \tag{3.30}$$

Le théorème suivant assure l'existence de solutions sous une condition portant sur la valeur propre principale.

Théorème 3.3.1 *Si $\lambda_1(A) < 0$, alors le système (3.15) admet au moins une solution positive.*

Preuve

Supposons que $\lambda_1(A) < 0$, d'après lemme 3.3.3 il existe $\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix}$ avec $\Psi_1 > 0, \Psi_2 > 0$ sur $\bar{\Omega}$, tels que

$$\begin{cases} -\Delta\Psi_1 & = & a(x)\Psi_2 - c(x)\Psi_1 + \lambda_1(A)\Psi_1, & dans\ \Omega, \\ -\Delta\Psi_2 & = & b(x)\Psi_1 - d(x)\Psi_2 + \lambda_1(A)\Psi_2, & dans\ \Omega, \\ \frac{\partial\Psi_1}{\partial\nu} + \alpha(x)\Psi_1 & = & 0, & sur\ \partial\Omega, \\ \frac{\partial\Psi_2}{\partial\nu} + \beta(x)\Psi_2 & = & 0, & sur\ \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.31}$$

Soit $U^* = \begin{pmatrix} u^* \\ v^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M \\ M \end{pmatrix}$ et $U_* = \begin{pmatrix} u_* \\ v_* \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix}$, où M est donné comme dans (3.30). Comme (H1) et (H2) sont satisfaits, pour démontrer l'existence de solutions, il suffit de démontrer que U^* et U_* constituent une paire de sous et sur-solutions du (3.15).

Soit M comme défini ci-dessus et $\varepsilon > 0$ est choisi suffisamment petit.

D'après (3.30), nous avons $a(x) - e(x)M \leq 0$ pour tout $x \in \Omega$ et ainsi

$$c(x)M \geq 0 \geq (a(x) - e(x)M)v - e(x)M^2,\ \forall 0 \leq v \leq M.$$

Donc, nous obtenons

$$-\Delta u^* + c(x)u^* \geq a(x)v - e(x)u^*(u^* + v),\ \forall 0 \leq v \leq M.$$

De plus, on a

$$\frac{\partial u^*}{\partial\nu} + \alpha(x)u^* = \alpha(x)M \geq 0,\ \forall 0 \leq v \leq M.$$

De même, on peut déduire de $(b(x) - f(x)M \leq 0,\ \forall x \in \Omega)$ que

$$-\Delta v^* + d(x)v^* \geq b(x)u - f(x)v^*(v^* + u),\ \forall 0 \leq u \leq M.$$

D'autre part, on a

$$\frac{\partial v^*}{\partial\nu} + \beta(x)v^* = \beta(x)M \geq 0,\ \forall 0 \leq u \leq M.$$

Soit $\hat{\varepsilon} = \min\{\underline{a}/\overline{e}\overline{\Psi_1}, \underline{b}/\overline{f}\overline{\Psi_2}\}$.

Ensuite, pour tout $\varepsilon \in (0, \hat{\varepsilon})$, nous avons $a(x) - \varepsilon e(x)\Psi_1(x) \geq 0$ et $b(x) - \varepsilon f(x)\Psi_2(x) \geq 0$ pour tout $x \in \Omega$.

Alors, lorsque $\varepsilon < \hat{\varepsilon}$ et $\varepsilon\Psi_2 \leq v \leq M$ et comme $\lambda_1(A) < 0$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
-\Delta u_* - a(x)v + c(x)u_* + e(x)u_*(u_* + v) &= -\varepsilon\Delta\Psi_1 - a(x)v + c(x)\varepsilon\Psi_1 \\
&\quad +e(x)\varepsilon\Psi_1(\varepsilon\Psi_1 + v) \\
&= \varepsilon(-\Delta\Psi_1 - a(x)\Psi_2 + c(x)\Psi_1) \\
&\quad +a(x)(\varepsilon\Psi_2 - v) + e(x)\varepsilon\Psi_1(\varepsilon\Psi_1 + v) \\
&= \varepsilon\lambda_1(A)\Psi_1 + \varepsilon a(x)\Psi_2 \\
&\quad -(a(x) - e(x)\varepsilon\Psi_1)v + \varepsilon^2 e(x)\Psi_1^2 \\
&\leq \varepsilon\lambda_1(A)\Psi_1 + \varepsilon a(x)\Psi_2 \\
&\quad -(a(x) - e(x)\varepsilon\Psi_1)\varepsilon\Psi_2 + \varepsilon^2 e(x)\Psi_1^2 \\
&= \varepsilon\lambda_1(A)\Psi_1 + \varepsilon^2 e(x)\Psi_1(\Psi_1 + \Psi_2) < 0,
\end{aligned}$$

lorsque ε est suffisamment petit, d'où

$$-\Delta u_* + c(x)u_* < a(x)v - e(x)u_*(u_* + v), \ \forall\varepsilon\Psi_2 \leq v \leq M.$$

De plus, nous avons que

$$\frac{\partial u_*}{\partial\nu} + \alpha(x)u_* = \varepsilon(\frac{\partial\Psi_1}{\partial\nu} + \alpha(x)\Psi_1) = 0 \leq 0, \quad \forall\varepsilon\Psi_2 \leq v \leq M.$$

De même, nous pouvons également prouver que

$$\begin{cases} -\Delta v_* + d(x)v_* < b(x)u - f(x)v_*(v_* + u), & \forall\varepsilon\Psi_1 \leq u \leq M, \\ \frac{\partial v_*}{\partial\nu} + \beta(x)v_* = \varepsilon(\frac{\partial\Psi_2}{\partial\nu} + \beta(x)\Psi_2) = 0 \leq 0, & \forall\varepsilon\Psi_1 \leq u \leq M, \end{cases}$$

d'où (U_*, U^*) est un couple ordonné de sous et sur-solution du système (3.15).

Par conséquent, d'après théorème 3.2.1 le système (3.15) admet au moins une solution positive U dans $[U_*, U^*]$.

CONCLUSION

Les théorèmes de l'existence et l'unicité des solutions aux problèmes elliptiques linéaires et les théorèmes d'injection compacts sont importants pour obtenir un point fixe prouvant l'existence de solutions aux problèmes elliptiques semi-linéaires que nous avons cherché à démontrer. Quant à l'obtention de solutions positives, nous utilisons le principe du maximum ou la méthode de sous et sur- solutions pour qu'il suffise de prendre les sous-solutions positives.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Robert A Adams and John JF Fournier. *Sobolev spaces.* Elsevier, 2003.

[2] Herbert Amann. Nonlinear elliptic equations with nonlinear boundary conditions. In *North-Holland Mathematics Studies*, volume 21, pages 43–63. Elsevier, 1976.

[3] Herbert Amann and J Moser. On the existence of positive solutions of nonlinear elliptic boundary value problems. *Indiana University Mathematics Journal*, 21(2) :125–146, 1971.

[4] Ovide Arino and Juan-Aurelio Montero-Sánchez. Optimal control of a nonlinear elliptic population system. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, 43(2) :225–241, 2000.

[5] SM Bouguima, S Fekih, and W Hennaoui. Spacial structure in a juvenile-adult model. *Nonlinear Analysis : Real World Applications*, 9(3) :1184–1201, 2008.

[6] KJ Brown and Yanping Zhang. On a system of reaction–diffusion equations describing a population with two age groups. *Journal of mathematical analysis and applications*, 282(2) :444–452, 2003.

[7] FJSA Corrêa. Positive solutions of an asymptotically planar system of elliptic boundary value problems. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 21(3) :549–554, 1998.

[8] Robert Dalmasso. Existence and uniqueness of positive solutions of semilinear elliptic systems. *Nonlinear Analysis : Theory, Methods & Applications*, 39(5) :559–568, 2000.

[9] Robert Dautray and Jacques-Louis Lions. *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology : Volume 6 Evolution Problems II*. Springer Science & Business Media, 2012.

[10] Klaus Deimling. Nonlinear functional analysis, 1985.

[11] Lawrence C. Evans. *Partial Differential Equations*. Graduate Studies in Mathematics 19. American Mathematical Society, 1998.

[12] Maria Giovanna Garroni and Jose Luis Menaldi. *Second order elliptic integro-differential problems*. CRC Press, 2002.

[13] David Gilbarg and Neil S Trudinger. *Elliptic partial differential equations of second order*. springer, 2015.

[14] Ouassila Henaoui. An elliptic system modeling two subpopulations. *Nonlinear Analysis : Real World Applications*, 13(6) :2447–2458, 2012.

[15] Ruyun Ma, Ruipeng Chen, and Yanqiong Lu. Method of lower and upper solutions for elliptic systems with nonlinear boundary condition and its applications. *Journal of Applied Mathematics*, 2014, 2014.

[16] Chia-Ven Pao. *Nonlinear parabolic and elliptic equations*. Springer Science & Business Media, 2012.

[17] Jinbiao Zhong and Zuchi Chen. Existence and uniqueness of positive solutions to a class of semilinear elliptic systems. *Acta Mathematica Scientia*, 22(4) :451–458, 2002.