الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة غرداية

كليــة العلــوم الاقتصاديــة ، التجارية وعلــوم التسييــر

مطبوعة دروس في مادة رياضيات المؤسسة بعنوان:

# محاضرات في مادة رياضيات المؤسسة

معدة لطلبة السنة الثانية شعبة العلوم التجارية


من إعداد :

الدكتور : عبد المجيد تيماوي


2020 /2019

# محاضرات في رياضيات المؤسسة

**تقديم:**

تعرف المؤسسة الاقتصادية جملة من المشاكل والصعوبات تعترض سبل تسييرها خاصة في وظائف التموين الانتاج التسويق الموارد البشرية .... وغيرها. تجعلها مهتمة في البحث في أمثلية الاستخدام للموارد المتاحة وفق طرق رياضية معتمدة أهمها البرمجة الخطية، مسائل النقل. حيث تعتبر إحدى الأدوات المهمة المستخدمة في عملية التسيير في المؤسسات الاقتصادية.

لذلك جاءت هذه المطبوعة موجهة بالخصوص لطلبة السنة الثانية شعبة العلوم التجارية ولجميع شعب ميدان العلوم الاقتصادية والتسيير والعلوم التجارية، معدة لتغطية محاور مقرر مادة رياضيات المؤسسة التي تعتبر مادة من مواد السداسي الثالث ضمن الوحدة الاستكشافية.

# الفصل الأول :
# مفهوم البرمجة الخطية

## الفصل الأول : مفهوم البرمجة الخطية

تعتبر البرمجة الخطية مجموعة من طرق التحليل العلمي التي تبحث على وجه الخصوص في أمثلية الاستخدام للموارد الاقتصادية على مستوى الاقتصاد الجزئي، وذلك بالاعتماد على الأساليب الرياضية.

فتعبير البرمجة يعني وضع خطوات لحل مسألة ما لبلوغ هدف معين. أما تعبير خطية فيعني افتراض تغير الظاهرة التي نقوم بدراستها بصورة خطية على شكل خط مستقيم[1].

1-1- **تعريف:** البرنامج الخطي هو صيغة رياضية مشتقة من واقع معين هدفها البحث في أمثلية الاستخدام عن طريق دالة رياضية تتكون من مجموعة من المتغيرات تسمى بدالة الهدف أو الدالة الاقتصادية في ظل مجموعة من القيود[2].

كما عرفت المنظمة العربية للعلوم الإدارية البرمجة الخطية أنها طريقة رياضية لتخصيص الموارد النادرة أو المحدودة من أجل تحقيق هدف معين بحيث يكون من الممكن التعبير عن الهدف والقيود التي تحد من القدرة على تحقيقه في صورة معادلات أو متراجحات خطية.

أو هي طريقة أو أسلوب رياضي يستخدم للمساعدة في التخطيط واتخاذ القرارات المتعلقة بالتوزيع الأمثل للموارد المتاحة بهدف زيادة الأرباح أو تخفيض التكاليف[3].

من هذه التعاريف نجد أن البرنامج الخطي يتكون من:

1-1-1- **دالة الهدف:** وتسمى أيضا بالدالة الاقتصادية وهي تعبر عن الهدف الذي تسعى المؤسسة إلى تحقيقه كتعظيم الإنتاج أو تعظيم الأرباح أو تدنئة التكاليف ...ألخ[4].

1-1-2- **القيود:** هي عبارة عن جملة من المتراجحات أو المعادلات أو هما معا، حيث تريد المؤسسة أن تجد حلا لدالة الهدف مع أخذها بعين الاعتبار. وذلك إما بخلق الارتباط بين البدائل أو وضع قيدا مباشرا على البدائل نفسها.

1-1-3- **شرط عدم السالبية:** وهذا يعني أن قيم كل المتغيرات يجب أن تكون موجبة أو معدومة كونها تتعلق بكميات مادية التي لا يمكن أن تكون سالبة. فعلى سبيل المثال لا نستطيع إنتاج عدد سالب من الكراسي أو القمصان أو المصابيح الكهربائية أو إطارات السيارات أو غيرها[5].

---

[1] - محمد دباس الحميد ، البرمجة الرياضية، منشورات جامعة حلب، كلية الهندسة المعلوماتية، مديرية الكتب والمطبوعات الجامعية، جامعة حلب 2010، ص 24.

[2] - محمد راتوال ، بحوث العمليات ، ط 3 ، ديوان المطبوعات الجامعية، بن عكنون ، الجزائر، 2008 ، ص 9.

[3] - محمد أحمد الطراونة، سليمان خالد عبيدات، مقدمة في بحوث العمليات،ط2، دار المسيرة، عمان، الأردن، 2010م -1431هـ، ص76.

[4] - محمد راتوال، مرجع سبق ذكره ، ص15.

[5] - محمد أحمد الطراونة، سليمان خالد عبيدات، مرجع سبق ذكره، ص 79.

**1-2- استخدامات البرمجة الخطية:** تتنوع استخداماتها في مجالات العلوم الاقتصادية والمالية والتجارية وعلوم التسيير في المؤسسة عامة. أهمها[1]:

- المساعدة في اتخاذ القرارات المتعلقة بالوظائف الرئيسية في المؤسسة؛
- تخطيط رقابة الإنتاج؛
- المساهمة في تحديد المزيج الإنتاجي؛
- الاختيار أو المفاضلة بين طرق الإنتاج المتاحة؛
- تحديد أفضل الطرق لتوزيع المنتجات؛
- تعظيم الأرباح ، الإنتاج، أو طاقات التخزين، استخدام رؤوس الأموال أو اليد العاملة؛
- تدنئة التكاليف أو الخسائر ، الأجور، عدد الموظفين، ... ألخ.

**1-3- صياغة البرامج الخطية:** يعتبر بناء البرنامج الخطي أهم خطوة في البحث عن الأمثلية، حيث يتم تحويل المشكلة من واقع تعابير أدبية إلى مشكلة مصاغة في قالب رياضي واضح متكون من عدد من المتغيرات ودالة هدف. بالإضافة إلى عدد من القيود في شكل معادلات أو متراجحات[2].

ولتشكيل البرنامج الخطي ينبغي أولا تحديد المتغيرات ثم تشكيل جدول المسألة بعد ذلك، بحيث يحتوي على جميع عناصر المسألة من متغيرات وقيود وكذا الكميات المحددة لدالة الهدف مع ضرورة تجانس المعطيات من حيث وحدات القياس.

**1-3-1- حالة التعظيم:** ويقصد به إيجاد أقصى عائد ممكن من خلال حل المشكلة المعطاة باعتماد البرمجة الخطية.

**مثال[3]:** مؤسسة اقتصادية بها ثلاث ورشات لإنتاج ثلاثة أنواع من المنتجات هي خزائن، مكاتب، كراسي. حيث أن كل منتج يمر عبر الثلاث ورشات كما يلي:

- الورشة الأولى: تتم بها عملية صناعة الهياكل يشتغل بها أربعة عمال يوميا؛
- الورشة الثانية: تتم بها عملية تركيب الملحقات تشغل ثلاثة عمال يوميا؛
- الورشة الثالثة: تتم بها عملية الإنهاء (طلاء، تزيين،...) تشغل عاملين يوميا.

هذه المؤسسة تسعى لتحقيق أكبر ربح ممكن، لأجل ذلك قامت بدراسة تقنية بينت لها أن:

---

[1] - محمد راتوال، مرجع سبق ذكره ، ص16.
[2] - محمد راتوال، مرجع سبق ذكره ، ص17.
[3] - نفس المرجع، ص ص 17-18.

- الخزانة الواحدة تتطلب أربع ساعات عمل في الورشة الأولى، ساعتين من العمل في الورشة الثانية وأيضا ساعتين من العمل في الورشة الثالثة؛
- المكتب الواحد يتطلب أربع ساعات عمل في الورشة الأولى، أربع ساعات من العمل في الورشة الثانية وكذا ساعتين من العمل في الورشة الثالثة؛
- أما الكرسي الواحد فيتطلب خمس ساعات من العمل في الورشة الأولى وثلاث ساعات من العمل في الورشة الثانية وساعة عمل واحدة في الورشة الثالثة.
- كما أن الربح الصافي للوحدة الواحدة من الخزائن، المكاتب، الكراسي، هو 200دج ،150دج، 120دج على التوالي.

المطلوب: إيجاد الصيغة الرياضية لهذه المسألة التي من شأنها إيجاد الكميات الواجب إنتاجها من كل منتج لأجل تعظيم ربح هذه المؤسسة.

**الحل:**

لإيجاد البرنامج الخطي يتم اتباع الخطوات التالية:

أ- تحديد نوعية دالة الهدف : بما أن المؤسسة تسعى لتحقيق أكبر ربح ممكن فدالة الهدف هي حالة التعظيم من النوع (*Max*) ؛

ب- تحديد المتغيرات: وتتمثل في الكميات الواجب إنتاجها من كل منتج لتعظيم أرباح المؤسسة وهي: عدد الخزائن $X_1$ ، عدد المكاتب $X_2$ ، عدد الكراسي $X_3$.

ت- تشكيل جدول المسألة: هو جدول مساعد يحتوي على كل عناصر دالة الهدف وعناصر القيود، بحيث توضع المتغيرات لشكل عمودي ومعطيات القيود ودالة الهدف بشكل أفقي كما يلي:

**الجدول رقم (1-1): نموذج جدول المسألة للبرنامج الخطي (حالة التعظيم)**

| المنتجات / الورشات | الوقت المستغرق في كل ورشة بالساعات | | | الطالقة القصوى للورشات سا/يوم |
|---|---|---|---|---|
| | المنتج 1($X_1$) | المنتج 2($X_2$) | المنتج 3 ($X_3$) | |
| الورشة الأولى | 4 | 4 | 5 | 32 |
| الورشة الثانية | 2 | 4 | 3 | 24 |
| الورشة الثالثة | 2 | 2 | 1 | 16 |
| ربح الوحدة الواحدة(دج) | 200 | 150 | 120 | |

**المصدر: محمد راتوال، مرجع سبق ذكره ، ص19.**

الوقت المستغرق في الورشة الأولى هو 32 ساعة عمل يوميا، أي: $32 = 8 \times 4$ عمال × 8سا

نفس الشيء بالنسبة للورشتين الثانية والثالثة.

ث- تحديد دالة الهدف: بما أن الهدف تحقيق أقصى ربح تجميعي للمؤسسة المكون من الربح المحقق أو الناتج عن بيع الكمية $X_1$ من المنتج الأول أي $200X_1$، والربح الناتج عن بيع الكمية $X_2$ من المنتج الثاني أي $150X_2$، والربح الناتج عن بيع الكمية $X_3$ من المنتج الثالث أي $120X_3$. وبالتالي تصمم دالة الهدف كما يلي:

$$Max: Z = 200X_1 + 150X_2 + 120X_3$$

أي الهدف إيجاد قيم $X_i$ التي تجعل $Z$ في أعظم قيمة لها.

ج- تحديد القيود: إن إنتاج الكميات ($X_1$ ، $X_2$ ، $X_3$) يتطلب مثلا:

$4X_1$ ساعة عمل للمنتج 1 في الورشة الأولى؛

$4X_2$ ساعة عمل للمنتج 2 في الورشة الأولى؛

$5X_3$ ساعة عمل للمنتج 3 في الورشة الأولى؛

مع ضرورة أن لا يتجاوز الوقت المستغرق لإنتاج هذه الكميات الطاقة القصوى للورشة الأولى والمقدرة بـ 32 ساعة عمل يوميا وبالتالي قيد الورشة الأولى يكون:

$$4X_1 + 4X_2 + 5X_3 \leq 32$$

وهكذا بالنسبة للورشة الثانية أي: $2X_1 + 4X_2 + 3X_3 \leq 24$

وهكذا بالنسبة للورشة الثالثة أي: $2X_1 + 2X_2 + 1X_3 \leq 16$

وبما أن الكميات يستحيل أن تكون سالبة (كمية منتجة) فإن القيد الأخير يكتب كما يلي:

$X_1 \geq 0\ ;\ X_2 \geq 0\ ;\ X_3 \geq 0$ ويسمى قيد عدم السالبية

ح- كتابة البرنامج: بعد استنتاج دالة الهدف والقيود، يمكن كتابة البرنامج على الشكل التالي:

$$Max: Z = 200X_1 + 150X_2 + 120X_3$$
$$s/c \begin{cases} 4X_1 + 4X_2 + 5X_3 \leq 32 \\ 2X_1 + 4X_2 + 3X_3 \leq 24 \\ 2X_1 + 2X_2 + X_3 \leq 16 \\ X_1 \geq 0\ ;\ X_2 \geq 0\ ; X_3 \geq 0 \end{cases}$$

**1-3-2- حالة التدنئة:** يقصد بها إيجاد أدنى تكلفة ممكنة من خلال حل المشكلة المعطاة اعتمادا على البرمجة الخطية.

**مثال[1]**: مؤسسة منجمية تستغل ثلاثة مناجم بإحدى الولايات ، إذ تقوم بتصفية المعدن وفصله إلى نوعين معدن خام قليل الجودة ومعدن خام عالي الجودة. فإذا علمت أن الطاقة الإنتاجية لكل نوع حسب كل منجم وكذا تكلفة الإنتاج اليومية معروضة في الجدول التالي:

| الطاقة المنجم | الطاقة الإنتاجية (طن/يوم) | | التكلفة |
|---|---|---|---|
| | معدن خام قليل الجودة | معدن خام عالي الجودة | $10^3$ دج/يوم |
| المنجم الأول | 4 | 4 | 20 |
| المنجم الثاني | 4 | 6 | 22 |
| المنجم الثالث | 6 | 1 | 18 |

كما أن المؤسسة التزمت مع زبائنها بتسليم 65 طن من معدن خام قليل الجودة، و54 طن من معدن خام عالي الجودة عند نهاية كل أسبوع على أبعد تقدير.

المطلوب: أوجد البرنامج الخطي الذي من شأنه تحديد عدد الأيام التي يجب أن يشتغلها كل منجم خلال الأسبوع للوفاء بالتزامات هذه المؤسسة بأقل تكلفة ممكنة.

**الإجابة:** إن إيجاد البرنامج الخطي يتم باتباع نفس الخطوات السالفة الذكر في حالة التعظيم.

أ- تحديد نوع دالة الهدف: بما أن المؤسسة تبحث في كيفية الوفاء بالتزاماتها بأقل تكلفة ممكنة فدالة الهدف حالة التدنئة من النوع (*Min*)؛

ب-تحديد المتغيرات: وتتمثل في عدد الأيام التي يجب أن يعملها كل منجم خلال الأسبوع أي:

$X_1$: عدد الأيام التي يعملها المنجم الأول؛

$X_2$: عدد الأيام التي يعملها المنجم الثاني؛

$X_3$: عدد الأيام التي يعملها المنجم الثالث؛

ت-تشكيل جدول المسألة: ويعطى كما يلي:

**الجدول رقم (1-2): نموذج جدول المسألة للبرنامج الخطي (حالة التدنئة)**

| أيام العمل نوع المعدن | عدد أيام عمل كل منجم في الأسبوع | | | الكمية الدنيا من النوعين من المعادن |
|---|---|---|---|---|
| | المنجم1 ($X_1$) | المنجم2 ($X_2$) | المنجم3 ($X_3$) | |
| معدن خام قليل الجودة | 4 | 4 | 6 | 65 |
| معدن خام عالي الجودة | 4 | 6 | 1 | 54 |
| تكلفة المنجم الواحد | 20 | 22 | 18 | |

[1] - محمد راتوال، مرجع سبق ذكره ، ص24.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $10^3$دج/يوم | | | | |

**المصدر: من إعداد الباحث بناء على معطيات المثال.**

ث-تحديد دالة الهدف: وتتمثل في أدنى تكلفة تجميعية ناتجة عن تكلفة أيام عمل كل منجم.

وتعطى بالعلاقة التالية:

$$Min: Z = 20X_1 + 22X_2 + 18X_3$$

أي الهدف إيجاد قيم $X_i$ التي تجعل $Z$ في أدنى قيمة لها.

ج- تحديد القيود: إن عدد أيام عمل كل منجم ( $X_1$ ، $X_2$ ، $X_3$) ينتج عنها مثلا:

- الكمية $4X_1$ من المعدن الخام قليل الجودة بالنسبة للمنجم 1 ؛
- الكمية $4X_2$ من المعدن الخام قليل الجودة بالنسبة للمنجم 2 ؛
- الكمية $6X_3$ من المعدن الخام قليل الجودة بالنسبة للمنجم 3 ؛

ومع ضرورة أن لا تقل الكمية المنتجة من المعدن الخام قليل الجودة عن 65طن أسبوعيا والتي تمثل قيد الكمية المنتجة من المعدن الخام قليل الجودة ويعطى بالعلاقة:

$$4X_1 + 4X_2 + 6X_3 \geq 65$$

وهكذا بالنسبة لقيد الكمية المنتجة من المعدن الخام عالي الجودة ويعطى:

$$4X_1 + 6X_2 + 1X_3 \geq 54$$

وبما أن عدد الأيام يستحيل أن يكون سالبا فإن القيد الأخير يكتب كما يلي:

$X_1 \geq 0$ ; $X_2 \geq 0$ ; $X_3 \geq 0$ ويسمى قيد عدم السالبية.

ح-كتابة البرنامج:

$$Min: Z = 20X_1 + 22X_2 + 18X_3$$
$$s/c \begin{cases} 4X_1 + 4X_2 + 6X_3 \geq 65 \\ 4X_1 + 6X_2 + X_3 \geq 54 \\ X_1 \geq 0\,;\; X_2 \geq 0\,; X_3 \geq 0 \end{cases}$$

# الفصل الثاني:
# الحل البياني للبرامج الخطية

# **الفصل الثاني**: **الحل البياني للبرامج الخطية**

يقصد بحل البرنامج الخطي إيجاد قيم المتغيرات التي تجعل دالة الهدف في أمثل قيمة لها دون تجاوز حدود القيود سواء كانت دالة الهدف في حالة التعظيم أو في حالة التدنئة.

ويتصف أسلوب الحل البياني بسهولته ووضوحه غير أنه يستخدم فقط في البرامج التي تحتوي على متغيرين فقط على الأكثر.

**2-1- خطوات الحل البياني:** لإيجاد حل البرنامج الخطي بيانيا نتبع الخطوات التالية[1]:

أولا- نحول كل متراجحات القيود إلى معادلات لمستقيمات تسمى بالمستقيمات المولدة؛

ثانيا- نرسم مستقيمات معادلات القيود على معلم متعامد ومتجانس، مما ينتج عنها مضلع متعدد الرؤوس؛

ثالثا- نشطب المناطق التي لا تحقق القيود والموجودة إلى يمين المستقيم في حالة كون القيد **أقل من** أو إلى يسار المستقيم في حالة كون القيد **أكبر من** . وبالتالي تتحدد المنطقة التي تحقق جميع القيود والمتمثلة في مضلع متعدد الرؤوس في حالة التعظيم عادة؛

رابعا- نجعل دالة الهدف معدومة، ونرسم مستقيمها على نفس المعلم والذي يمر دائما من المبدأ. ويسمى بالمستقيم (Δ)؛

خامسا- نحرك المستقيم (Δ) بصفة متوازية (نجري انسحاب للمستقيم) اتجاه رؤوس المضلع المحصل عليه بالمستقيمات المولدة. وتكون النقطة التي تحقق أكبر قيمة للدالة الاقتصادية (دالة الهدف) هي آخر نقطة تماس للمستقيم (Δ) مع إحدى رؤوس المضلع الناتجة من تقاطع عدة مستقيمات متولدة؛

سادسا- إيجاد قيم الأزواج المرتبة لهذه النقطة ، إما هندسيا بإسقاط هذه النقطة عموديا على المحورين، أو جبريا بإيجاد الحل المشترك للمستقيمات المتقاطعة. وفي حالة تعدد النقط نعوض الثنائيات في دالة الهدف ونأخذ النقطة التي تعطي أكبر قيمة لها وتسمى القيمة المثلى لهذه الدالة.

---

[1] - محمد راتوال، مرجع سبق ذكره ، ص ص 25-26.

**ملاحظة:** في حالة عدم التمكن من تمييز آخر نقطة يصل إليها المستقيم ($\Delta$)، فإننا نوجد قيم المتغيرات عند النقاط المشتبه فيها، ثم نعوضها في دالة الهدف. ونأخذ النقطة التي تعطي أمثل قيمة للدالة الاقتصادية.

**2-2- حالة التعظيم(الحل البياني):** يقصد بمشكلة تعظيم الحل، إيجاد أقصى عائد ممكن من خلال حل المشكلة المعطاة باعتماد البرمجة الخطية الأسلوب البياني:

**مثال**[1]: إليك البرنامج الخطي التالي:

أوجد حل لهذا البرنامج الخطي باستخدام الطريقة البيانية

$$Max: Z = 100X_1 + 60X_2$$

$$s/c\begin{cases} 8X_1 + 2X_2 \leq 40 \\ 6X_1 + 9X_2 \leq 108 \\ 8X_1 + 6X_2 \leq 96 \\ X_j \geq 0 \quad / \quad j = 1,2 \end{cases}$$

**الحل:** لإيجاد حل لهذا البرنامج بيانيا نتبع الخطوات التالية:

أ- نستخرج المستقيمات المولدة بتحويل متراجحات القيود إلى معادلات كما يلي:

$$\text{م}_1: 8X_1 + 2X_2 = 40 \quad ; \quad \text{م}_2: 6X_1 + 9X_2 = 108 \quad ; \quad \text{م}_3: 8X_1 + 6X_2 = 96$$

ب- رسم هذه المستقيمات على معلم متعامد ومتجانس:

م3

| $X_1$ | $X_2$ |
|---|---|
| 0 | 16 |
| 12 | 0 |

م2

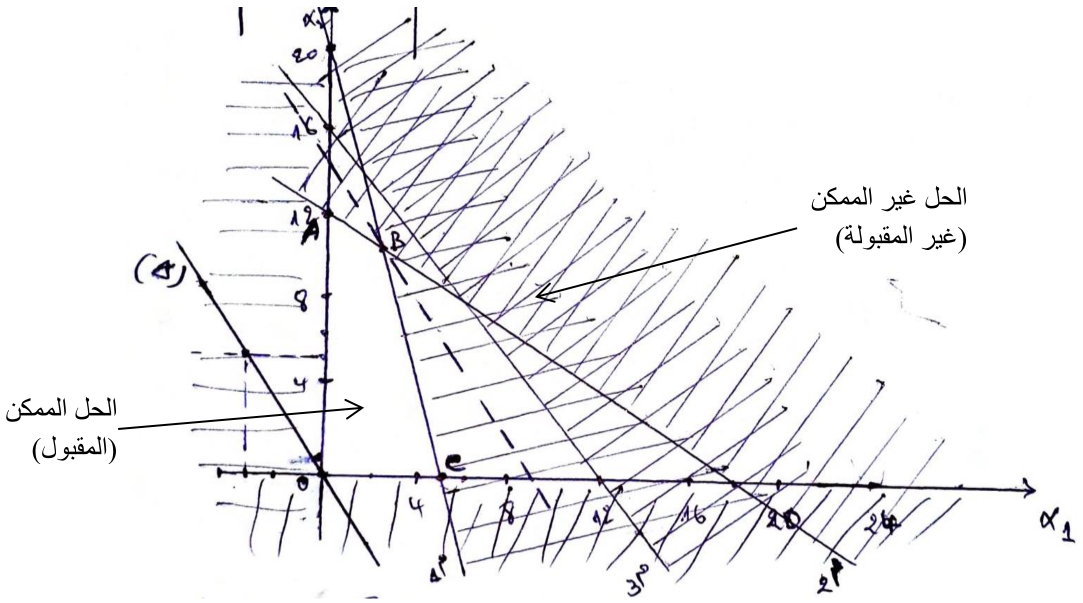
| $X_1$ | $X_2$ |
|---|---|
| 0 | 12 |
| 18 | 0 |

م1

| $X_1$ | $X_2$ |
|---|---|
| 0 | 20 |
| 5 | 0 |

[1] - محمد راتوال، مرجع سبق ذكره ، ص ص 26-27.

**الشكل رقم (2−1): الحل البياني للبرنامج الخطي (حالة التعظيم)**




**المصدر: محمد راتوال، مرجع سبق ذكره ، ص 28.**

ت− على نفس المعلم نرسم المستقيم $(\Delta)$ عند وضع الدالة الاقتصادية في أدنى قيمة لها $(Z = 0)$ أي:

$$(\Delta): Z = 0 \;<=>\; 100X_1 + 60X_2 = 0$$

| $X_1$ | $X_2$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| -3 | 5 |

ث− نشطب المناطق التي لا تحقق القيود لينتج عنها منطقة الحلول الممكنة، أو منطقة لحلول المقبولة والمتمثلة في المضلع OABC؛

ج− نقوم بتحريك المستقيم $(\Delta)$ بصفة متوازية نحو الأعلى لنتوقف عند آخر نقطة يصلها في منطقة الحلول المقبولة (B) والتي تمثل الحل الأمثل للمسألة، وهي نقطة تقاطع المستقيمين م1 ، م2 .

ولإيجاد قيمة $X_1$ و $X_2$ نحل جملة المعادلتين للمستقيمين م1 ، م2.

نضرب معادلة المستقيم م1 في 3، ومعادلة المستقيم م2 في (-4) ثم نجمعهما لنجد:

$$\begin{array}{r} 24X_1 + 6X_2 = 120 \\ \underline{-24X_1 - 36X_2 = -432} \\ -30X_2 = -312 \end{array} \;=>\; X_2 = \frac{-312}{-30} = 10{,}4$$

بالتعويض في معادلة المستقيم م1 نجد: $X_2 = 2{,}4$.

ويمكن التحقق من هذه النتيجة أنها تحقق القيود كما يلي:

$$8 \times 2{,}4 + 2 \times 10{,}4 = 40$$ محقق

$$6 \times 2{,}4 + 9 \times 10{,}4 = 108$$ محقق

القيد الثالث: $8 \times 2{,}4 + 6 \times 10{,}4 = 81{,}6$ هناك طاقة غير مستغلة قدرها 14,6 سا عمل.

ولمعرفة القيمة العظمى نعوض في دالة الهدف لنجد:

$$Z = 100 \times 2{,}4 + 60 \times 10{,}4 = 864$$

**نظرية:** إذا وجد حل أمثل لبرنامج خطى ذي متغيرين ، فإن هذا الحل يوجد عند أحد رؤوس مضلع منطقة الحلول الممكنة.

**2-3- حالة التدنئة(الحل البياني):** يساعد البرنامج الخطي على الوصول إلى الهدف المتمثل في أقل تكلفة كلية أو أقل وقت كلي مطلوب بشرط أن يتماشى مع القيود أو المحددات الموضوعة على المشكلة. ولتوضيح ذلك بيانيا نأخذ المثال التالي.

**مثال**[1]: باستعمال الطريقة البيانية، أوجد الحل الأمثل للبرنامج التالي:

$$Min: Z = 10X_1 + 30X_2$$

$$s/c \begin{cases} 3X_1 + 2X_2 \geq 6 \\ 6X_1 + X_2 \geq 6 \\ X_2 \geq 2 \\ X_j \geq 0 \ / \ j = 1{,}2 \end{cases}$$

1- المستقيمات المولدة هي:

م1: $3X_1 + 2X_2 = 6$ ; م2: $6X_1 + X_2 = 6$ ; م3: $X_2 = 2$

م1

| $X_1$ | $X_2$ |
|---|---|
| 0 | 3 |
| 2 | 0 |

م2

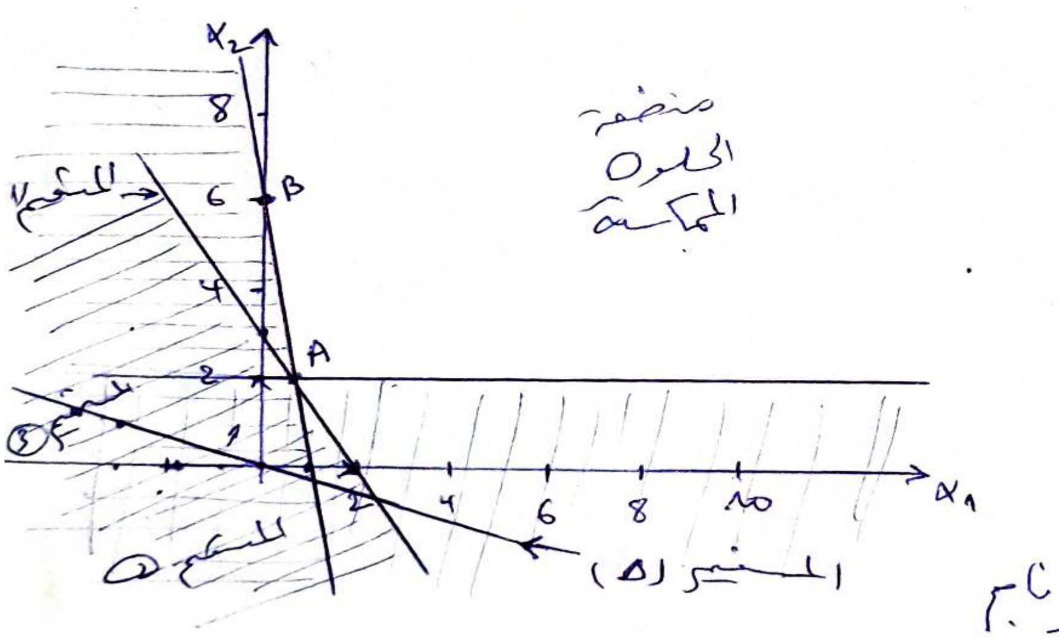
| $X_1$ | $X_2$ |
|---|---|
| 0 | 6 |
| 1 | 0 |

[1] - محمد راتوال، مرجع سبق ذكره ، ص 32.

المستقيم $(\Delta): Z = 0 \ <=> \ 10X_1 + 30X_2 = 0$

| $X_1$ | $X_2$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| -3 | 1 |

**الشكل رقم (2−2): الحل البياني للبرنامج الخطي (حالة التدنئة)**




**المصدر: محمد راتوال، مرجع سبق ذكره ، ص 33.**

وبتحريك المستقيم (Δ) بصفة متوازية نحو الأعلى فإن أدنى نقطة يصلها من منطقة الحلول الممكنة تمثل الحل الأمثل للبرنامج. وهي النقطة(A) في هذا المثال. وبحل جملة معادلات المستقيمات م1 ، م2 ، م3 نحصل على الحل الأمثل والمتمثل في: $X_1 = \frac{2}{3}$ و $X_2 = 2$ . أما قيمة الدالة الاقتصادية:

$$Z = 10 \times \frac{2}{3} + 30 \times 2 = \frac{20}{3} + \frac{180}{3} = \frac{200}{3} = 66,67$$

**2-4- حالات ومشاكل خاصة في الطريقة البيانية:** هناك أربع حالات ومشاكل خاصة تظهر عند استخدام الطريقة البيانية في حل مشاكل البرمجة الخطية وهي[1]:

- **تعذر الحل Infeasibility:** وتعني عدم وجود حل لمشكلة البرمجة الخطية بشكل يفي باحتياجات كل القيود. ويعني هذا بالنسبة للطريقة البيانية أنه لا يوجد حل ممكن. وتحدث هذه الحالة إذا كانت المشكلة تضم قيودا متعارضة.
- **عدم توفر الحدود Unboundness:** ويعني ذلك عدم وجود حدود على الحل، وهذا يعني أنه يمكن زيادة متغير أو أكثر من متغيرات المشكلة ومن ثم الربح دون مخالفة لأي قيد من قيود المشكلة. علما بأن هذه الحالة هي حالة نظرية بعيدة عن الواقع، ذلك أننا كأفراد ومؤسسات محددين بالموارد المتاحة لنا في لحظة زمنية معينة، ومع ذلك فإن استعراض هذه الحالة هو متمم لاستعراض الحالات الأخرى التي تصاحب الطريقة البيانية في حل مشاكل البرمجة الخطية. هذا يعني أن منطقة الحل مفتوحة وبدون نهاية Open-Ended.
- **الفائض Redundancy:** هي مشكلة شائعة في مشاكل البرمجة الخطية الكبيرة. وتتمثل بوجود قيد فائض. حيث يمثل القيد الفائض ذلك القيد الذي لا يؤثر على منطقة الحل الممكن، وبمعنى آخر هناك قيود أكثر أهمية من غيرها. لذلك فإن استخدام الأهم يغني عن استخدام الأقل أهمية. وهناك حالة أخرى عند وجود قيدين متساويين. حيث لا تشكل هذه الحالة صعوبة أو مشكلة كبيرة في حل مشاكل البرمجة الخطية باستخدام الطريقة البيانية. لكن يجب أن نكون قادرين على تحديد حدوث مثل هذه المعوقات.
- **توفر عدة حلول مثلىAlternate Optimal Solutions :** وتعني هذه الحالة أن مشكلة البرمجة الخطية لها أكثر من حل أمثل. ويمكن التعرف على هذه الحالة عند استخدام الطريقة البيانية عن طريق رسم مستقيمات خطوط الربح أو التكلفة المتكافئة ويكون أحد هذه المستقيمات موازيا أو متطابقا مع أحد قيود المشكلة أي أن لها نفس الميل.

[1] - محمد أحمد الطراونة، سليمان خالد عبيدات، مرجع سبق ذكره، ص ص 100-106.

# الفصل الثالث:

# حل البرنامج الخطي العام باستخدام طريقة السيمبليكس (طريقة الجداول)

## الفصل الثالث: حل البرنامج الخطي العام باستخدام طريقة السيمبليكس (طريقة الجداول)

يعتبر استخدام الحل البياني غير ممكن في حالة وجود أكثر من متغيرين، لذلك يتم اللجوء إلى طريقة الجداول(طريقة السيمبليكس) لحل البرنامج. وتقوم على إيجاد التحسن المضطرد في دالة الهدف، إلى أن نصل إلى الحل الأمثل الذي تتوقف عنده إمكانية تحسين الحل.

**3-1- كتابة البرنامج الخطي على الشكل المصفوفي:** قبل إيجاد حل البرنامج الخطي باستخدام طريقة الجداول يمكن كتابته على الشكل المصفوفي.

**3-1-1- حالة التعظيم:** يكتب البرنامج الخطي بالشكل العام بإبراز دالة الهدف والقيود كما يلي:

$$Max: Z = C_1X_1 + C_2X_2 + C_3X_3 + \cdots + C_nX_n$$
$$s/c \begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 + \cdots + a_{1n}X_n \le b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3 + \cdots + a_{2n}X_n \le b_2 \\ a_{31}X_1 + a_{32}X_2 + a_{33}X_3 + \cdots + a_{3n}X_n \le b_3 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + a_{m3}X_3 + \cdots + a_{mn}X_n \le b_m \\ X_1 \ge 0\,;\ X_2 \ge 0\,;\ X_3 \ge 0\,;\ \ldots\ X_n \ge 0 \end{cases}$$

حيث: $X_1 , X_2 , X_3 ,\ldots,X_n$ هي متغيرات البرنامج المطلوب البحث عن قيمها؛

$C_1 , C_2 , C_3 , \ldots ,C_n$ هي معاملات دالة الهدف المراد تعظيمها؛

$a_{11},\ldots a_{1n},\ldots,a_{m1},\ldots a_{mn}$ هي معاملات القيود ويمكن أن تأخذ أي قيمة؛

$b_1 , b_2 , b_3 , \ldots , b_m$ شعاع الثوابت ويشترط أن تكون موجبة.

ويمكن كتابة البرنامج الخطي بالشكل المصفوفي كما يلي:

دالة الهدف:

$$Max: Z = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & C_3 & \ldots & C_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}$$

القيود:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{11} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} \ge \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

واختصارا يكتب:

$$Max: Z = C'X$$
$$s/c \begin{cases} AX \le B \\ X \ge 0 \end{cases}$$

حيث: $C'$ : منقول مصفوفة معاملات الدالة الاقتصادية؛

$X$ : هو شعاع المتغيرات؛

$A$ : هي مصفوفة معاملات القيود؛

$B$ : شعاع الثوابت.

مثال: أكتب البرنامج الخطي التالي بالشكل المصفوفي.

$$Max: Z = 100X_1 + 60X_2$$
$$s/c \begin{cases} 4X_1 + 2X_2 \leq 400 \\ 2X_1 + 9X_2 \leq 1080 \\ 8X_1 + 6X_2 \leq 960 \\ X_1 \geq 0\ ;\ \ X_2 \geq 0 \end{cases}$$

نجد

$$Max: Z = \begin{bmatrix} 100 & 60 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} X_1 \\ X_C \end{bmatrix}$$
$$s/c \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 9 \\ 8 & 6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} X_1 \\ X_C \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 400 \\ 1080 \\ 960 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_C \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

**3-1-2- حالة التدنئة:** يكتب البرنامج الخطي بالشكل العام كما يلي:

$$Min: Z = C_1X_1 + C_2X_2 + C_3X_3 + \cdots + C_nX_n$$
$$s/c \begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 + \cdots + a_{1n}X_n \geq b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3 + \cdots + a_{2n}X_n \geq b_2 \\ a_{31}X_1 + a_{32}X_2 + a_{33}X_3 + \cdots + a_{3n}X_n \geq b_3 \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + a_{m3}X_3 + \cdots + a_{mn}X_n \geq b_m \\ X_1 \geq 0\ ;\ X_2 \geq 0\ ;\ X_3 \geq 0\ ;\ \ \ldots\ \ X_n \geq 0 \end{cases}$$

وبالشكل المصفوفي يكتب :

دالة الهدف:

$$Min: Z = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & C_3 & \ldots & C_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}$$

القيود:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{11} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

واختصارا يكتب:

$$Min: Z = C'X$$
$$s/c \begin{cases} AX \geq B \\ X \geq 0 \end{cases}$$

**مثال:** أكتب البرنامج الخطي التالي بالشكل المصفوفي:

$$Min: Z = 4X_1 + 18X_2 + 2X_3$$
$$s/c \begin{cases} 4X_1 + 4X_2 + 14X_3 \geq 20 \\ 2X_1 + 6X_3 \geq 14 \\ 2X_1 + 34X_2 + 30X_3 \geq 50 \\ X_1 \geq 0\ ;\ \ X_2 \geq 0\ ;\ \ X_3 \geq 0 \end{cases}$$

نجد

$$Min: Z = \begin{bmatrix} 4 & 18 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}$$
$$s/c \quad \begin{bmatrix} 4 & 4 & 14 \\ 2 & 0 & 6 \\ 2 & 34 & 30 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 20 \\ 14 \\ 50 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

## 3-2- حل البرنامج الخطي بطريقة السيمبليكس:

**3-2-1- حالة التعظيم:** لإيجاد الحل بطريقة السيمبليكس يتم اتباع الخطوات التالية:

**أولا –** تحويل البرنامج الخطي من شكله العام إلى الصيغة النموذجية بتحويل القيود من متراجحات إلى صورة معادلات، وذلك بإدخال متغيرات صورية جديدة على البرنامج تسمى متغيرات الفجوة باعتبار أنها تسد الفرق بين طرفي المتراجحة. أي نضيف للطرف الأيسر متغيرا صوريا يرمز له بالرمز $S_j$ ليتساوا مع الطرف الأيمن. لذلك ينبغي أن تكون أيضا غير سالبة كونها تعبر عن طاقات غير مستعملة. كما أنه ينبغي أيضا إدخال متغيرات الفجوة على دالة الهدف بمعامل معدوم يساوي 0. وتسمى مصفوفة معاملات القيود المحصل عليها بعد إضافة متغيرات الفجوة بمصفوفة الحل الأساسي الأول[1].

**ثانيا–** ترتيب البيانات في جدول هو الجدول -1- ويسمى جدول الحل الأساسي الأول، تكون فيه متغيرات الفجوة كمتغيرات أساس رئيسية أو متغيرات داخل الأساس(قيمها عند بداية الحل هي المقابلة لها في عمود الثوابت)، أما المتغيرات الحقيقية فنعتبرها متغيرات خارج الأساس (قيمها في الجدول الأول معدومة) ، وتكون قيمة دالة الهدف أيضا معدومة.

[1]- محمد راتوال، مرجع سبق ذكره ، ص44.

# الفصل الثالث: حل البرنامج الخطي العام باستخدام طريقة السيمبليكس (طريقة الجداول)

**الجدول رقم (3−1): نموذج جدول الحل الأساسي الأول**

| B | متغيرات دالة الهدف | |
|---|---|---|
| عمود الثوابت | مصفوفة المعاملات | الأساس(متغيرات الفجوة $S_j$) |
| قيمة دالة الهدف | معاملات دالة الهدف | $\Delta Z$ |

**المصدر: من إعداد الباحث.**

**مثال:** ليكن لديك البرنامج الخطي التالي:

$$Max: Z = 100X_1 + 60X_2$$

$$s/c \begin{cases} 8X_1 + 2X_2 \leq 40 \\ 6X_1 + 9X_2 \leq 108 \\ 8X_1 + 6X_2 \leq 96 \\ X_j \geq 0 \quad / \quad j = 1,2 \end{cases}$$

اعتمادا على طريقة السيمبليكس كون جدول الحل الأساسي الأول لهذا البرنامج.

الحل:

1) إيجاد الصيغة النموذجية:

القيد الأول: $8X_1 + 2X_2 \leq 40 \quad => \quad 8X_1 + 2X_2 + S_1 = 40$

القيد الثاني: $6X_1 + 9X_2 \leq 108 \quad => \quad 6X_1 + 9X_2 + S_2 = 108$

القيد الثالث: $8X_1 + 6X_2 \leq 96 \quad => \quad 8X_1 + 6X_2 + S_3 = 96$

أما دالة الهدف فتصبح:

$$Max: Z = 100X_1 + 60X_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3$$

$$s/c \begin{cases} 8X_1 + 2X_2 + S_1 = 40 \\ 6X_1 + 9X_2 + S_2 = 108 \\ 8X_1 + 6X_2 + S_3 = 96 \\ X_j \geq 0 \,;\, S_j \geq 0 \quad / \quad j = 1,2 \end{cases}$$

وتسمى بالصيغة النموذجية للبرنامج.

أما مصفوفة المعاملات فتصبح:

$$\begin{array}{ccccc} X_1 & X_2 & S_1 & S_2 & S_3 \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 8 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 9 & 0 & 1 & 0 \\ 8 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

وتسمى مصفوفة الحل الأساسي الأول. (تتضمن مصفوفة أحادية الأعمدة:3،4،5) ولا يشترط أن تكون متحاذية.

2) إنشاء جدول الحل الأساسي الأول:

**جدول الحل الأساسي رقم 1**

| | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | B | % |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $S_1$ | 8 | 2 | 1 | 0 | 0 | 40 | 5 |
| $S_2$ | 6 | 9 | 0 | 1 | 0 | 108 | 18 |
| $S_3$ | 8 | 6 | 0 | 0 | 1 | 96 | 12 |
| $\Delta Z$ | 100 | 60 | 0 | 0 | 0 | 0 | / |

**ملاحظة:** هناك من يعتمد شكلا آخر في إعداد جدول الحل الأساسي الأول يقوم على نفس مبدإ الطريقة السابقة. حيث يتم إعداد الجدول الأول كما يلي:

– تتم في المرحلة الأولى تشكيل جدول يضم في السطرين الأول و الثاني متغيرات النموذج (متغيرات حقيقية، متغيرات الفجوة)، حيث يكتب في السطر الأول معاملات هذه المتغيرات ($C_j$) في دالة الهدف و في السطر الثاني تكتب المتغيرات؛

– يكتب في العمودين الأول والثاني (على اليسار) متغيرات الأساس المتحصل عليها من أول حل أساس مقبول مع معاملاتها ($C_j$)في دالة الهدف (متغيرات الفجوة عادة) ؛

– في العمود الأخير شعاع الثوابت $B$ تتم كتابة المتاح (من القيود الوظيفية)؛

– في السطر قبل الأخير $Z_j = \sum C_j x_j$ يتم ضرب معاملات المتغيرة الأولى لكافة القيود الوظيفية في معاملات متغيرات الأساس، ثم جمعها؛

– في السطر الأخير $\Delta Z = Cj - Zj$ حيث يتم طرح قيم $Z_j$ من معاملات كافة المتغيرات في دالة الهدف (أول سطر $C_j$)؛

–

– في باقي خانات الجدول تتم كتابة معاملات كافة المتغيرات في القيود الوظيفية(مصفوفة المعاملات)؛

– للحصول على قيمة دالة الهدف Z يتم ضرب معاملات متغيرات الأساس (العمود الأول $C_j$).

**الجدول رقم (3–2): نموذج جدول الحل الأساسي الأول (الطريقة الثانية)**

<table>
<tr><td rowspan="2">B</td><td>معاملات المتغيرات في دالة الهدف</td><td colspan="2" rowspan="2">$C_j \rightarrow$<br>$\downarrow$</td></tr>
<tr><td>متغيرات دالة الهدف</td></tr>
<tr><td>عمود الثوابت</td><td>مصفوفة المعاملات</td><td>متغيرات الأساس</td><td>معاملات متغيرات الأساس</td></tr>
<tr><td rowspan="2">قيمة دالة الهدف</td><td>الربح الإجمالي</td><td colspan="2">$Z_j = \sum C_j \, x_j$</td></tr>
<tr><td>الربح الصافي</td><td colspan="2">$\Delta Z = Cj - Zj$</td></tr>
</table>

**المصدر: من إعداد الباحث**

**ثالثا**– تحسين دالة الهدف(تحسين الحل)[1]: انطلاقا من جدول الحل الأساسي الأول نقوم بإعداد جدول الحل الأساسي رقم 2 (الجدول الثاني)، وذلك باختيار المتغيرة التي تدخل الأساس والمتغيرة التي تخرج من الأساس.

- المتغيرة التي تدخل الأساس هي التي يكون لها أكبر معامل موجب في سطر الدالة الاقتصادية ($\Delta Z$). أي المتغيرة التي تعطي أكبر عائد للدالة الاقتصادية، ويسمى العمود الذي تنتمي إليه هذه المتغيرة بعمود عنصر الارتكاز أو العمود الأمثل Pivot colone؛
- أما المتغيرة التي تخرج من الأساس فهي المقابلة لأصغر نسبة موجبة ناتجة عن تقسيم عمود الثوابت (الطرف الأيمن للقيود) على عمود عنصر الارتكاز. ويسمى سطر هذه المتغيرة بسطر عنصر الارتكاز *Pivot ligne*؛
- عنصر الارتكاز هو العنصر الذي يتقاطع عنده عمود عنصر الارتكاز مع سطر عنصر الارتكاز.

ويتم إعداد الجدول الثاني كما يلي:

– استبدال المتغيرة التي تخرج من الأساس بالمتغيرة التي تدخل الأساس في عمود متغيرات الأساس؛

[1] - محمد راتوال، مرجع سبق ذكره ، ص ص 51-53.

- تحويل عمود عنصر الارتكاز إلى عمود أحادي بتحويل عنصر الارتكاز إلى القيمة 1 وباقي عناصر العمود الأخرى معدومة؛
- يتم تحويل سطر عنصر الارتكاز بتقسيم عناصره على قيمة عنصر الارتكاز؛
- يتم تحويل بقية عناصر الجدول وفق قاعدة المستطيلات على النحو التالي:

| الجدول 1 | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |
| | | $b$ | | $a$ | عنصر الارتكاز |
| | | | | | |
| | | $d$ | | $c$ | |
| | | | | | |

| الجدول 2 | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |
| | | $\frac{b}{a}$ | | 1 | |
| | | | | | |
| | | $d-\frac{b\times c}{a}$ | | 0 | |
| | | | | | |

وتستمر عملية التحويل بإنشاء جدول آخر بالرجوع إلى الخطوة الثالثة ، إلى أن تصبح كل معاملات سطر الدالة الاقتصادية (السطر الأخير) سالبة أو معدومة[1]. حينئذ نكون أمام جدول الحل الأمثل، تكون فيه قيم المتغيرات الداخلة في الأساس تساوي القيم الجديدة الناتجة في عمود الثوابت على وجه التقابل، وبقية المتغيرات تكون معدومة. أما قيمة الدالة الاقتصادية فهي عبارة عن القيمة المطلقة لآخر قيمة في عمود الثوابت.

**مثال:** بالرجوع إلى المثال السابق المطلوب إعداد الجدول الثاني.

- المتغيرة التي تدخل الأساس هي $X_1$ المقابلة لأكبر معامل في سطر الدالة الاقتصادية (100) تحدد بذلك عمود عنصر الارتكاز؛
- المتغيرة التي تخرج من الأساس $S_1$ المقابلة لأصغر نسبة موجبة من بين النسب الناتجة عن تقسيم عمود الثوابت على عمود عنصر الارتكاز (5) تحدد بذلك سطر عنصر الارتكاز؛
- عنصر الارتكاز هو القيمة التي تقاطع عندها عمود عنصر الارتكاز مع سطر عنصر الارتكاز، أي القيمة(8)؛

ونجري التحويلات التالية للحصول على جدول الحل الأساسي الثاني:

---

[1] - Fabian Bastin, Modèles de recherche opérationnelles, Département d'informatique et de recherche opérationnelle, Université de Montréal, IFT-1575, Hiver 2010,P20.

- تحويل عمود عنصر الارتكاز إلى عمود أحادي بجعل قيمة عنصر الارتكاز 1 وبقية عناصر العمود معدومة؛
- تقسيم عناصر سطر الارتكاز على قيمة عنصر الارتكاز ؛
- بقية عناصر الجدول تحسب بطريقة المستطيلات؛

لنحصل على الجدول التالي:

**جدول الحل الأساسي رقم (2)**

| | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | $B$ | % |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $X_1$ | 1 | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{8}$ | 0 | 0 | 5 | 20 |
| $S_2$ | 0 | $\frac{15}{2}$ | $-\frac{3}{4}$ | 1 | 0 | 78 | 10,4 |
| $S_3$ | 0 | 4 | $-1$ | 0 | 1 | 56 | 14 |
| $\Delta Z$ | 0 | 35 | $-\frac{25}{2}$ | 0 | 0 | $-500$ | |

نلاحظ أن قيمة الدالة الاقتصادية تحسنت ، فانتقلت قيمتها من 0 إلى 500. كما دخلت متغيرة حقيقية إلى الأساس. حيث أصبحت قيم المتغيرات: $X_1=5$ ، $S_2=78$، $S_3=56$. أما بقية المتغيرات غير الموجودة في عمود الأساس فهي معدومة( $X_2=0$ ، $S_1=0$).

ويمكن التأكد من قيمة الدالة الاقتصادية:

$$Z = 100X_1 + 60X_2 = 100 \times 5 + 60 \times 0 = 500$$

لكن هل توصلنا للحل الأمثل؟ والجواب أنه مادامت هناك قيم أكبر من الصفر في سطر الدالة الاقتصادية، فإن الحل الأمثل لم يتحقق بعد. وينبغي إجراء خطوة أخرى لتحسينه بإعداد جدول الحل الأساسي رقم 3.

- المتغيرة التي تدخل الأساس هي $X_2$ ؛
- المتغيرة التي تخرج من الأساس هي $S_2$؛
- عنصر الارتكاز هو $\frac{15}{2}$

ويكون الجدول رقم 3 كما يلي:

# الفصل الثالث: حل البرنامج الخطي العام باستخدام طريقة السيمبليكس (طريقة الجداول)

**جدول الحل الأساسي رقم 3 (جدول الحل الأمثل)**

| | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | B |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $X_1$ | *1* | *0* | $\frac{3}{20}$ | $-\frac{1}{30}$ | *0* | $\frac{12}{5}$ |
| $X_2$ | *0* | *1* | $-\frac{1}{10}$ | $\frac{2}{15}$ | *0* | $\frac{52}{5}$ |
| $S_3$ | *0* | *0* | $-\frac{3}{5}$ | $-\frac{8}{15}$ | *1* | $\frac{72}{5}$ |
| $\Delta Z$ | *0* | *0* | -9 | $-\frac{14}{3}$ | *0* | -864 |

نلاحظ أن كل معاملات سطر الدالة الاقتصادية أصبحت سالبة أو معدومة. وبالتالي فإن هذا الجدول هو جدول الحل الأمثل. وتكون النتائج:

$$X_1 = \frac{12}{5} = 2{,}4 \ ; \ X_2 = \frac{52}{5} = 10{,}4 \ ; \ S_3 = \frac{72}{5} = 14{,}4$$

أما بقية المتغيرات فهي معدومة. كما نلاحظ أن قيمة الدالة الاقتصادية قد تحسنت وانتقلت قيمتها من 500 إلى 864. ويمكن إثبات ذلك بالتعويض في دالة الهدف:

$$Z = 100X_1 + 60X_2 = 100 \times 2{,}4 + 60 \times 10{,}4 = 864$$

وبالتالي فإن قيم المتغيرات التي تجعل الدالة الاقتصادية في أعظم قيمة لها هي:

$$X_1 = 2{,}4 \ ; \ X_2 = 10{,}4$$

كما أن النتائج تحقق القيدين الأول والثاني تماما، أما القيد الثالث فيحتوي على طاقة غير مستعملة قيمتها 14,4 تعبر عنها متغيرة الفجوة $S_3 = 14{,}4$. كما يمكن إثبات ذلك من خلال التعويض في القيود:

القيد الأول (محقق تماما): $8X_1 + 2X_2 \leq 40 => \ 8 \times 2{,}4 + 2 \times 10{,}4 = 40$

القيد الثاني (محقق تماما): $6X_1 + 9X_2 \leq 108 \ => 6 \times 2{,}4 + 9 \times 10{,}4 = 108$

القيد الثالث (غير محقق تماما):

$8X_1 + 6X_2 \leq 96 => 8 \times 2{,}4 + 6 \times 10{,}4 = 81{,}6$ طاقة عاطلة بقيمة 14,4

ونجد أن القيمة العظمى للدالة الاقتصادية المتحصل عليها (864) هي نفس القيمة المتحصل عليها باستخدام الطريقة البيانية.

**3-2-2- حالة التدنئة:** لإيجاد الحل باستخدام طريقة السيمبليكس يتم اتباع الخطوات التالية:

**أولا-** تحويل البرنامج الخطي من شكله العام إلى الصيغة النموذجية بتحويل القيود من متراجحات إلى معادلات بطرح متغيرات الفجوة $S_j$ من الطرف الأيسر لتحقيق المساواة(إزالة الفائض)، كما يستلزم إضافة متغيرات اصطناعية $M_j$ ، مما يحقق إمكانية البدء في حل ممكن موجب. كما ينبغي أيضا إدخال كلا من متغيرات الفجوة بمعامل يساوي 0، والمتغيرات الاصطناعية بمعامل $k$ يأخذ قيمة كبيرة موجبة على دالة الهدف.

وتسمى مصفوفة معاملات القيود المتحصل عليها بعد إضافة متغيرات الفجوة والمتغيرات الاصطناعية بمصفوفة الحل الأساسي الأول.

**ثانيا-** ترتيب البيانات في جدول هو الجدول 1، ويسمى جدول الحل الأساسي الأول. تكون فيه متغيرات الفجوة كمتغيرات أساس رئيسية في حالة ما إذا كانت معاملاتها (+1) ، أو تكون فيه المتغيرات الاصطناعية هي متغيرات أساس وهي الحالة الأكثر مصادفة. أما المتغيرات الحقيقية فنعتبرها متغيرات خارج الأساس قيمها معدومة في الجدول الأول. وتكون أيضا قيمة دالة الهدف معدومة. وينبغي إجراء تحويلات عليها لإخراج المتغيرات الاصطناعية منها. وذلك باستخراج قيم المتغيرات الاصطناعية من معادلات القيود وتعويضها في دالة الهدف.

مثال: كون جدول الحل الأساسي الأول للبرنامج الخطي التالي:

$$Min: Z = 80X_1 + 100X_2$$

$$s/c \begin{cases} 8X_1 + 6X_2 \geq 24 \\ 10X_1 + 4X_2 \geq 20 \\ 6X_1 + 12X_2 \geq 24 \\ X_j \geq 0\ ;\ /\ \ j = 1,2 \end{cases}$$

الحل:

1) إيجاد الصيغة النموذجية:

القيد الأول: $8X_1 + 6X_2 \geq 24 \quad => \quad 8X_1 + 6X_2 - S_1 + M_1 = 24$

القيد الثاني: $10X_1 + 4X_2 \geq 20 \quad => \quad 10X_1 + 4X_2 - S_2 + M_2 = 20$

القيد الثالث: $6X_1 + 12X_2 \geq 24 \quad => \quad 6X_1 + 12X_2 - S_3 + M_3 = 24$

أما دالة الهدف فتصبح:

$$Min: Z = 80X_1 + 100X_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 + kM_1 + kM_2 + kM_3$$

وبالتالي:

$$Min: Z = 80X_1 + 100X_2 + kM_1 + kM_2 + kM_3$$

وتسمى بالصيغة النموذجية للبرنامج.

$$s/c \begin{cases} 8X_1 + 6X_2 - S_1 + M_1 = 24 \\ 10X_1 + 4X_2 - S_2 + M_2 = 20 \\ 6X_1 + 12X_2 - S_3 + M_3 = 24 \\ X_j \geq 0 \,;\; S_j \geq 0 \,;\; M_j \geq 0 \quad / \quad j = 1,2 \end{cases}$$

أما مصفوفة المعاملات فتصبح:

وتسمى مصفوفة الحل الأساسي الأول.

$$\begin{array}{cccccccc} X_1 & X_2 & S_1 & S_2 & S_3 & M_1 & M_2 & M_3 \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 8 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 9 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 8 & 6 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2) تحويلات دالة الهدف: نستخرج قيم المتغيرات الاصطناعية من معادلات القيود وتعويضها في دالة الهدف نجد:

$$\begin{aligned} 8X_1 + 6X_2 - S_1 + M_1 = 24 \quad &=> \quad M_1 = 24 - 8X_1 - 6X_2 + S_1 \\ 10X_1 + 4X_2 - S_2 + M_2 = 20 \quad &=> \quad M_2 = 20 - 10X_1 - 4X_2 + S_2 \\ 6X_1 + 12X_2 - S_3 + M_3 = 24 \quad &=> \quad M_3 = 24 - 6X_1 - 12X_2 + S_3 \end{aligned}$$

بالتعويض في دالة الهدف نجد:

$$Min: Z = 80X_1 + 100X_2 + k(24 - 8X_1 - 6X_2 + S_1) + k(20 - 10X_1 - 4X_2 + S_2) + k(24 - 6X_1 - 12X_2 + S_3)$$

$$<=> Min: Z = 80X_1 + 100X_2 + 24k - 8kX_1 - 6kX_2 + kS_1 + 20k - 10kX_1 - 4kX_2 + kS_2 + 24k - 6kX_1 - 12kX_2 + kS_3$$

$$<=> Min: Z = 80X_1 + 100X_2 + 68k - 24kX_1 - 22kX_2 + kS_1 + kS_2 + kS_3$$

$$<=> Min: Z = (80 - 24k)X_1 + (100 - 22k)X_2 + kS_1 + kS_2 + kS_3 + 68k$$

بجعل دالة الهدف معدومة ، نقطة الانطلاق في إيجاد الحل نجد:

$$Min: Z = 0 \;\; => \;\; (80 - 24k)X_1 + (100 - 22k)X_2 + kS_1 + kS_2 + kS_3 = -68k$$

3) إنشاء جدول الحل الأساسي الأول:

وبالتالي يكون جدول الحل الأساسي الأول كما يلي:

**جدول الحل الأساسي رقم _1_**

| | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | $M_1$ | $M_2$ | $M_3$ | $B$ | % |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $M_1$ | 8 | 6 | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 24 | 3 |
| $M_2$ | 10 | 4 | 0 | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 20 | 2 |
| $M_3$ | 6 | 12 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 1 | 24 | 4 |
| ΔZ | 80-24k | 100-22k | k | k | k | 0 | 0 | 0 | -68k | |

ثالثا– تحسين دالة الهدف(تحسين الحل): انطلاقا من جدول الحل الأساسي الأول نقوم بإعداد جدول الحل الأساسي رقم 2 (الجدول الثاني)، وذلك باختيار المتغيرة التي تدخل الأساس والمتغيرة التي تخرج من الأساس.

- المتغيرة التي تدخل الأساس هي التي يكون لها أصغر معامل سالب في سطر الدالة الاقتصادية ($\Delta Z$). أي أكبر معامل لـ: $k$ بالقيمة المطلقة (يحدد بذلك عمود عنصر الارتكاز أو العمود الأمثل Pivot colone)؛
- أما المتغيرة التي تخرج من الأساس فهي المقابلة لأصغر نسبة موجبة ناتجة عن تقسيم عمود الثوابت على عمود عنصر الارتكاز.(يحدد بذلك سطر عنصر الارتكاز *Pivot ligne*)؛
- عنصر الارتكاز هو العنصر الذي يتقاطع عنده عمود عنصر الارتكاز مع سطر عنصر الارتكاز.

ويتم إعداد الجدول الثاني بنفس الخطوات المتبعة في حالة التعظيم. وتستمر عملية التحسين بإنشاء جدول آخر بالرجوع إلى الخطوة الثالثة ، إلى أن تصبح كل معاملات سطر الدالة الاقتصادية موجبة أو معدومة. حينئذ نكون أمام جدول الحل الأمثل، تكون فيه قيم المتغيرات الداخلة في الأساس

تساوي القيم الجديدة الناتجة في عمود الثوابت على وجه التقابل، وبقية المتغيرات خارج الأساس تكون معدومة. أما قيمة الدالة الاقتصادية فهي عبارة عن القيمة المطلقة لآخر قيمة في عمود الثوابت.

مثال: بالرجوع إلى المثال السابق المطلوب إعداد الجدول الثاني.

- المتغيرة التي تدخل الأساس هي$X_1$ المقابلة لأصغر معامل سالب في سطر الدالة الاقتصادية ($80-24k$) ، تحدد بذلك عمود عنصر الارتكاز؛
- المتغيرة التي تخرج من الأساس $M_2$ المقابلة لأصغر نسبة موجبة من بين النسب الناتجة عن تقسيم عمود الثوابت على عمود عنصر الارتكاز (2) تحدد بذلك سطر عنصر الارتكاز؛
- عنصر الارتكاز هو القيمة التي تقاطع عندها عمود عنصر الارتكاز مع سطر عنصر الارتكاز، أي القيمة(10)؛

ونجري التحويلات التالية للحصول على جدول الحل الأساسي الثاني:

- تحويل عمود عنصر الارتكاز إلى عمود أحادي بجعل قيمة عنصر الارتكاز 1 وبقية عناصر العمود معدومة؛
- تقسيم عناصر سطر الارتكاز على قيمة عنصر الارتكاز؛
- بقية عناصر الجدول تحسب بطريقة المستطيلات؛

ونحصل على الجدول التالي:

**جدول الحل الأساسي رقم (2)**

| | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | $M_1$ | $M_2$ | $M_3$ | B | % |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $M_1$ | 0 | $\frac{14}{5}$ | -1 | $\frac{4}{5}$ | 0 | 1 | / | 0 | 8 | 2,86 |
| $X_1$ | 1 | $\frac{2}{5}$ | 0 | $-\frac{1}{10}$ | 0 | 0 | / | 0 | 2 | 5 |
| $M_3$ | 0 | $\frac{48}{5}$ | 0 | $\frac{3}{5}$ | -1 | 0 | / | 1 | 12 | 1,25 |
| ΔZ | 0 | $\frac{340-62k}{5}$ | $k$ | $\frac{40-7k}{5}$ | $k$ | 0 | / | 0 | -160-20k | |

**ملاحظة:**

- تبقى أعمدة المتغيرات الداخلة في الأساس أحادية دوما؛
- المتغيرة الاصطناعية إذا خرجت من الأساس لن تعود إليه أبدا؛

لكن نلاحظ أن هناك قيم سالبة في سطر الدالة الاقتصادية، وبالتالي الحل الأمثل لم يتحقق بعد، وينبغي إجراء خطوة أخرى لتحسينه. بإعداد الجدول رقم 3

- المتغيرة التي تدخل الأساس هي$X_2$ ؛
- المتغيرة التي تخرج من الأساس $M_3$ ؛
- عنصر الارتكاز هو القيمة $(\frac{48}{5})$؛

ونجري التحويلات للحصول على جدول الحل الأساسي الثالث.

**جدول الحل الأساسي رقم 3**

| | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | $M_1$ | $M_2$ | $M_3$ | B | % |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $M_1$ | 0 | 0 | -1 | $\frac{5}{8}$ | $\frac{7}{24}$ | 1 | / | / | $\frac{9}{2}$ | 7,2 |
| $X_1$ | 1 | 0 | 0 | $-\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{24}$ | 0 | / | / | $\frac{3}{2}$ | -12 |
| $X_2$ | 0 | 1 | 0 | $\frac{1}{16}$ | $-\frac{5}{48}$ | 0 | / | / | $\frac{5}{4}$ | 20 |
| ΔZ | 0 | 0 | $k$ | $\frac{30-5k}{8}$ | $\frac{170-7k}{8}$ | 0 | / | / | $\frac{-490-9k}{2}$ | |

وبنفس الطريقة نقوم بإعداد جدول الحل الأساسي رقم 4.

**جدول الحل الأساسي رقم 4(جدول الحل الأمثل)**

| | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | $M_1$ | $M_2$ | $M_3$ | $B$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $S_2$ | 0 | 0 | $-\frac{8}{5}$ | 1 | $\frac{7}{15}$ | / | / | / | $\frac{36}{5}$ |
| $X_1$ | 1 | 0 | $-\frac{1}{5}$ | 0 | $\frac{1}{10}$ | / | / | / | $\frac{12}{5}$ |
| $X_2$ | 0 | 1 | $\frac{1}{10}$ | 0 | $-\frac{2}{15}$ | / | / | / | $\frac{4}{5}$ |
| $\Delta Z$ | 0 | 0 | 6 | 0 | $\frac{16}{3}$ | / | / | / | $-272$ |

بما أن معاملات سطر دالة الهدف أصبحت موجبة أو معدومة، فنكون بذلك قد تحصلنا على جدول الحل الأمثل. وبالتالي تكون قيم المتغيرات التي تحقق أدنى قيمة للدالة الاقتصادية هي: $X_2 = \frac{4}{5}$ ; $X_1 = \frac{12}{5}$ . أما أدنى قيمة للدالة الاقتصادية فهي *Z=272*. ويمكن التحقق من القيود كما يلي:

القيد الأول: $8X_1 + 6X_2 = 8 \times \frac{12}{5} + 6 \times \frac{4}{5} = \frac{120}{5} = 24$ محقق

القيد الثاني: $10X_1 + 4X_2 = 10 \times \frac{12}{5} + 4 \times \frac{4}{5} = \frac{136}{5} = 20 + \frac{36}{5}$ وجود فائض

القيد الثالث: $6X_1 + 12X_2 = 6 \times \frac{12}{5} + 12 \times \frac{4}{5} = \frac{120}{5} = 24$ محقق

أما الدالة الاقتصادية:

$$Min: Z = 80X_1 + 100X_2 = 80 \times \frac{12}{5} + 100 \times \frac{4}{5} = \frac{960 + 400}{5} = \frac{1360}{5} = 272$$

## الفصل الثالث: حل البرنامج الخطي العام باستخدام طريقة السيمبليكس (طريقة الجداول)

### 3-3- حالات خاصة في البرمجة الخطية:

**الحالة الأولى: عدم توفر شرط عدم السالبية للمتغيرات:** يمكن أن تكون بعض المتغيرات في البرنامج الأولي غير متقيدة بشرط عدم السالبية، غير أن الحل باستخدام طريقة السيمبليكس يشترط عدم سالبية كل المتغيرات. لذلك يجب التحايل رياضيا بإدخال إلى البرنامج متغيرات كلها غير سالبة كما يلي:

**أ- إذا كان أحد المتغيرات أقل من أو يساوي الصفر $\left(X_j \le 0\right)$** : في هذه الحالة يتم إجراء تعديل على البرنامج بفرض أن:

$$X_j = -X_j' \quad => \quad X_j' \ge 0$$

ثم نعوض بالمتغير المرافق في البرنامج الأولي ثم نتبع خطوات الحل حسب طريقة السيمبليكس للوصول إلى الحل الأمثل، ثم نعيد المتغير المرافق إلى أصله وفق التحويل الأولي.

**مثال:** باستخدام طريقة الجداول حل البرنامج الخطي التالي:

$$Max: Z = 3X_1 + 3X_2$$
$$s/c \begin{cases} 5X_1 + 6X_2 \le 10 \\ 2X_1 + 2X_2 \le 14 \\ X_1 \ge 0\,, X_2 \le 0 \end{cases}$$

بما أن $X_2$ سالب فإننا نضع: $X_2 = -X_2'$ ، ثم نعوضه في البرنامج لنجد:

$$Max: Z = 3X_1 - 3X_2'$$
$$s/c \begin{cases} 5X_1 - 6X_2' \le 10 \\ 2X_1 - 2X_2' \le 14 \\ X_1 \ge 0\,, X_2' \ge 0 \end{cases}$$

الصيغة النموذجية:

$$Max: Z = 3X_1 - 3X_2' + 0S_1 + 0S_2$$
$$s/c \begin{cases} 5X_1 - 6X_2' + S_1 = 10 \\ 2X_1 - 2X_2' + S_2 = 14 \\ X_1 \ge 0\,, X_2' \ge 0, S_1 \ge 0, S_2 \ge 0 \end{cases}$$

وعليه جدول الحل الأساسي رقم 1 هو:

| | $X_1$ | $X_2'$ | $S_1$ | $S_2$ | B | النسبة |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $S_1$ | 5 | -6 | 1 | 0 | 10 | 2 |
| $S_2$ | 2 | -2 | 0 | 1 | 14 | 7 |
| $\Delta Z$ | 3 | -3 | 0 | 0 | 0 | / |

**الجدول رقم 2:**

| | $X_1$ | $X_2'$ | $S_1$ | $S_2$ | B | النسبة |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $X_1$ | 1 | $-\frac{6}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | 0 | 2 | $-\frac{5}{3}$ |
| $S_2$ | 0 | $\frac{2}{5}$ | $-\frac{2}{5}$ | 1 | 10 | 25 |
| $\Delta Z$ | 0 | $\frac{3}{5}$ | $-\frac{3}{5}$ | 0 | -6 | / |

**الجدول رقم 3(الحل الأمثل):**

| | $X_1$ | $X_2'$ | $S_1$ | $S_2$ | B |
|---|---|---|---|---|---|
| $X_1$ | 1 | 0 | $-1$ | 3 | 32 |
| $X_2'$ | 0 | 1 | $-1$ | $\frac{5}{2}$ | 25 |
| $\Delta Z$ | 0 | 0 | 0 | $-\frac{3}{2}$ | -21 |

بما أن معاملات سطر الدالة الاقتصادية سالبة أو معدومة، فإن الجدول رقم 3 هو جدول الحل الأمثل. وعليه:

$$X_1 = 32;\ X_2' = 25\ ;\ S_1 = 0\ ;\ S_2 = 0\ ; Z = 21$$

ومنه قيمة $X_2 = -X_2' = -25$ إذا الحل الأمثل هو: $X_1 = 32\ ;\ X_2 = -25$

$$Z = 3 \times 32 + 3 \times (-25) = 96 - 75 = 21$$

ب- **إذا كان أحد المتغيرات حرا:** أي يمكن أن يأخذ أي قيمة في الاتجاه السالب أو الموجب. أي: $X_j \in ]-\infty, +\infty[$ ، في هذه نجري التعديل التالي على البرنامج. حيث نفترض أن:

$$X_j = X_j' - X_j'' \text{ مع } X_j' \geq 0\ ;\ X_j'' \geq 0$$

ثم نعوض في البرنامج الأولي ، ثم نوجد الحل الأمثل، ثم إيجاد قيمة المتغير الأصلي وفق التحويل السابق.

# الفصل الثالث: حل البرنامج الخطي العام باستخدام طريقة السيمبليكس (طريقة الجداول)

**مثال:** حل البرنامج الخطي التالي باستخدام طريقة السيمبليكس:

$$Max: Z = 3X_1 + 10X_2$$
$$s/c \begin{cases} 5X_1 + 6X_2 \leq 10 \\ 2X_1 + 7X_2 \leq 14 \\ X_1 \geq 0 \,, \forall\, X_2 \in R \end{cases}$$

نلاحظ أن $X_2$ متغيرا حرا يمكن أن يأخذ أي قيمة مهما كانت سالبة أو موجبة. لذلك يمكن كتابته كما يلي:

$$X_2 = X_2' - X_2'' \;\; / \;\; X_2' \geq 0 \;\; ; \;\; X_2'' \geq 0$$

بالتعويض في البرنامج نجد:

$$Max: Z = 3X_1 + 10(X_2' - X_2'')$$
$$s/c \begin{cases} 5X_1 + 6(X_2' - X_2'') \leq 10 \\ 2X_1 + 7(X_2' - X_2'') \leq 14 \\ X_1 \geq 0 \,, X_2' \geq 0, X_2'' \geq 0 \end{cases}$$

$$<=>$$

$$Max: Z = 3X_1 + 10X_2' - 10X_2''$$
$$s/c \begin{cases} 5X_1 + 6X_2' - 6X_2'' \leq 10 \\ 2X_1 + 7X_2' - 7X_2'' \leq 14 \\ X_1 \geq 0 \,, X_2' \geq 0, X_2'' \geq 0 \end{cases}$$

وبإدخال متغيرات الفجوة نحصل على الصيغة النموذجية:

$$Max: Z = 3X_1 + 10X_2' - 10X_2'' + 0S_1 + 0S_2$$
$$s/c \begin{cases} 5X_1 + 6X_2' - 6X_2'' + S_1 \leq 10 \\ 2X_1 + 7X_2' - 7X_2'' + S_2 \leq 14 \\ X_1 \geq 0 \,, X_2' \geq 0, X_2'' \geq 0, S_1 \geq 0, S_2 \geq 0 \end{cases}$$

**جدول الحل الأساسي رقم 1:**

| | $X_1$ | $X_2'$ | $X_2''$ | $S_1$ | $S_2$ | B | النسبة |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $S_1$ | 5 | 6 | -6 | 1 | 0 | 10 | 1,67 |
| $S_2$ | 2 | 7 | -7 | 0 | 1 | 14 | 2 |
| $\Delta Z$ | 3 | 10 | -10 | 0 | 0 | 0 | / |

**جدول الحل الأساسي رقم 2(الحل الأمثل):**

| | $X_1$ | $X_2'$ | $X_2''$ | $S_1$ | $S_2$ | B |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $X_2'$ | $\frac{5}{6}$ | 1 | -1 | $\frac{1}{6}$ | 0 | $\frac{5}{3}$ |
| $S_2$ | $-\frac{23}{6}$ | 0 | 0 | $-\frac{7}{6}$ | 1 | $\frac{7}{3}$ |
| $\Delta Z$ | $-\frac{16}{3}$ | 0 | 0 | $-\frac{5}{3}$ | 0 | $-\frac{50}{3}$ |

بما أن معاملات سطر الدالة الاقتصادية سالبة أو معدومة، فإن الجدول رقم 2 هو جدول الحل الأمثل. وعليه:

$$X_1 = 0;\ X_2' = \frac{5}{3}\ ; X_2'' = 0;\ S_1 = 0\ ;\ S_2 = \frac{7}{3}\ ; Z = \frac{50}{3}$$

وبالتالي: $X_2 = X_2' - X_2'' = \frac{5}{3} - 0 = \frac{5}{3}$

**الحالة الثانية:** في هذه الحالة نصل إلى جدول فيه جميع معاملات دالة الهدف أصغر من أو تساوي الصفر في حالة التعظيم، أو أكبر أو تساوي الصفر في حالة التدنئة. لكن عمود الأساس يتضمن متغيرا اصطناعيا واحدا أو أكثر ، مما يعني أن هناك خطأ في تركيب البرنامج.

**الحالة الثالثة:** عدم محدودية الحل: هي الحالة التي تكون فيها جميع عناصر عمود عنصر الارتكاز أقل أو تساوي الصفر، حيث يستحيل اختيار المتغيرة التي تخرج من الأساس.

**الحالة الرابعة:** حالة الإحلال: عندما نجد متغيرتين على الأقل مرشحتين للدخول إلى الأساس، أو متغيرتين على الأقل مرشحتين للخروج من الأساس. ومن ثم نختار واحدة لا على التعيين.

**مثال:** إليك البرنامج الخطي التالي:

$$Min: Z = 10X_1 + 30X_2$$

$$s/c \begin{cases} 3X_1 + 2X_2 \geq 6 \\ 6X_1 + X_2 \geq 6 \\ X_2 \geq 2 \\ X_1 \geq 0\ , X_2 \geq 0 \end{cases}$$

الحل:

1- إيجاد الصيغة النموذجية:

## الفصل الثالث: حل البرنامج الخطي العام باستخدام طريقة السيمبليكس (طريقة الجداول)

القيد الأول: $3X_1 + 2X_2 \geq 6 \quad => \quad 3X_1 + 2X_2 - S_1 + M_1 = 6$

القيد الثاني: $6X_1 + X_2 \geq 6 \quad => \quad 6X_1 + X_2 - S_2 + M_2 = 6$

القيد الثالث: $X_2 \geq 2 \quad => \quad X_2 - S_3 + M_3 = 2$

أما دالة الهدف فتصبح:

$$Min: Z = 10X_1 + 30X_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 + kM_1 + kM_2 + kM_3$$

وبالتالي الصيغة النموذجية هي:

$$Min: Z = 10X_1 + 30X_2 + kM_1 + kM_2 + kM_3$$

$$s/c \begin{cases} 3X_1 + 2X_2 - S_1 + M_1 \qquad = 6 \\ 6X_1 + X_2 \quad - S_2 + \quad M_2 = 6 \\ X_2 \qquad - S_3 + M_3 = 2 \\ X_j \geq 0\ ;\ S_j \geq 0\ ;\ M_j \geq 0 \quad / \quad j = 1,2 \end{cases}$$

أما مصفوفة المعاملات:

$$\begin{array}{cccccccc} X_1 & X_2 & S_1 & S_2 & S_3 & M_1 & M_2 & M_3 \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2- تحويلات دالة الهدف: لدينا:

$$\begin{aligned} 3X_1 + 2X_2 - S_1 + M_1 = 6 \quad &=> \quad M_1 = 6 - 3X_1 - 2X_2 + S_1 \\ 6X_1 + X_2 - S_2 + M_2 = 6 \quad &=> \quad M_2 = 6 - 6X_1 - X_2 + S_2 \\ X_2 - S_3 + M_3 = 2 \quad &=> M_3 = \quad 2 - X_2 + S_3 \end{aligned}$$

بالتعويض في دالة الهدف نجد:

$$Min: Z = 10X_1 + 30X_2 + k(6 - 3X_1 - 2X_2 + S_1) + k(6 - 6X_1 - X_2 + S_2) + k(2 - X_2 + S_3)$$

$$<=> \ Min: Z = 10X_1 + 30X_2 + 6k - 3kX_1 - 2kX_2 + kS_1 + 6k - 6kX_1 - 1kX_2 + kS_2 + 2k - kX_2 + kS_3$$

$$<=> \ Min: Z = 10X_1 + 30X_2 + 14k - 9kX_1 - 4kX_2 + kS_1 + kS_2 + kS_3$$

$$<=> \ Min: Z = (10 - 9k)X_1 + (30 - 4k)X_2 + kS_1 + kS_2 + kS_3 + 14k$$

بجعل دالة الهدف معدومة نجد:

$$Min: Z = 0 \quad => \quad (10 - 9k)X_1 + (30 - 4k)X_2 + kS_1 + kS_2 + kS_3 = -14k$$

3- جدول الحل الأساسي الأول:

**جدول الحل الأساسي رقم _1_**

| | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | $M_1$ | $M_2$ | $M_3$ | $B$ | % |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $M_1$ | 3 | 2 | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 6 | 2 |
| $M_2$ | 6 | 1 | 0 | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 6 | 1 |
| $M_3$ | 0 | 1 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 1 | 2 | $+\infty$ |
| $\Delta Z$ | 10-9k | 30-4k | k | K | k | 0 | 0 | 0 | -14k | |

4- تحسين دالة الهدف(تحسين الحل): انطلاقا من جدول الحل الأساسي الأول نقوم بإعداد جدول الحل الأساسي رقم 2 (الجدول الثاني)،

**جدول الحل الأساسي رقم (2)**

| | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | $M_1$ | $M_2$ | $M_3$ | $B$ | % |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $M_1$ | 0 | $\frac{3}{2}$ | -1 | $\frac{1}{2}$ | 0 | 1 | / | 0 | 3 | 2 |
| $X_1$ | 1 | $\frac{1}{6}$ | 0 | $-\frac{1}{6}$ | 0 | 0 | / | 0 | 1 | 6 |
| $M_3$ | 0 | 1 | 0 | 0 | -1 | 0 | / | 1 | 2 | 2 |
| $\Delta Z$ | 0 | $\frac{170-15k}{6}$ | k | $\frac{10-3k}{6}$ | k | 0 | / | 0 | -10-5k | |

**ملاحظة:** نلاحظ أن المتغيرتين $M_1$ ، و$M_3$ لهما نفس النسبة فهما مرشحتين للخروج من الأساس نختار واحدة منهما لا على التعيين، ولتكن مثلا $M_1$ . ونقوم بإعداد الجدول رقم 3.

**جدول الحل الأساسي رقم 3**

| | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | $M_1$ | $M_2$ | $M_3$ | $B$ | % |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $X_2$ | 0 | 1 | $-\frac{2}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | 0 | / | / | 0 | 2 | $-\frac{1}{3}$ |
| $X_1$ | 1 | 0 | $\frac{1}{9}$ | $-\frac{2}{9}$ | 0 | / | / | 0 | $\frac{2}{3}$ | 6 |
| $M_3$ | 0 | 0 | $\frac{2}{3}$ | $-\frac{1}{3}$ | -1 | / | / | 1 | 0 | 0 |
| $\Delta Z$ | 0 | 0 | $\frac{170-6k}{9}$ | $\frac{3k-70}{9}$ | $k$ | / | / | 0 | $\frac{-200}{3}$ | |

بما أننا لم نصل إلى الحل الأمثل نقوم بإعداد جدول الحل الأساسي رقم 4.

**جدول الحل الأساسي رقم 4(جدول الحل الأمثل)**

| | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | $M_1$ | $M_2$ | $M_3$ | $B$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $X_2$ | 0 | 1 | 0 | 0 | $-1$ | / | / | / | 2 |
| $X_1$ | 1 | 0 | 0 | $-\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | / | / | / | $\frac{2}{3}$ |
| $S_1$ | 0 | 0 | 1 | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{3}{2}$ | / | / | / | 0 |
| $\Delta Z$ | 0 | 0 | 0 | $\frac{5}{3}$ | $\frac{85}{3}$ | / | / | / | $\frac{-200}{3}$ |

بما أن معاملات سطر دالة الهدف أصبحت موجبة أو معدومة، فالجدول رقم 4 هو جدول الحل الأمثل. وبالتالي تكون قيم المتغيرات التي تحقق أدنى قيمة للدالة الاقتصادية هي:

$X_1 = \frac{2}{3}$ ; $X_2 = 2$ . أما أدنى قيمة للدالة الاقتصادية فهي $Z = \frac{200}{3}$.

**الحالة الخامسة:** أن يكون البرنامج مختلط أي قيود البرنامج مختلطة.

# الفصل الرابع:
# الثنائية أو البرنامج المرافق DUaL وتحليل الحساسية

## الفصل الرابع: الثنائية أو البرنامج المرافق DUaL وتحليل الحساسية

لكل برنامج خطي مرتبط بالمتغيرات $(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n)$ برنامج ثنائي مرتبط بالمتغيرات $(Y_1, Y_2, Y_3, \dots, Y_m)$ مشتق منه معرف حسب الحالة كما يلي:

**4-1- ثنائية الصيغ القانونية:** إذا كان البرنامج الأولي بالشكل المصفوفي في صيغته القانونية التالية:

$$Max: Z = C'X$$

$$s/c\begin{cases} AX \le B \\ X \ge 0 \end{cases}$$

فإن برنامج الثنائية يكتب كما يلي:

$$Min: Z = B'Y$$

$$s/c\begin{cases} A'Y \ge C \\ Y \ge 0 \end{cases}$$

أي أنه لإيجاد البرنامج الثنائي لأي برنامج أولي في صيغته القانونية نتبع الخطوات التالية[1]:

1- نقلب صيغة دالة الهدف، إذا كانت الصيغة في البرنامج الأولي هي *Min* فإنها تتحول إلى *Max* في البرنامج الثنائي والعكس؛
2- تتعاكس المتراجحات بحيث أقل من أو تساوي في حالة *Max* تتحول إلى أكبر من أو تساوي. وأكبر من أو تساوي في حالة *Min* تتحول إلى أقل من أو تساوي؛
3- عدد متغيرات البرنامج الأولي يساوي عدد قيود البرنامج الثنائي، وعدد قيود البرنامج الأولي يساوي عدد متغيرات البرنامج الثنائي؛
4- عمود الثوابت في البرنامج الأولي يتحول إلى معاملات لمتغيرات دالة الهدف في البرنامج الثنائي؛
5- تتحول معاملات دالة الهدف في البرنامج الأولي إلى عمود الثوابت في البرنامج الثنائي؛
6- معاملات كل متغيرة في قيود البرنامج الأولي حسب ترتيب القيود تتحول إلى معاملات متغيرات قيود البرنامج الثنائي حسب نفس الترتيب؛
7- قيد عدم السالبية في كلا البرنامجين.

---
[1] - محمد راتوال، مرجع سبق ذكره ، ص ص 81-82.

# الفصل الرابع: الثنائية أو البرنامج المرافق DUaL وتحليل الحساسية

**مثال:** ليكن لديك البرنامج الخطي الأولي التالي:

البرنامج الثنائي يكون:

$$Max: Z = 5X_1 + 3X_2$$

$$s/c\begin{cases}3X_1 + 5X_2 \leq 15\\5X_1 + 2X_2 \leq 10\\X_1 \geq 0\ \ ,X_2 \geq 0\end{cases}$$

$$Min: Z = 15Y_1 + 10Y_2$$

$$s/c\begin{cases}3Y_1 + 5Y_2 \geq 5\\5Y_1 + 2Y_2 \geq 3\\Y_1 \geq 0\ \ ,Y_2 \geq 0\end{cases}$$

8- في جدول الحل الأمثل تكون العلاقة بين متغيرات البرنامجين كما يلي:

| متغيرات الفجوة | المتغيرات الأساسية | البرنامج الأولي |
|---|---|---|
| $S_1\ \ S_2\ \ S_3\ \ ....\ S_m$ | $X_1\ \ X_2\ \ X_3\ \ ....\ X_n$ | |
| $Y_1\ \ Y_2\ \ Y_3\ \ ....\ Y_m$ | $S'_1\ \ S'_2\ \ S'_3\ \ ....\ S'_n$ | البرنامج الثنائي |
| المتغيرات الأساسية | متغيرات الفجوة | |

أي أن[1]:

- القيم المقابلة لمتغيرات الفجوة التي تظهر في السطر الأخير للبرنامج الأولي تساوي قيم المتغيرات الأساسية على وجه الترتيب للبرنامج الثنائي وبالقيمة المطلقة؛
- قيم متغيرات الفجوة في البرنامج الثنائي التي تظهر في السطر الأخير تساوي على وجه الترتيب قيم المتغيرات الرئيسية في البرنامج الأولي؛
- قيم المتغيرات الحقيقية في البرنامج الأولي والتي تظهر في عمود الثوابت تساوي القيم المقابلة لمتغيرات الفجوة للبرنامج الثنائي والتي تظهر في السطر الأخير من جدول الحل الأمثل. وقيم المتغيرات الحقيقية للبرنامج الثنائي والتي تظهر في عمود الثوابت تساوي القيم المقابلة لمتغيرات الفجوة للبرنامج الأولي والتي تظهر في السطر الأخير من جدول الحل الأمثل بالقيمة المطلقة؛
- قيمة الدالة الاقتصادية في الحل الأمثل للبرنامجين تكون متساوية.

**مثال:** بالرجوع إلى المثال السابق، أوجد جدول الحل الأمثل لكل من البرنامج الأولي والبرنامج الثنائي.

[1] - محمد راتوال، مرجع سبق ذكره ، ص ص 83-84.

**الحل:**

الصيغة النموذجية:

$$Max: Z = 5X_1 + 3X_2 \qquad s/c\begin{cases} 3X_1 + 5X_2 \le 15 \\ 5X_1 + 2X_2 \le 10 \\ X_1 \ge 0 \ , X_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$Max: Z = 5X_1 + 3X_2 + 0S_1 + 0S_2 \qquad s/c\begin{cases} 3X_1 + 5X_2 + S_1 = 15 \\ 5X_1 + 2X_2 + S_2 = 10 \\ X_1 , X_2 \ge 0 \ , S_1, S_2 \ge 0 \end{cases}$$

**جدول الحل الأساسي رقم 01**

| | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $S_2$ | B | % |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $S_1$ | 3 | 5 | 1 | 0 | 15 | 5 |
| $S_2$ | 5 | 2 | 0 | 1 | 10 | 2 |
| $\Delta Z$ | 5 | 3 | 0 | 0 | 0 | / |

**جدول الحل الأساسي رقم 02**

| | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $S_2$ | B | % |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $S_1$ | 0 | $\frac{19}{5}$ | 1 | $-\frac{3}{5}$ | 9 | $\frac{45}{19}$ |
| $X_1$ | 1 | $\frac{2}{5}$ | 0 | $\frac{1}{5}$ | 2 | 5 |
| $\Delta Z$ | 0 | 1 | 0 | -1 | -10 | / |

**جدول الحل الأساسي رقم 03**

| | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $S_2$ | B |
|---|---|---|---|---|---|
| $X_2$ | 0 | 1 | $\frac{5}{19}$ | $-\frac{3}{19}$ | $\frac{45}{19}$ |
| $X_1$ | 1 | 0 | $\frac{2}{19}$ | $\frac{5}{19}$ | $\frac{20}{19}$ |
| $\Delta Z$ | 0 | 0 | $-\frac{5}{19}$ | $-\frac{16}{19}$ | $-\frac{235}{19}$ |

إذن:

$$X_1 = \frac{20}{19} \ ; \ X_2 = \frac{45}{19} \ ; Z = \frac{235}{19}$$

البرنامج الثنائي:

الصيغة النموذجية:

$$Min: Z = 15Y_1 + 10Y_2 \qquad s/c\begin{cases} 3Y_1 + 5Y_2 \ge 5 \\ 5Y_1 + 2Y_2 \ge 3 \\ Y_1 \ge 0 \ , Y_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$Min: Z = 15Y_1 + 10Y_2 + 0S_1' + 0S_2' + kM_1' + kM_2' \qquad s/c\begin{cases} 3Y_1 + 5Y_2 - S_1' + M_1' = 5 \\ 5Y_1 + 2Y_2 - S_2' + M_2' = 3 \\ Y_1 , Y_2 \ge 0; \ S_1', S_2' \ge 0; \ M_1', M_2' \ge 0 \end{cases}$$

تحويلات دالة الهدف:

$$M_1' = 5 - 3Y_1 - 5Y_2 + S_1'$$
$$M_2' = 3 - 5Y_1 - 2Y_2 + S_2'$$

$$Min: Z = 15Y_1 + 10Y_2 + k(5 - 3Y_1 - 5Y_2 + S_1') + k(3 - 5Y_1 - 2Y_2 + S_2')$$
$$= (15 - 8k)Y_1 + (10 - 7k)Y_2 + kS_1' + kS_2' + 8k$$
$$Min: Z = 0 \ \ => (15 - 8k)Y_1 + (10 - 7k)Y_2 + kS_1' + kS_2' = -8k$$

**جدول الحل الأساسي رقم 1**

| | $Y_1$ | $Y_2$ | $S'_1$ | $S'_2$ | $M'_1$ | $M'_2$ | B | % |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $M'_1$ | 3 | 5 | -1 | 0 | 1 | 0 | 5 | $\frac{5}{3}$ |
| $M'_2$ | 5 | 2 | 0 | -1 | 0 | 1 | 3 | $\frac{3}{5}$ |
| $\Delta Z$ | 15-8k | 10-7k | k | k | 0 | 0 | -8k | / |

**جدول الحل الأساسي رقم 2**

| | $Y_1$ | $Y_2$ | $S'_1$ | $S'_2$ | $M'_1$ | $M'_2$ | B | % |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $M'_1$ | 0 | $\frac{19}{5}$ | -1 | $\frac{3}{5}$ | 1 | / | $\frac{16}{5}$ | $\frac{16}{19}$ |
| $Y_1$ | 1 | $\frac{2}{5}$ | 0 | $-\frac{1}{5}$ | 0 | / | $\frac{3}{5}$ | $\frac{3}{2}$ |
| $\Delta Z$ | 0 | $\frac{20-19k}{5}$ | k | $\frac{15-3k}{5}$ | 0 | / | $\frac{-45-16k}{5}$ | / |

**جدول الحل الأساسي رقم 3**

| | $Y_1$ | $Y_2$ | $S'_1$ | $S'_2$ | $M'_1$ | $M'_2$ | B |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Y_2$ | 0 | 1 | $-\frac{5}{19}$ | $\frac{3}{19}$ | / | / | $\frac{16}{19}$ |
| $Y_1$ | 1 | 0 | $\frac{2}{19}$ | $-\frac{5}{19}$ | / | / | $\frac{5}{19}$ |
| $\Delta Z$ | 0 | 0 | $\frac{20}{19}$ | $\frac{45}{19}$ | / | / | $-\frac{235}{19}$ |

وعليه:

$$Y_1 = \frac{5}{19}\ ;\ Y_2 = \frac{16}{19}\ ;Z = \frac{235}{19}$$

**المقارنة والاستنتاج:** من جدول الحل الأمثل للبرنامج الأولي وجدنا $X_1 = \frac{20}{19}$ ، وهي قيمة تقابل $S'_1$ بالقيمة المطلقة في السطر الأخير(سطر الدالة الاقتصادية) من جدول الحل الأمثل للبرنامج الثنائي.

و$X_2 = \frac{45}{19}$ تقابل $S'_2$ بالقيمة المطلقة في سطر الدالة الاقتصادية من جدول الحل الأمثل للبرنامج الثنائي وبقية المتغيرات معدومة؛

أما بالنسبة للسطر الأخير من جدول الحل الأمثل للبرنامج الأولي فإننا نجد:

- $S_1 = -\frac{5}{19}$ وهي قيمة $Y_1$ بالقيمة المطلقة في البرنامج الثنائي؛
- $S_2 = -\frac{16}{19}$ وهي قيمة $Y_2$ بالقيمة المطلقة في البرنامج الثنائي؛

**هذا التقابل يمكن توضيحه في الجدول التالي:**

| | | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $S_2$ | B | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **البرنامج الأولي** | $X_1$ | | | | | $\frac{20}{19}$ | $S'_1$ |
| | $X_2$ | | | | | $\frac{45}{19}$ | $S'_2$ |
| | $\Delta Z$ | | | $\frac{5}{19}$ | $\frac{16}{19}$ | $-\frac{235}{19}$ | **البرنامج الثنائي** |
| | | | | $Y_1$ | $Y_2$ | | |

أي أن جدول الحل الأمثل للبرنامج الأولي يتضمن جدول الحل الأمثل للبرنامج الثنائي والعكس.

**4-2- تحليل الحساسية Sensitivity Analysis (ما بعد الأمثلية Poste Optimale):** من النادر أن تكون معاملات برنامج خطي ما معروفة بصورة مؤكدة مسبقا. فغالبا ما تكون المعاملات تخمينية للقيم الحقيقية. لذلك عندما ننتهي من إيجاد الحل الأمثل لمسألة البرمجة الخطية ، لا بد أن ندرس حساسية هذا الحل لأي تغير في قيمة أحد معاملات المسألة المختلفة (ثوابت النموذج $C_j, b_i, Or\ a_{ij}$). فتأخذ هذه التغيرات الصور التالية[1]:

1- التغيرات في معاملات دالة الهدف $C_j$؛

2- التغيرات في الجانب الأيمن من القيود $b_i$؛

3- التغيرات في المعاملات الفنية للجانب الأيسر من القيود الهيكلية $a_{ij}$؛

4- إضافة متغيرات جديدة إلى المشكلة؛

5- إضافة قيود جديدة أو ثانوية للمشكلة.

وعلى وجه العموم تأخذ التغيرات أحد النتائج التالية:

1- الحل الأمثل يبقى دون تغيير وبالتالي المتغيرات الأساسية وقيمها تبقى دون تغيير ؛

2- تبقى نفس المتغيرات الأساسية لكن بقيم مختلفة؛

3- يتم تغيير الحل الأساسي.

[1] - لحسن عبد الله باشيوة ، بحوث العمليات ، دار اليازوري ، عمان الأردن، 2011، ص 156.

ومن المعلوم أن المؤسسات عموما ترغب دائما في إجراء بعض التغييرات على المعاملات المختلفة لأي مشكلة ما (نموذج البرمجة الخطية)، حيث يمكن معرفة أثر هذه التغييرات في المعاملات على الحل الأمثل عن طريق حل المسألة مرة أخرى، إلا أن هذا يتطلب إجراء حسابات كثيرة تتناسب طرديا مع عدد القيود والمتغيرات، و تحليل الحساسية هو الاسم المشتق من تحليل تغير الحل الأمثل وفقا لتغير المعاملات المختلفة، سواء كانت هذه المعاملات: مواد أولية، أيدي عاملة، تكاليف، أرباح ... إلخ.[1] ويقصد بتحليل الحساسية معرفة مدى تأثر الحل الأمثل بالتغيرات التي قد تطرأ على المعطيات التي تم إعداد البرنامج الخطي على أساسها[2].

**4-2-1- تأثير التغيرات في معاملات دالة الهدف $C_j$:** يمكن أن نميز حالتين لتحليل الحساسية للتغير في معاملات متغيرات دالة الهدف. إما معامل متغيرة خارج الأساس أو متغيرة داخلة في الأساس في جدول الحل الأمثل.

**4-2-1-1- تأثير التغير في معاملات المتغيرات خارج الأساس في دالة الهدف:** يتم التعرف هنا على درجة حساسية الحل الأمثل للبرنامج الخطي للتغيرات التي تحدث في المساهمة الحدية لمعاملات دالة الهدف $C_j$ للمتغيرات خارج الأساس. أي إلى أي حد يمكن أن تتغير هذه المعاملات دون أن يتغير جدول الحل الأمثل.

**مثال[3]:** ليكن لديك البرنامج الخطي التالي:

$$Max: Z = 20x_1 + 10x_2$$
$$s/c\begin{cases}5x_1 + 4x_2 \leq 24\\2x_1 + 5x_2 \leq 13\\x_1 \geq 0; x_2 \geq 0\end{cases}$$

الصيغة النموذجية

$$Max: Z = 20x_1 + 10x_2 + 0s_1 + 0s_2$$
$$s/c\begin{cases}5x_1 + 4x_2 + s_1 = 24\\2x_1 + 5x_2 + s_2 = 13\\x_1, x_2 \geq 0\ ;\ s_1, s_2 \geq 0\end{cases}$$

---

[1] سهيلة عبد الله سعيد، **الجديد في الأساليب الكمية وبحوث العمليات**، الطبعة الأولى ، دار الحامد للنشر والتوزيع، عمان، الأردن، 2007، ص 130.

[2] سالم إلياس، مطبوعة بعنوان: **محاضرات في مقياس رياضيات المؤسسة**، جامعة محمد بوضياف، المسيلة، 2016-2017، ص 22.

[3] - لحسن عبد الله باشيوة ، مرجع سبق ذكره ، ص 157.

**جدول الحل الأساسي رقم 01**

| | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $S_2$ | B | % |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $S_1$ | 5 | 4 | 1 | 0 | 24 | 4,8 |
| $S_2$ | 2 | 5 | 0 | 1 | 13 | 6,5 |
| $\Delta Z$ | 20 | 10 | 0 | 0 | 0 | / |

**جدول الحل الأساسي رقم 02 الحل الأمثل**

| | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $S_2$ | B |
|---|---|---|---|---|---|
| $X_1$ | 1 | $\frac{4}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | 0 | $\frac{24}{5}$ |
| $S_2$ | 0 | $\frac{17}{5}$ | $-\frac{2}{5}$ | 1 | $\frac{17}{5}$ |
| $\Delta Z$ | 0 | $-6$ | $-4$ | 0 | $-96$ |

وبالتالي حلول البرنامج: قيم المتغيرات : $x_1 = \frac{24}{5}$ ; $x_2 = 0$ ; $s_1 = 0$ ; $s_2 = \frac{17}{5}$

وقيمة دالة الهدف $Z = 96$. فالمتغيرين $x_2 = 0$ ; $s_1 = 0$ لأنهما خارج الأساس.

مثلا ماذا يحدث لو يتغير معامل $x_2$ بمقدار (موجب أو سالب) يساوي $\Delta C_2$ فيصبح $C'_2$ حيث أن: $C'_2 = C_2 + \Delta C_2$ أي: $C'_2 = 10 + \Delta C_2$.

نلاحظ أن معاملات دالة الهدف في السطر الأخير من جدول السيمبليكس تتحدد فقط بعمليات أولية على الصفوف. فالملاحظ أنه بانتقالنا من الجدول الأول إلى الثاني (جدول الحل الأمثل) أن معامل المتغيرة $x_2$ تغير من 10 إلى $-6$ (أي أضفنا $-16$). أي: $C'_2 = 10 + (-16) + \Delta C_2 = -6 + \Delta C_2$[1]، وبتعويض القيمة الجديدة في جدول الحل الأمثل نحصل على:

**جدول الحل الأساسي رقم 02 الحل الأمثل**

| | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $S_2$ | B |
|---|---|---|---|---|---|
| $X_1$ | 1 | $\frac{4}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | 0 | $\frac{24}{5}$ |
| $S_2$ | 0 | $\frac{17}{5}$ | $-\frac{2}{5}$ | 1 | $\frac{17}{5}$ |
| $\Delta Z$ | 0 | $-6+\Delta C_2$ | $-4$ | 0 | $-96$ |

إذا ما هي القيم الممكنة $\Delta C_2$ حتى لا يتأثر الحل الأمثل الحالي؟

حتى نحافظ على نفس جدول الحل الأمثل يجب أن يتحقق شرط الأمثلية لحالة التعظيم(جميع عوامل المتغيرات في سطر دالة الهدف سالبة أو معدومة). أي:

$$C'_2 \leq 0 \iff -6 + \Delta C_2 \leq 0 \Rightarrow \Delta C_2 \leq 6$$

وبالتالي:

$$-\infty \leq \Delta C_2 \leq 6 \iff -\infty \leq 10 + \Delta C_2 \leq 16 \iff -\infty \leq C'_2 \leq 16$$

[1] - لحسن عبد الله باشيوة ، مرجع سبق ذكره ، ص 160.

نلاحظ أنه عندما يكون $C'_2 = 16$، فإن معامل $x_2$ في سطر الدالة الاقتصادية من جدول الحل الأمثل يكون معدوما. وبما أن $x_2$ متغير غير أساسي عند نقطة الحل الأساسي الممكنة ، فإنه سيكون هناك حلول أساسية ممكنة مثلى أخرى للمسألة[1].

أي أن الحل المتوصل إليه يبقى أمثلا ما دام معامل المتغيرة $x_2$ أقل أو يساوي 16، أما إذا تعدى هذه القيمة فإنه لا يصبح حلا أمثلا. وعليه[2]:

- **إذا كان مقدار التغير أقل من 16:** تصبح في هذه الحالة قيمة $C'_2$ سالبة، ما يحقق معيار الأمثلية، و بالتالي يبقى الحل أمثلا.
- **إذا كان مقدار التغير مساويا تماما لـ 16:** تصبح في هذه الحالة قيمة $C'_2$ معدومة، ما يحقق معيار الأمثلية، و بالتالي يبقى الحل أمثلا.
- **إذا كان مقدار التغير أكبر من 16:** تصبح في هذه الحالة قيمة $C'_2$ موجبة، وهذا ما لا يحقق شرط الأمثلية، مما يستوجب إنشاء جدول آخر لتحسين الحل مرة أخرى.

**4-2-1-2- تأثير التغير في معاملات المتغيرات داخل الأساس في دالة الهدف:** إن تحليل الحساسية المتعلق بالتغيرات في معاملات المتغيرات الداخلة في الأساس في دالة الهدف، يعد أكثر صعوبة من تحليل الحساسية المتعلق بالتغير في معاملات المتغيرات خارج الأساس في دالة الهدف. كون هذا الأخير يؤثر فقط على قيم هذه العوامل في سطر الدالة الاقتصادية. أما التغير في معاملات المتغيرات الداخلة في الأساس فيمكن أن يؤثر على جميع العوامل في سطر الدالة الاقتصادية بما فيها معاملات المتغيرات خارج الأساس[3].

**مثال:** بالرجوع إلى المثال السابق وبأخذ المتغير $x_1$ باعتباره متغيرا داخل الأساس في جدول الحل الأمثل، فما مقدار التغير في معامل المتغير $x_1$ الداخل في الأساس $C_1$ بحيث لا يتأثر جدول الحل الأمثل.

بافتراض أن معامل المتغير الداخل في الأساس $x_1$ قد تغير بمقدار (موجب أو سالب) يساوي $\Delta C_1$ فيصبح $C'_1$ حيث أن: $C'_1 = C_1 + \Delta C_1$ أي: $C'_1 = 20 + \Delta C_1$. فالملاحظ أنه بانتقالنا من الجدول الأول إلى الثاني (جدول الحل الأمثل) أن معامل المتغيرة $x_1$ تغير من 20 إلى 0 (أي أضفنا

---

[1] - لحسن عبد الله باشيوة ، مرجع سبق ذكره ، ص 160.

[2] - فتيحة بلجيلالي، محاضرات في مقياس رياضيات المؤسسة، كلية العلوم الاقتصادية التجارية وعلوم التسيير، ملحقة قصر الشلالة، جامعة ابن خلدون تيارت، الجزائر، 2017-2018، ص82.

[3] - محمد أحمد الطراونة، سليمان خالد عبيدات، مرجع سبق ذكره ، ص 162.

20−). أي: $C'_1 = 20 + (-20) + \Delta C_1 = \Delta C_1$، و بتعويض القيمة الجديدة في جدول الحل الأمثل نحصل على:

**جدول الحل الأساسي رقم 02 الحل الأمثل المعدل (بعد التحويلات)**

| | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $S_2$ | B |
|---|---|---|---|---|---|
| $X_1$ | 1 | $\frac{4}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | 0 | $\frac{24}{5}$ |
| $S_2$ | 0 | $\frac{17}{5}$ | $-\frac{2}{5}$ | 1 | $\frac{17}{5}$ |
| $\Delta Z$ | 0 | $-6-\frac{4}{5}\Delta C_1$ | $-4-\frac{1}{5}\Delta C_1$ | 0 | $-96-\frac{24}{5}\Delta C_1$ |

**جدول الحل الأساسي رقم 02 الحل الأمثل**

| | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $S_2$ | B |
|---|---|---|---|---|---|
| $X_1$ | 1 | $\frac{4}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | 0 | $\frac{24}{5}$ |
| $S_2$ | 0 | $\frac{17}{5}$ | $-\frac{2}{5}$ | 1 | $\frac{17}{5}$ |
| $\Delta Z$ | $\Delta C_1$ | −6 | −4 | 0 | −96 |

لكن حتى يكون جدول الحل الأساسي رقم 2 جدول الحل الأمثل يجب أن تكون معاملات المتغيرات الداخلة في الأساس معدومة(تساوي 0). وهذا ل يتحقق هنا للمتغير $X_1$ الأمر الذي يدفعنا لإجراء بعض التحويلات الأولية على سطر الدالة الاقتصادية بضرب السطر الثاني بالقيمة($-\Delta C_1$) وجمعه مع سطر الدالة الاقتصادية لنحصل على جدول الحل الأساسي رقم 2 المعدل[1].

وحتى نحافظ على نفس جدول الحل الأمثل المعدل الحالي، يجب أن يتحقق شرط الأمثلية لحالة التعظيم(جميع عوامل المتغيرات في سطر دالة الهدف سالبة أو معدومة). وترتبط بالقيم الممكنة لـ$\Delta C_1$ المؤثرة في معاملات كلا من المتغيرين $x_2$ ، $s_1$ في سطر الدالة الاقتصادية. أي يجب أن يكون:

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{-6-\frac{4}{5}\Delta C_1 \le 0 \;=>\; -\frac{4}{5}\Delta C_1 \le 6 \;=>\; \frac{4}{5}\Delta C_1 \ge -6 \;=>\; \Delta C_1 \ge -7,5} \\ \mathbf{-4-\frac{1}{5}\Delta C_1 \le 0 \;=>\; -\frac{1}{5}\Delta C_1 \le 4 \;=>\; \frac{1}{5}\Delta C_1 \ge -4 \;=>\; \Delta C_1 \ge -20} \end{array}\right\} => \mathbf{\Delta C_1 \ge -7,5}$$

إذا لكي يبقى جدول الحل الأساسي رقم 2 حلا أمثلا لابد أن يكون:

$$\mathbf{-7,5 \le \Delta C_1 \le +\infty <=> 20+(-7,5) \le 20+\Delta C_1 \le +\infty <=> 12,5 \le C'_1 \le +\infty}$$

وبالتالي طالما كانت قيمة معامل المتغير $x_1$ في دالة الهدف تنتمي للمجال $[\mathbf{12,5}\,;+\infty[$. يبقى جدول الحل الأساسي رقم 2 هو جدول الحل الأمثل. وبالتالي قيمة المتغيرات والدالة الاقتصادية هي:

$$x_1 = 4,8 \;\; ; \;\; x_2 = 0 \;\; ; \;\; Z = 96 + \frac{24}{5}\Delta C_1$$

[1] - لحسن عبد الله باشيوة ، مرجع سبق ذكره ، ص 161.

ومن ثم قيمة الدالة الاقتصادية المثلى تتعلق بقيمة التغير في معامل المتغير الداخل في الأساس $x_1$.

**4-2-2- تأثير التغير في الطرف الأيمن (القيود الوظيفية أو المتاح):** قد تضطر المؤسسات إلى تغيير التكنولوجيا المستخدمة كاستبدال آلة قديمة بأخرى جديدة، أو اعتماد عمالة أكثر مهارة،... هذا التغير يؤثر دون شك في المصادر المتاحة للمؤسسة في لحظة زمنية ما (الطرف الأيمن من القيود أو شعاع الثوابت) ودون أن يتغير الحل الأمثل. هذا التغيير قد يؤدي في بعض الحالات إلى تغيير في قيم المتغيرات الداخلة في الأساس.

**مثال:** بالرجوع إلى المثال السابق، نجد أن قيم الطرف الأيمن هي: $b_1 = 24$ ; $b_2 = 13$.

فما مقدار التغيير الممكن أن يحصل في $b_1$ ; $b_2$ دون أن يتغير جدول الحل الأمثل؟

أ- فمثلا نأخذ تغير المورد الأول $\boldsymbol{b_1}$ بمقدار $\Delta b_1$ فيصبح $b'_1 = b_1 + \Delta b_1$. هذا التغير قد يؤدي إلى تغيير قيم المتغيرات الداخلة في الأساس. وحتى يبقى الحل أمثلا يجب أن تبقى قيم المتغيرات الداخلة في الأساس موجبة أو معدومة.

إن التغير في المورد الأول $\boldsymbol{b_1}$ يظهر في جدول الحل الأساسي الأول كما يلي:

**جدول الحل الأساسي رقم 01 المعدل**

| | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $S_2$ | B+ $\Delta b_1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $S_1$ | 5 | 4 | 1 | 0 | 24+ 1 |
| $S_2$ | 2 | 5 | 0 | 1 | 13+ 0 |
| $\Delta Z$ | 20 | 10 | 0 | 0 | 0 + 0 |

**جدول الحل الأساسي رقم 01**

| | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $S_2$ | B |
|---|---|---|---|---|---|
| $S_1$ | 5 | 4 | 1 | 0 | 24+ $\Delta b_1$ |
| $S_2$ | 2 | 5 | 0 | 1 | 13 |
| $\Delta Z$ | 20 | 10 | 0 | 0 | 0 |

نلاحظ أن عوامل العمود الخاص بـ $\Delta b_1$ له نفس العوامل الخاصة بعمود المتغيرة $S_1$ مما يعني أن جميع العمليات على الصفوف والتي مست العمود الخاص بـ $S_1$ ستجرى على العمود الخاص بـ $\Delta b_1$. هذا يقتضي أن العمود الخاص بـ $\Delta b_1$ في جدول الحل الأمثل سيكون مماثلا للعمود الخاص بـ $S_1$ في جدول الحل الأمثل أيضا[1]. وعليه يكون:

[1]- لحسن عبد الله باشيوة ، مرجع سبق ذكره ، ص ص 163- 164.

**جدول الحل الأساسي رقم 02 الحل الأمثل المعدل**

| | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $S_2$ | B |
|---|---|---|---|---|---|
| $X_1$ | 1 | $\frac{4}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | 0 | $\frac{24}{5}+\frac{1}{5}\Delta b_1$ |
| $S_2$ | 0 | $\frac{17}{5}$ | $-\frac{2}{5}$ | 1 | $\frac{17}{5}-\frac{2}{5}\Delta b_1$ |
| $\Delta Z$ | 0 | $-6$ | $-4$ | 0 | $-96-4\Delta b_1$ |

**جدول الحل الأساسي رقم 02 الحل الأمثل**

| | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $S_2$ | $B+\Delta b_1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $X_1$ | 1 | $\frac{4}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | 0 | $\frac{24}{5}+\frac{1}{5}$ |
| $S_2$ | 0 | $\frac{17}{5}$ | $-\frac{2}{5}$ | 1 | $\frac{17}{5}-\frac{2}{5}$ |
| $\Delta Z$ | $0$ | $-6$ | $-4$ | 0 | $-96-4$ |

إذا ما هي قيم $\Delta b_1$ الممكنة حتى نحافظ على نفس جدول الحل الأمثل؟

أي يجب أن يكون : $s_2 \geq 0$ و $x_1 \geq 0$. وعليه:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{24}{5}+\frac{1}{5}\Delta b_1 \geq 0 \;\; => \;\; \Delta b_1 \geq -24 \\ \frac{17}{5}-\frac{2}{5}\Delta b_1 \geq 0 \;\; => \;\; \Delta b_1 \geq \frac{17}{2} \end{array}\right\} \;\; => \;\; -24 \leq \Delta b_1 \leq \frac{17}{2}$$

$$-24 \leq \Delta b_1 \leq \frac{17}{2} <=> 24-24 \leq 24+\Delta b_1 \leq 24+\frac{17}{2} <=> 0 \leq b'_1 \leq 32{,}5$$

**ملاحظة:** قيم المتغيرات الداخلة في الأساس تتأثر بالتغير في $b_1$.

ب- نفس الشيء بالنسبة للمورد $b_2$. فإذا تغير بالمقدار $\Delta b_2$ أي $b'_2= b_2+ \Delta b_2$ فإن جدول الحل الأمثل يكون:

**جدول الحل الأساسي رقم 02 الحل الأمثل المعدل**

| | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $S_2$ | B |
|---|---|---|---|---|---|
| $X_1$ | 1 | $\frac{4}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | 0 | $\frac{24}{5}$ |
| $S_2$ | 0 | $\frac{17}{5}$ | $-\frac{2}{5}$ | 1 | $\frac{17}{5}+\Delta b_2$ |
| $\Delta Z$ | 0 | $-6$ | $-4$ | 0 | $-96$ |

**جدول الحل الأساسي رقم 02 الحل الأمثل**

| | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $S_2$ | $B+\Delta b_2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $X_1$ | 1 | $\frac{4}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | 0 | $\frac{24}{5}+0$ |
| $S_2$ | 0 | $\frac{17}{5}$ | $-\frac{2}{5}$ | 1 | $\frac{17}{5}+1$ |
| $\Delta Z$ | $0$ | $-6$ | $-4$ | 0 | $-96+0$ |

فقيم $\Delta b_2$ الممكنة حتى نحافظ على نفس جدول الحل الأمثل يجب أن تحقق:

$s_2 \geq 0$ و $x_1 \geq 0$. وعليه فهي ترتبط بالمتغير $s_2$ فقط. ومنه:

$$\frac{17}{5}+\Delta b_2 \geq 0 \;\; => \;\; \Delta b_2 \geq -\frac{17}{5} \;\; <=> \;\; -\frac{17}{5} \leq \Delta b_2 \leq +\infty$$

$$-\frac{17}{5} \leq \Delta b_2 \leq +\infty \;\; <=> 13-\frac{17}{5} \leq 13+\Delta b_2 \leq +\infty \;\; <=> 9{,}6 \leq b'_2 \leq +\infty$$

# الفصل الخامس :
# مسائل النقل (تقليل التكاليف)

# الفصل الخامس: مسائل النقل(تقليل التكاليف)

تعتبر مسألة النقل إحدى تطبيقات البرمجة الخطية الهامة، حيث تستخدم اساسا لتخفيض تكاليف النقل من عدد من المصادر تسمى المنبع نحو عدد من النقاط تسمى المصبات. مثل النقل من المعامل نحو الموانئ، أو من المستودع نحو المصنع، أو العكس ، ...

فمسائل النقل تهدف أيضا للوصول إلى أمثلية الاستخدام بالمؤسسة في ظل مجموعة من القيود مثلها مثل البرمجة الخطية، إلا أنها تضيف قيدا آخر متمثلا في شرط تساوي العرض مع الطلب.[1]

**5-1- تشكيل جدول مسألة النقل:** تعرض مسائل النقل عادة في حالة التدنئة. فإذا كانت لدينا مؤسسة اقتصادية لها ثلاث وحدات إنتاجية متواجدة في أماكن مختلفة، تتيح إمكانيات العرض التالية: الوحدة (1): تعرض الكمية $a_1$ ، الوحدة (2): تعرض الكمية $a_2$ ، الوحدة (3): تعرض الكمية $a_3$ ، هذه الوحدات مكلفة بتموين أربع مناطق مختلفة من نفس السلعة، حيث المنطقة(1): تحتاج الكمية $b_1$، المنطقة(2): تحتاج الكمية $b_2$ ، المنطقة(3): تحتاج الكمية $b_3$ ،

مع العلم أن نقل الوحدة الواحدة من السلعة من وحدة الإنتاج $i$ نحو المنطقة $j$ المراد تموينها يتطلب تكلفة $c_{ij}$ موضحة في الجدول التالي:

| | المنطقة (1) | المنطقة (2) | المنطقة (3) | المنطقة (4) |
|---|---|---|---|---|
| الوحدة (1) | $c_{11}$ | $c_{12}$ | $c_{13}$ | $c_{14}$ |
| الوحدة (2) | $c_{21}$ | $c_{22}$ | $c_{23}$ | $c_{24}$ |
| الوحدة (3) | $c_{31}$ | $c_{32}$ | $c_{33}$ | $c_{34}$ |

- فإذا كانت الكميات التي يمكن أن تمون بها الوحدة $i$ المنطقة $j$ هي $X_{ij}$ ، فالكميات المحتمل توجيهها من كل وحدة نحو كل منطقة موزعة حسب الجدول التالي:

| | المنطقة (1) | المنطقة (2) | المنطقة (3) | المنطقة (4) |
|---|---|---|---|---|
| الوحدة (1) | $X_{11}$ | $X_{12}$ | $X_{13}$ | $X_{14}$ |
| الوحدة (2) | $X_{21}$ | $X_{22}$ | $X_{23}$ | $X_{24}$ |
| الوحدة (3) | $X_{31}$ | $X_{32}$ | $X_{33}$ | $X_{34}$ |

[1]– يحياوي إلهام، محاضرات مقياس رياضيات المؤسسة، كلية العلوم الاقتصادية، التجارية وعلوم التسيير، جامعة الحاج لخضر، باتنة، دون سنة النشر ، ص 29.

ومن ثم يمكن استنتاج جدول مسألة النقل كما يلي:

**الجدول رقم (5−1): نموذج جدول مسألة النقل**

| المصب / المنبع | المنطقة (1) | المنطقة (2) | المنطقة (3) | المنطقة (4) | العرض $a_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| الوحدة (1) | $c_{11}$ $X_{11}$ | $c_{12}$ $X_{12}$ | $c_{13}$ $X_{13}$ | $c_{14}$ $X_{14}$ | $a_1$ |
| الوحدة (2) | $c_{21}$ $X_{21}$ | $c_{22}$ $X_{22}$ | $c_{23}$ $X_{23}$ | $c_{24}$ $X_{24}$ | $a_2$ |
| الوحدة (3) | $c_{31}$ $X_{31}$ | $c_{32}$ $X_{32}$ | $c_{33}$ $X_{33}$ | $c_{34}$ $X_{34}$ | $a_3$ |
| الطلب $b_i$ | $b_1$ | $b_2$ | $b_3$ | $b_4$ | المجموع $\sum a_i = \sum b_j$ |

المصدر: من إعداد الباحث.

حيث $X_{ij}$: هي متغيرات المسألة المراد البحث عنها.

وبالتالي التكلفة الإجمالية التي تتحملها المؤسسة هي:

$$Z = c_{11} \times X_{11} + c_{12} \times X_{12} + \cdots + c_{34} \times X_{34} = \sum_{j=1}^{4} \sum_{i=1}^{3} c_{ij} \times X_{ij}$$

كما أن الكميات التي يعرضها كل منبع "وحدة" هي:

$X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} = a_1$ ، $X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} = a_2$ ، $X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} =$ $a_3$ ، واختصارا: $\sum_{j=1}^{4} X_{ij} = a_i$

والكميات المرسلة إلى كل مصب" منطقة" هي:

$X_{11} + X_{21} + X_{31} = b_1$ ، $X_{12} + X_{22} + X_{32} = b_2$ ،

$X_{13} + X_{23} + X_{33} = b_3$ ، $X_{14} + X_{24} + X_{34} = b_4$ ،

واختصارا: $\sum_{i=1}^{3} X_{ij} = b_j$ مع $\sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{j=1}^{4} b_j$

وعليه فالصيغة الرياضية لمسألة النقل هي :

$$MinZ = \sum_{j=1}^{4}\sum_{i=1}^{3} c_{ij} \times X_{ij}$$

$$s/c\begin{cases} \sum_{j=1}^{4} X_{ij} = a_i \\ \sum_{i=1}^{3} X_{ij} = b_j \\ \sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{j=1}^{4} b_j \\ X_{ij} \geq 0 \ ; \ c_{ij} \geq 0 \end{cases}$$

**مثال:**

لنفرض أنه لدينا مؤسسة اقتصادية لها 3 وحدات إنتاجية $U_1$، $U_2$، $U_3$ متواجدة في ثلاث مناطق مختلفة، كما أنها تتوفر على 5 مراكز توزيع $D_1$، $D_2$، $D_3$، $D_4$، $D_5$، حيث أن هذه المؤسسة تنتج المنتج P على مستوى مراكز الإنتاج، ثم تقوم بتوزيعه على مراكز التوزيع الخمسة.

تعرض مراكز الإنتاج كميات معينة من الإنتاج تسمح بتموين مراكز التوزيع بكميات معينة كما هو موضح في الجدولين أدناه.

| مركز الإنتاج | $U_1$ | $U_2$ | $U_3$ |
|---|---|---|---|
| الطاقة الإنتاجية (العرض $a_i$) | *240* | *160* | *260* |

| مركز التوزيع | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | $D_4$ | $D_5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| الطلب ($b_j$) | *120* | *130* | *145* | *125* | *140* |

تتطلب عملية نقل الوحدة الواحدة من المنتج ***P*** من كل مركز من مراكز الإنتاج الثلاثة إلى كل مركز من مراكز التوزيع الخمسة تكلفة النقل $C_{ij}$ موضحة في الجدول التالي:

| | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | $D_4$ | $D_5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $U_1$ | 100 | 800 | 100 | 500 | 400 |
| $U_2$ | 500 | 500 | 300 | 600 | 700 |
| $U_3$ | 200 | 900 | 500 | 900 | 800 |

**المطلوب:** كون جدول مسألة النقل الذي يسمح بتموين المراكز الخمسة بكل احتياجاتها في حدود طاقات العرض المتاحة لكل وحدة وبأقل تكلفة ممكنة.

**الحل:**

مجموع العرض: $\sum_{i=1}^{3} a_i = 240 + 160 + 260 = 660$

مجموع الطلب : $\sum_{j=1}^{4} b_i = 120 + 130 + 145 + 125 + 140 = 660$

بما أن: $\sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{j=1}^{5} b_j$ والهدف هو تدنئة التكاليف فإن المسألة هي مشكلة نقل. وعليه **جدول مسألة النقل**، يكون كالتالي:

**جدول مسألة النقل**

| المصب المنبع | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | $D_4$ | $D_5$ | العرض $a_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_1$ | 100 $X_{11}$ | 800 $X_{12}$ | 100 $X_{13}$ | 500 $X_{14}$ | 400 $X_{15}$ | 240 |
| $a_2$ | 500 $X_{21}$ | 500 $X_{22}$ | 300 $X_{23}$ | 600 $X_{24}$ | 700 $X_{25}$ | 160 |
| $a_3$ | 200 $X_{31}$ | 900 $X_{32}$ | 500 $X_{33}$ | 900 $X_{34}$ | 800 $X_{35}$ | 260 |
| الطلب $b_i$ | 120 | 130 | 145 | 125 | 140 | 660 |

**المصدر: من إعداد الباحث بناء على معطيات المثال**

**كتابة البرنامج الخطي المناسب لمسألة النقل:**

**أ- تحديد متغيرات القرار:** تمثل القيم $x_{ij}$ متغيرات القرار في مسائل النقل، و عددها في مثالنا السابق 15 متغيرة قرار، حيث:

$X_{ij}$ : تمثل الكمية الواجب نقلها من مركز الإنتاج $U_i$ إلى مركز التوزيع $D_j$ .

**ب- صياغة دالة الهدف:** دالة الهدف هي عبارة عن تدنئة التكاليف المترتبة عن عملية النقل. وتعطى:

$$Min\ Z = 100X_{11}+800X_{12}+100X_{13}+500X_{14}+400X_{15}+500X_{21}+500X_{22}+300X_{23}+600X_{24}+700X_{25}+200X_{31}+900X_{32}+500X_{33}+900X_{34}+800X_{35}$$

أي: $$MinZ = \sum_{j=1}^{5} \sum_{i=1}^{3} c_{ij} \times X_{ij}$$

**جـ- صياغة القيود:** لدينا نوعين من القيود: قيود العرض و قيود الطلب.

**قيود العرض:**

$$X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} + X_{15} = 240$$
$$X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} + X_{25} = 160$$
$$X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} + X_{35} = 260$$

*أي:* $\sum_{j=1}^{5} X_{ij} = a_i$

**قيود الطلب:**

$$X_{11} + X_{21} + X_{31} = 120$$
$$X_{12} + X_{22} + X_{23} = 130$$
$$X_{13} + X_{23} + X_{33} = 145$$
$$X_{14} + X_{24} + X_{34} = 125$$
$$X_{15} + X_{25} + X_{35} = 140$$

*أي:* $\sum_{i=1}^{3} X_{ij} = b_j$

**قيد عدم سلبية المتغيرات:** $x_{ij} \geq 0$

وبالتالي يكون البرنامج:

$$MinZ = \sum_{j=1}^{5} \sum_{i=1}^{3} c_{ij} \times X_{ij}$$

$$s/c \begin{cases} \sum_{j=1}^{5} X_{ij} = a_i \\ \sum_{i=1}^{3} X_{ij} = b_j \\ \sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{j=1}^{5} b_j = 660 \\ X_{ij} \geq 0 \ ; \ c_{ij} \geq 0 \end{cases}$$

**5-2- حل مسائل النقل :** تمر عملية حل مسائل النقل بمرحلتين أساسيتين هما: **إيجاد الحل الأساسي الأول (الابتدائي) الممكن** والثانية اختبار الحل وسيرورة تحسينه.

**5-2-1- المرحلة الأولى: تحديد الحل الأساسي الأول (الابتدائي):** تتم بثلاث طرق ممكنة هي طريقة الزاوية الشمالية الغربية، طريقة التكلفة الدنيا، وطريقة فوقل.

**5-2-1-1- طريقة الزاوية الشمالية الغربية *(Méthode du coin nord ouest)*:** يقصد بها أول خانة في الجدول إلى الأعلى وإلى اليسار، وهي الخلية التي ينطلق منها إيجاد الحل الأساسي الأول،[1] و يتم ذلك بإتباع المنهجية التالية و بالتطبيق على المثال التالي:

**مثال:** انطلاقا من المثال السابق أوجد الحل الأساسي الأول باستخدام طريقة الزاوية الشمالية الغربية.

**الحل:** يتم توزيع الكميات من مختلف المنابع نحو مختلف المصبات كما يلي:

أ. نبدأ بأول خلية في أعلى الجدول إلى أقصى اليسار الموافقة للمنبع (1)، والمصب (1)، نجد أن طلب مركز التوزيع $D_1$ هو 120 و، بينما حجم عرض الوحدة $U_1$ هو 240 و، فيحصل $D_1$ على كافة طلبه من $D_1$، ويتشبع بذلك العمود الأول ($D_1$)، و يتبقى لمركز الإنتاج $U_1$ كمية فائضة تقدر بـ 120 و.

ب. بعد تسديد كل احتياجات المصب(1)، ننتقل للمصب(2)، حيث يقدر حجم طلبه 130 و، فنحول إليه الباقي في المركز الأول والمقدرة بـ 120 و. (أي الكمية المتبقية بعد التوزيع الأول) ، غير أن احتياجات المصب(2) لم تغط بالكامل، حيث تبقى 10 وحدات ينبغي تغطيتها من المنبع (2) ،... و هكذا. والجدول التالي يلخص خطوات هذه الطريقة:

**الحل الأساسي الأول لمسألة النقل بطريقة الزاوية الشمالية الغربية**

| المصب / المنبع | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | $D_4$ | $D_5$ | $a_i$ | الباقي | الباقي |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_1$ | 100<br>120 | 800<br>120 | 100 | 500 | *400* | *240* | *120* | *0* |
| $a_2$ | 500 | 500<br>10 | 300<br>145 | 600<br>5 | *700* | *160* | *155* | *5* |
| $a_3$ | 200 | 900 | 500 | 900<br>120 | *800*<br>140 | *260* | *140* | *0* |
| $b_i$ | *120* | *130* | *145* | *125* | *140* | 660 | | |

[1] – محمد راتول، مرجع سبق ذكره، ص 105.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *الباقي* | *0* | *10* | *0* | *120* | *0* | |

**المصدر: من إعداد الباحث بناء على معطيات المثال**

و بذلك نحصل على جدول الحل الأساسي الأول، و الذي نجد فيه:

$X_{11}=120$: أي أن $U_1$ يقوم بتموين $D_1$ بمقدار 120 وحدة بتكلفة تقدر بـ 100دج للوحدة؛

$X_{12}=120$: أي أن $U_1$ يقوم بتموين $D_2$ بمقدار 120 وحدة بتكلفة تقدر بـ 800 دج للوحدة ؛

$X_{22}=10$: أي أن $U_2$ يقوم بتموين $D_2$ بمقدار 10 وحدات بتكلفة تقدر بـ 500 دج للوحدة ؛

$X_{23}=145$: أي أن $U_2$ يقوم بتموين $D_3$ بمقدار 145 وحدة بتكلفة تقدر بـ 300 دج للوحدة ؛

$X_{24}=5$: أي أن $U_2$ يقوم بتموين $D_4$ بمقدار 5 وحدات بتكلفة تقدر بـ 600 دج للوحدة ؛

$X_{34}=120$: أي أن $U_3$ يقوم بتموين $D_4$ بمقدار 120 وحدة بتكلفة تقدر بـ 900 دج للوحدة ؛

$X_{35}=140$: أي أن $U_3$ يقوم بتموين $D_5$ بمقدار 140 وحدة بتكلفة تقدر بـ 800 دج للوحدة ؛

أ. ويتم حساب التكلفة الكلية وفق هذه الطريقة عن طريق ضرب قيمة التكلفة الوحدوية في كمية الإنتاج لكافة مراكز الإنتاج و التوزيع، أي:

$$Z=(100\times120)+(800\times120)+(500\times10)+(300\times145)+(600\times5)+(900\times120)+$$
$$(800\times140)=379500Da$$

ب. عدد المتغيرات الداخلة في الحل (عدد الخلايا المملوءة) = عدد الأسطر $(m)$+عدد الأعمدة $(n)$ − 1 =3+5−1=7

ج. هذه الطريقة لا تهتم بالتكاليف وإنما بتوزيع العرض وإشباع الطلب.

**5-2-1-2- طريقة التكلفة الدنيا أو أقل التكاليف *(Méthode du moindre coût)*:**

تختلف هذه الطريقة عن سابقتها في إيجاد الحل الأساسي الأول، حيث أننا في هذه الطريقة نبدأ في إشباع الخلايا انطلاقا من أدنى تكلفة في الجدول، ثم التكلفة المساوية ثم الموالية و هكذا،... حتى يتم استيفاء كل العــرض والطلب، بحيث نحصــل على عــدد متغيــرات داخلة في الحــل يساوي $(m+n-1)$.[1]

**مثال:** بالعودة إلى مثالنا السابق، أوجد الحل الأساسي الأول باستخدام طريقة التكلفة الدنيا.

**الحل:** يمكن تطبيق هذه الطريقة كما يلي:

[1] محمد راتول، مرجع سبق ذكره، ص 125.

أ. نلاحظ أن أدنى تكلفة في الجدول هي 100دج/و، موجودة في الخانات(1،1) و(1،3). وبما أنهما في نفس السطر، أي إما نقل المنتج من المنبع (1) $U_1$ إلى المصب (1) $D_1$ أو من المنبع (1) $U_1$ إلى المصب (3) $D_3$، و طريقة الاختيار هنا تعتمد على أكبر قدر من الطلب، فلو تمت مقارنة طلب كل من المصب (1) و (3)، فإن المؤسسة حتما سوف تختار الطلب الأكبر لتصريف أكبر قدر من منتجاتها، لذلك يتم إشباع طلب المصب (3) كليا من المنبع (1)؛ ثم بعد ذلك نقل المنتج من المنبع (1) $U_1$ إلى المصب (1) $D_1$ ، حيث يتم تزويده بـ 95 وحدة المتبقية من 240 وحدة بعد التوزيع الأول، و بذلك يتشبع السطر الأول. ويبقى عجز في المصب (1) بمقدار 25و.

ب. أقل تكلفة موالية هي 200 دج/و، موجودة بالخانة (1،3). هي تكلفة نقل المنتج من المنبع (3) $U_3$ إلى المصب (1) $D_1$ ، وهنا يتم تزويد هذا الأخير بـ 25 وحدة فقط و هي احتياجاته بعد حصوله على 95 وحدة من المنبع الأول، وبالتالي يتشبع العمود الأول، و هكذا ... يتم الانتقال بين الخلايا تصاعديا، كما في الجدول أدناه:

**الحل الأساسي الأول لمسألة النقل بطريقة التكاليف الدنيا**

| المصب / المنبع | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | $D_4$ | $D_5$ | $a_i$ | الباقي | الباقي |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_1$ | 100<br>95 | 800 | 100<br>145 | 500 | 400 | 240 | 95 | 0 |
| $a_2$ | 500 | 500<br>130 | 300 | 600<br>30 | 700 | 160 | 30 | 0 |
| $a_3$ | 200<br>25 | 900 | 500 | 900<br>95 | 800<br>140 | 260 | 235 | 95 |
| $b_i$ | 120 | 130 | 145 | 125 | 140 | 660 | | |
| الباقي | 25 | 0 | 0 | 95 | 0 | | | |

**المصدر: من إعداد الباحث بناء على معطيات المثال**

اجمالي التكاليف وفق هذه الطريقة هي:

$$Z=(100\times95)+(100\times145)+(500\times130)+(600\times30)+(200\times25)+(900\times95)+$$

$$(800\times140)=309500Da$$

**5-2-1-3- طريقة فوجل (*Méthode de Vogel*):** وتسمى أيضا طريقة الجزاء أو طريقة الندم. حيث تعتبر طريقة فوجل التقريبية (طريقة الفروقات العظمى) من أهم الطرق الثلاث على الإطلاق لما تتميز به من قدرة على الوصول للحل الأمثل أو الحل القريب من الأمثل، و نادرا ما تكون طريقة التكلفة الدنيا وطريقة الزاوية الشمالية الغربية أفضل من طريقة فوجل، إلا أنها تحتاج إلى عمليات حسابية أطول مما تحتاجه الطريقتين السابقتين. وتتلخص خطوات إيجاد الحل الابتدائي لهذه الطريقة كما يلي:[1]

أ. حساب الفرق بين أقل تكلفتين في كل صف و في كل عمود تسمى هذه الفروقات **بأرقام فوقل؛**

ب. تحديد الصف أو العمود الذي يمتلك أكبر فرق التكلفة (أعلى جزاء)، أي أكبر رقم من أرقام فوقل على مستوى الأسطر والأعمدة معا؛

ج. اختيار الخلية ذات التكلفة الأقل في ذلك الصف أو العمود الذي ينتمي إليه هذا الرقم وندخلها إلى الأساس (الحل) ليتشبع بذلك إما السطر أو عمود حسب المعطيات؛

د. نعود من جديد إلى الخطوة الأولى وحساب الفروقات مرة أخرى لكل من الأعمدة و الصفوف، و ذلك بعد إلغاء العمود أو السطر المشبع، و تكرر العملية السابقة إلى أن نلبي احتياجات كل المصبات من المنابع المتاحة لنحصل بذلك على جدول الحل الأساسي الأول.

**مثال:** بالرجوع إلى المثال السابق، أوجد جدول الحل الأساسي الأول باستخدام طريقة فوقل.

**الحل:** سنقوم بتطبيق مراحل هذه الطريقة، كما يلي:

أ. نقوم بحساب الفرق بين أدنى تكلفتين على مستوى جميع الأسطر والأعمدة فنحصل على القيم: (100-100=0، 500-300=200، 500-200=300) على مستوى الأسطر (الأول، الثاني والثالث) على الترتيب. ونحصل على القيم: (200-100=100، 800-500=300، 300-100=200، 600-500=100، 700-400=300) على مستوى الأعمدة (الأول، الثاني، الثالث، الرابع والخامس) على الترتيب أيضا؛

[1] - صوار يوسف، طاوش قندوسي، محاضرات في البرمجة الخطية - تمارين محلولة باستعمال برنامج Q.S.B- كلية العلوم الاقتصادية التجارية و علوم التسيير، جامعة الدكتور الطاهر مولاي، سعيدة، ديوان المطبوعات الجامعية، وهران، الجزائر، دون سنة نشر، ص ص98-99.

ب. نقوم باختيار أكبر فرق بين الأسطر والأعمدة ، نلاحظ في هذا المثال أن 300 هي أكبر فرق وقد تكررت في السطر الأخير والعمودين الثاني والخامس، وهنا يتم اختيار الأكبر فرق بينها الذي يوافق أدنى تكلفة، وهو السطر الثالث والذي يوافق 200 التي تعبر عن أدنى تكلفة في الجدول؛

ج. تقابل الخلية (3،1) ذات التكلفة 200دج/و، تعبر عن تكلفة تزويد المصب (1) بالمنتج من المنبع (3)، لذلك يتم تزويد طلبه المتمثل في 120و من 260و (عرض المنبع (3))، وبذلك يتم إشباع المصب (1) (العمود الأول)، و يتبقى للمنبع (3) كمية معروضة تقدر بـ 140و؛

د. وهكذا يتم إلغاء العمود الأول من جدول النقل لكونه مشبعا، و يتم تحيين (*actualisation*) الجدول بإعادة حساب الفرق بين التكاليف المتبقية، فنحصل على القيم: 300، 200، 300 في الأسطر الثلاث، و تبقى القيم: 300، 200، 100، 300 في الأعمدة الأربعة المتبقية، نقوم باختيار أكبر فرق (300) و الذي يوافق أدنى تكلفة (100) تقابل الخلية الخلية(3،1)؛

هـ. تمثل التكلفة 100دج/و، تكلفة نقل المنتجات من المنبع (1) إلى المصب (3)، لذلك يتم تزويد هذا الأخير بكل طلبه المتمثل في145و من أصل 240و معروضة لدى المنبع (1)، وهكذا يتم إشباع العمود الثاني، وإلغائه، ويبقى للمنبع (1) كمية معروض تقدر بـ 95و؛

و. و بإتباع نفس الخطوات في كل مرة، نحصل على النتائج المبينة في الجدول أدناه:

**الحل الأساسي الأول لمسألة النقل بطريقة فوقل**

| المصب / المنبع | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | $D_4$ | $D_5$ | $a_i$ | الباقي | الباقي |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_1$ | 100 | 800 | 100<br>145 | 500 | 400<br>95 | 240 | 95 | 0 |
| $a_2$ | 500 | 500<br>130 | 300 | 600<br>30 | 700 | 160 | 30 | 0 |
| $a_3$ | 200<br>120 | 900 | 500 | 900<br>95 | 800<br>45 | 260 | 140 | 95 |
| $b_i$ | 120 | 130 | 145 | 125 | 140 | 660 | | |
| الباقي | 0 | 0 | 0 | 95 | 45 | | | |

**المصدر: من إعداد الباحث بناء على معطيات المثال**

– **متغيرات الداخلة في الأساس:** عددها 07= ($m+n-1$) قيمها:

$X_{13}=145$, $X_{15}=95$, $X_{22}=130$, $X_{24}=30$, $X_{31}=120$, $X_{34}=95$, $X_{35}=45$

- **متغيرات خارج الأساس المعدومة:** و تمثل باقي متغيرات القرار.

و بغرض الحصول على قيمة دالة الهدف نقوم أيضا بتعويض قيم متغيرات القرار في دالة هدف نموذج النقل، فنحصل على:

$$Z=100*(145)+400*(95)+500*(130)+600*(30)+200*(120)+900*(95)+800*(45)=281000$$

قيمة دالة الهدف المحصل عليها باستخدام طريقة *Vogel* (281000) أقل من التكلفة الإجمالية للنقل المحصل عليها بطريقة التكاليف الدنيا (309500)، و أقل أيضا من التكلفة الإجمالية المحصل عليها بطريقة الزاوية الشمالية الغربية (379500).

**ملاحظة:**

- إذا وجد قيمتين عظمتين متساويتين لفروقات فوقل، نختار المقابلة لأقل تكلفة؛
- عند حساب فروقات فوقل، وفي حالة وجود تكلفتين متساويتين فإننا نحسب الفرق بينهما أي (0)؛

**5-2-2- مرحلة سيرورة الحل الأمثل (تحسين الحل الابتدائي):** هي مرحلة اختبار الحل وسيرورة تحسينه. وهناك طريقتين لتعديله هما طريقة التخطي (طريقة المسار المتعرج)، وطريقة التوزيع المعدل (طريقة عوامل الضرب).

**5-2-2-1- طريقة التخطي (المسار المتعرج) Stepping Stone:** تعتمد هذه الطريقة على جملة من الخطوات هي:

أ. اختبار الخلايا غير الداخلة في الأساس (الفارغة) الموجودة في مصفوفة الحل الأساسي الأول الذي تم التوصل إليه بإحدى الطرق السابقة، بتكوين ممرا مغلقا مبتدئا بهذه الخانة ومنتهيا بها وملاحظة ما إذا كان إدخالها إلى الحل يسمح بتدنئة التكلفة الكلية وذلك بإيجاد التكلفة الحدية لكل خلية غير داخلة في الحل؛

ب. وضع إشارات بالتناوب ( +، –، + ...) في الخلايا المشكلة للمسار، حيث نبدأ بالخانة غير المستعملة نضع بها إشارة (+) وإشارة (–) في الخلية الداخلة في الحل التي تليها ثم إشارة (+)

في الخلية الداخلة في الحل التي تليها وهكذا... إلى أن نصل إلى نقطة البداية، شريطة أن تكون تحركاتنا بشكل أفقي أو عمودي فقط مع الحرص على عدم سالبية المتغيرات؛

ج. إيجاد التكلفة الحدية لكل خلية غير داخلة في الحل بجمع تكاليف الوحدة في الخانات ذات الإشارة الموجبة ونطرح منها مجموع تكاليف الوحدة في الخانات ذات الإشارة السالبة لكل ممر؛

د. نكرر الخطوات السابقة مع جميع الخانات غير الداخلة في الحل. والخلية المرشحة للدخول في الأساس هي المقابلة لأكبر تكلفة حدية سالبة بالقيمة المطلقة؛

هـ. إدخال الخلية إلى الأساس بإحداث تغييرات على طول قيم المتغيرات المتواجدة على زوايا المسار بإضافة وطرح أصغر قيمة متواجدة من بين الزوايا التي تحمل الإشارة (−)؛

**مثال:** بالرجوع إلى المثال السابق وانطلاقا من جدول الحل الأساسي الأول المحصل عليه بطريقة الزاوية الشمالية الغربية المطلوب تحسين الحل باستخدام طريقة التخطي.

**الحل:**

إيجاد التكلفة الحدية للخلايا غير المستعملة

**الحل الأساسي الأول لمسألة النقل بطريقة الزاوية الشمالية الغربية**

| المصب / المنبع | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | $D_4$ | $D_5$ | $a_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_1$ | 100<br>120 | - 800<br>120 | + 100 | 500 | 400 | 240 |
| $a_2$ | 500 | + 500<br>10 | - 300<br>145 | 600<br>5 | 700 | 160 |
| $a_3$ | 200 | 900 | 500 | 900<br>120 | 800<br>140 | 260 |
| $b_i$ | 120 | 130 | 145 | 125 | 140 | 660 |

- الخلية (3،1):

الممر: (3،1)؛ (3،2)؛ (2،2)؛ (2،1)

$Q_{13}=(100+500)-(800+300)$
$= -500$

- الخلية (4،1):

الممر: (4،1)؛ (4،2)؛ (2،2)؛ (2،1)

$Q_{14}=(500+500)-(800+600)$
$= -400$

- الخلية (5،1):

الممر: (5،1)؛ (5،3)؛ (4،3)؛ (4،2)؛ (2،2) ؛ (2،1)

$Q_{15}=(400+900+500)-(800+600+800) = -400$

**المصدر: من إعداد الباحث بناء على معطيات المثال**

- الخلية (1،2):

*الممر: (1،2)؛ (2،2)؛ (2،1)؛ (1،1)* ، $Q_{21}=(500+800)-(500+100) = +700$

- الخلية (5،2):

*الممر: (5،2)؛ (5،3)؛ (4،3)؛ (4،2)* ، $Q_{25}=(700+900)-(800+600) = +200$

- الخلية (1،3):

*الممر: (1،3)؛(4،3)؛(4،2)؛(2،2)؛(2،1)؛(1،1)*، $Q_{31}=(200+600+800)-(900+500+100) = +100$

- الخلية (2،3):

*الممر: (2،3)؛(4،3)؛(4،2)؛(2،2)* ، $Q_{32}=(900+600)-(900+500) = +100$

- الخلية (3،3):

*الممر: (3،3)؛(3،4)؛(2،4)؛(2،3)* ، $Q_{32}=(500+600)-(900+300) = -100$

نلاحظ وجود تكلفة حدية سالبة، إذا يمكن تحسين الحل باختيار الخلية التي تدخل الأساس المقابلة لأكبر تكلفة حدية سالبة بالقيمة المطلقة وهي الخلية (3،1). وذلك بإضافة وطرح أصغر كمية على رؤوس الزوايا السالبة وهي(120) في الخلية (1،2). ويتم إعداد الجدول الثاني:

**جدول الحل الأساسي الثاني لمسألة النقل باستخدام طريقة التخطي**

| المصب / المنبع | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | $D_4$ | $D_5$ | $a_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_1$ | - 100<br>120 | 800 | + 100<br>120 | 500 | *400* | *240* |
| $a_2$ | 500 | 500<br>130 | 300<br>25 | + 600<br>5 | *700* | *160* |
| $a_3$ | 200<br>± | 900 | 500 | 900<br>- 120 | *800*<br>140 | *260* |
| $b_i$ | *120* | *130* | *145* | *125* | *140* | 660 |

*بعد حساب التكاليف الحدية للخلايا خارج الأساس، نجد أن الخلية (3،1) مرشحة للدخول في الأساس لأن لديها أعظم تكلفة حدية سالبة بالقيمة المطلقة هي(400−).*

*ممرها:*

*الممر: (3،1)؛(3،4)؛(2،4)؛(2،3)؛(1،3)؛(1،1)* ، $Q_{31}=(200+600+100)-(900+300+100) = -400$

**المصدر: من إعداد الباحث بناء على معطيات المثال**

– وتكرر هذه العملية إلى غاية الوصول إلى جدول تكون فيه التكاليف الحدية لجميع الخلايا غير المستعملة (الخلايا غير الداخلة في الأساس) **موجبة أو معدومة** عندها نكون قد وصلنا إلى جدول الحل الأمثل.

**مثال:** بالرجوع إلى المثال السابق هل تحصلنا على الحل الأمثل(التأكد باستخدام طريقة التخطي)؟

**الحل:** نقوم بحساب التكاليف الحدية للخلايا غير المستعملة لنجد: الخليتان (3،1) و(3،3) لهما تكاليف حدية سالبة فقط. لذلك يمكن إجراء خطوة تحسينية بإعداد الجدول رقم 3.

**جدول الحل الأساسي الثالث لمسألة النقل باستخدام طريقة التخطي**

*بعد حساب التكاليف الحدية للخلايا خارج الأساس، نجد أن الخلية (5،1) مرشحة للدخول في الأساس لأن لديها أعظم تكلفة حدية سالبة بالقيمة المطلقة هي(−300).*

*ممرها:*

*الممر: (5،1)؛(5،3)؛(1،3)؛(1،1)،*

$Q_{31}=(400+200)-(800+100) = -300$

| المصب / المنبع | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | $D_4$ | $D_5$ | $a_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_1$ | 100<br>95 − | 800 | 100<br>145 | 500 | + 400 | 240 |
| $a_2$ | 500 | 500<br>130 | 300 | 600<br>30 | 700 | 160 |
| $a_3$ | + 200<br>25 | 900 | 500 | 900<br>95 | − 800<br>140 | 260 |
| $b_i$ | 120 | 130 | 145 | 125 | 140 | 660 |

**المصدر: من إعداد الباحث بناء على معطيات المثال**

لكن هل توصلنا للحل الأمثل، نقوم بحساب التكاليف الحدية للخلايا غير المستعملة لنجد: الخليتان (4،1) و(5،1) لهما نفس التكلفة الحدية السالبة فقط. لذلك يمكن إجراء خطوة تحسينية بإعداد الجدول رقم 4.

**جدول الحل الأساسي الرابع لمسألة النقل باستخدام طريقة التخطي**

| المصب / المنبع | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | $D_4$ | $D_5$ | $a_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_1$ | 100 | 800 | 100 / 145 | 500 | 400 / 95 | 240 |
| $a_2$ | 500 | 500 / 130 | 300 | 600 / 30 | 700 | 160 |
| $a_3$ | 200 / 120 | 900 | 500 | 900 / 95 | 800 / 45 | 260 |
| $b_i$ | 120 | 130 | 145 | 125 | 140 | 660 |

**المصدر: من إعداد الباحث بناء على معطيات المثال**

لكن هل توصلنا للحل الأمثل، نقوم بحساب التكاليف الحدية للخلايا غير المستعملة لنجد: أن كل تكاليفها الحدية إما موجبة أو معدومة لذلك نقول أن الجدول رقم 4 هو جدول الحل الأمثل. وعليه قيمة المتغيرات هي:

$$X_{13} = 145\ ;\ X_{15} = 95\ ;\ X_{22} = 130\ ;\ X_{24} = 30\ ;\ X_{31} = 120\ ;\ X_{34} = 95\ ;\ X_{35} = 45$$

**أما باقي المتغيرات فقيمها معدومة وعليه قيمة الدالة الاقتصادية هي:**

$$\begin{aligned} Z &= 100 \times 145 + 400 \times 95 + 500 \times 130 + 600 \times 30 + 200 \times 120 + 900 \times 95 \\ &\quad + 800 \times 45 \\ &= 14500 + 38000 + 65000 + 18000 + 24000 + 85500 + 36000 \\ &= 281000 Da \end{aligned}$$

**5-2-2-2- التوزيع المعدل (طريقة عوامل الضرب)MODI:** تستخدم هذه الطريقة لاختبار أمثلية الحل الأولي، وهي أكفأ من سابقتها(طريقة التخطي)، باعتبارها قادرة على تحديد المتغير غير الأساسي(الخلية غير المستعملة) الذي يساهم في تقليل مجموع تكاليف النقل مباشرة[1]. وتتلخص هذه الطريقة فيما يلي:

---

[1] – حامد سعد نور الشمرتي، علي خليل الزبيدي، مدخل إلى بحوث العمليات، الطبعة الأولى ، دار مجدلاوي للنشر والتوزيع، عمان، الأردن، 2007، ص 307.

أ. الخطوة الأولى إيجاد معاملات التكاليف للصفوف والأعمدة، حيث نفترض وجود مجهولين هما: $U_i$ نرمز به لكل سطر ، و $V_j$ نرمز به لكل عمود، حيث أن حاصل جمعهما بالنسبة للخلايا الداخلة في الحل يجب أن يساوي تكلفة نقل الوحدة الواحدة عبر تلك الخلايا.

أي أن: $C_{ij} = U_i + V_j$ ،

ثم إيجاد قيم المجاهيل $U_i$ و$V_j$ بجعل قيمة السطر الأول معدومة ($U_1=0$)؛

ب. أما الخطوة الثانية، فهي إيجاد التكاليف الحدية للمتغيرات غير الأساسية (الخلايا غير الداخلة في الحل الأساسي) عن طريق العلاقة التالية:

$$Q_{ij} = C_{ij} - U_i - V_j$$

ج. نختار الخلية غير المستعملة المقابلة لأكبر تكلفة حدية سالبة بالقيمة المطلقة حيث تكون مرشحة للدخول في الأساس، ويتم دراسة مسارها وفقا للقاعدة المعروفة في طريقة التخطي؛

د. إدخال الخلية إلى الأساس بإحداث تغييرات على طول قيم المتغيرات المتواجدة على زوايا المسار بإضافة وطرح أصغر قيمة متواجدة من بين الزوايا التي تحمل الإشارة (−)؛

هـ. يتم تكرار هذه العملية إلى غاية الوصول إلى جدول تكون فيه التكاليف الحدية للخلايا غير المستعملة موجبة أو معدومة عندها نكون قد تحصلنا على جدول الحل الأمثل.

# الفصل الخامس: مسائل النقل(تقليل التكاليف)

**مثال:** بالرجوع إلى المثال السابق وانطلاقا من جدول الحل الأساسي الأول المحصل عليه بطريقة الزاوية الشمالية الغربية المطلوب تحسين الحل باستخدام طريقة التوزيع المعدل.

**الحل:**

**الحل الأساسي الأول لمسألة النقل بطريقة الزاوية الشمالية الغربية**

| المصب / المنبع | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | $D_4$ | $D_5$ | $a_i$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_1$ | 100 / 120 | - 800 / 120 | + 100 | 500 | 400 | 240 | 0 |
| $a_2$ | 500 | + 500 / 10 | - 300 / 145 | 600 / 5 | 700 | 160 | -300 |
| $a_3$ | 200 | 900 | 500 | 900 / 120 | 800 / 140 | 260 | 0 |
| $b_i$ | 120 | 130 | 145 | 125 | 140 | 660 | |
| | 100 | 800 | 600 | 900 | 800 | | |

*إيجاد معاملات التكاليف للأسطر والأعمدة:*

*الصف الأول يفترض أنه يساوي الصفر*

*أي: $U_1=0$*

انطلاقا من الخلايا الداخلة في الحل:

$$U_1 + V_1 = 100 => V_1 = 100$$
$$U_1 + V_2 = 800 => V_2 = 800$$
$$U_2 + V_2 = 500$$
$$=> U_2 = 500 - V_2 = -300$$
$$U_2 + V_3 = 300$$
$$=> V_3 = 300 - U_2 = 600$$
$$U_2 + V_4 = 600$$
$$=> V_4 = 600 - U_2 = 900$$

**المصدر: من إعداد الباحث بناء على معطيات المثال**

$$U_3 + V_4 = 900 => U_3 = 900 - V_4 = 0 \ ; \quad U_3 + V_5 = 800 => V_5 = 800 - U_3 = 800$$

**ثانيا: إيجاد التكاليف الحدية للخلايا غير الدخلة في الحل الأساسي وفق العلاقة:**

$$Q_{ij} = C_{ij} - U_i - V_j$$

*الخلية (3،1)* $Q_{13} = C_{13} - U_1 - V_3 = 100 - 0 - 600 = -500$

*الخلية (4،1):* $Q_{14} = C_{14} - U_1 - V_4 = 500 - 0 - 900 = -400$

*الخلية (5،1):* $Q_{15} = C_{15} - U_1 - V_5 = 400 - 0 - 800 = -400$

*الخلية (1،2):* $Q_{21} = C_{21} - U_2 - V_1 = 500 - (-300) - 100 = +700$

*الخلية (5،2):* $Q_{25} = C_{25} - U_2 - V_5 = 700 - (-300) - 800 = +200$

*الخلية (1،3):* $Q_{31} = C_{31} - U_3 - V_1 = 200 - 0 - 100 = +100$

*الخلية (2،3):* $Q_{32} = C_{32} - U_3 - V_2 = 900 - 0 - 800 = +100$

*الخلية (3،3):* $Q_{33} = C_{33} - U_3 - V_3 = 500 - 0 - 600 = -100$

نلاحظ وجود تكلفة حدية سالبة ، إذا يمكن تحسين الحل باختيار الخلية التي تدخل الأساس المقابلة لأكبر تكلفة حدية سالبة بالقيمة المطلقة وهي الخلية (3،1). نشكل مسارها، ونجري تعديلات على الجدول الأول وذلك بإضافة وطرح أصغر كمية على رؤوس الزوايا السالبة وهي(120) في الخلية (2،1). ويتم إعداد الجدول الثاني:

**جدول الحل الأساسي الثاني لمسألة النقل باستخدام طريقة التوزيع المعدل**

| المصب / المنبع | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | $D_4$ | $D_5$ | $a_i$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_1$ | - 100 / 120 | 800 | + 100 / 120 | 500 | 400 | 240 | 0 |
| $a_2$ | 500 | 500 / 130 | 300 / 25 | + 600 / 5 | 700 | 160 | 200 |
| $a_3$ | 200 / ± | 900 | 500 | 900 / - 120 | 800 / 140 | 260 | 500 |
| $b_i$ | 120 | 130 | 145 | 125 | 140 | 660 | |
| | 100 | 300 | 100 | 400 | 300 | | |

*نفرض أن:* $U_1=0$

انطلاقا من الخلايا الداخلة في الحل:

$$U_1 + V_1 = 100 => V_1 = 100$$
$$U_1 + V_3 = 100 => V_3 = 100$$
$$U_2 + V_3 = 300$$
$$=> U_2 = 300 - V_3 = 200$$
$$U_2 + V_2 = 500$$
$$=> V_2 = 500 - U_2 = 300$$
$$U_2 + V_4 = 600$$
$$=> V_4 = 600 - U_2 = 400$$
$$U_3 + V_4 = 900$$
$$=> U_3 = 900 - V_4 = 500$$
$$U_3 + V_5 = 800$$
$$=> V_5 = 800 - U_3 = 300$$

**المصدر: من إعداد الباحث بناء على معطيات المثال**

- من جديد نختبر الحل إذا كان أمثلا أم لا:

**ثانيا: إيجاد التكاليف الحدية للخلايا غير الدخلة في الحل الأساسي وفق العلاقة:**

$$Q_{ij} = C_{ij} - U_i - V_j$$

*الخلية (2،1)* $Q_{13} = C_{12} - U_1 - V_2 = 800 - 0 - 300 = 500$

*الخلية (1،4):* $Q_{14} = C_{14} - U_1 - V_4 = 500 - 0 - 400 = 100$

*الخلية (5،1):* $Q_{15} = C_{15} - U_1 - V_5 = 400 - 0 - 300 = 100$

*الخلية (1،2):* $Q_{21} = C_{21} - U_2 - V_1 = 500 - 200 - 100 = 200$

*الخلية (5،2):* $Q_{25} = C_{25} - U_2 - V_5 = 700 - 200 - 300 = +200$

*الخلية (3،1):* $Q_{31} = C_{31} - U_3 - V_1 = 200 - 500 - 100 = -400$

$$Q_{32} = C_{32} - U_3 - V_2 = 900 - 500 - 300 = +100$$ :*الخلية (2،3)*

$$Q_{33} = C_{33} - U_3 - V_3 = 500 - 500 - 100 = -100$$ :*الخلية (3،3)*

إذا يمكن تحسين الحل باختيار الخلية التي تدخل الأساس المقابلة لأكبر تكلفة حدية سالبة بالقيمة المطلقة وهي الخلية (1،3). نشكل مسارها، ونجري تعديلات على الجدول الثاني وذلك بإضافة وطرح أصغر كمية على رؤوس الزوايا السالبة وهي(25) في الخلية(3،2). ويتم إعداد الجدول الثالث:

**جدول الحل الأساسي الثالث لمسألة النقل باستخدام طريقة التخطي**

| المصب / المنبع | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | $D_4$ | $D_5$ | $a_i$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_1$ | 100 − 95 | 800 | 100 145 | 500 | + 400 | 240 | 0 |
| $a_2$ | 500 | 500 130 | 300 | 600 30 | 700 | 160 | -200 |
| $a_3$ | + 200 25 | 900 | 500 | 900 95 | − 800 140 | 260 | 100 |
| $b_i$ | 120 | 130 | 145 | 125 | 140 | 660 | |
| | 100 | 700 | 100 | 800 | 700 | | |

*نفرض أن:* $U_1=0$

انطلاقا من الخلايا الداخلة في الحل:

$$U_1 + V_1 = 100 => V_1 = 100$$
$$U_1 + V_3 = 100 => V_3 = 100$$
$$U_3 + V_1 = 200$$
$$=> U_3 = 200 - V_1 = 100$$
$$U_3 + V_4 = 900$$
$$=> V_4 = 900 - U_3 = 800$$
$$U_2 + V_4 = 600$$
$$=> U_2 = 600 - V_4 = -200$$
$$U_2 + V_2 = 500$$
$$=> V_2 = 500 - U_2 = 700$$
$$U_3 + V_5 = 800$$
$$=> V_5 = 800 - U_3 = 700$$

**المصدر: من إعداد الباحث بناء على معطيات المثال**

- من جديد نختبر الحل إذا كان أمثلا أم لا:

**ثانيا: إيجاد التكاليف الحدية للخلايا غير الدخلة في الحل الأساسي وفق العلاقة:**

$$Q_{ij} = C_{ij} - U_i - V_j$$

$$Q_{13} = C_{12} - U_1 - V_2 = 800 - 0 - 700 = 100$$ *الخلية (2،1)*

$$Q_{14} = C_{14} - U_1 - V_4 = 500 - 0 - 800 = -300$$ :*الخلية (1،4)*

$$Q_{15} = C_{15} - U_1 - V_5 = 400 - 0 - 700 = -300$$ :*الخلية (5،1)*

$$Q_{21} = C_{21} - U_2 - V_1 = 500 - (-200) - 100 = 600$$ :*الخلية (1،2)*

$$Q_{23} = C_{23} - U_2 - V_3 = 300 - (-200) - 100 = 400$$ :*الخلية (3،2)*

$$Q_{25} = C_{25} - U_2 - V_5 = 700 - (-200) - 700 = +200$$ :*الخلية (5،2)*

$$Q_{32} = C_{32} - U_3 - V_2 = 900 - 100 - 700 = +100$$ :*الخلية (2،3)*

*الخلية (3،3):* $Q_{33} = C_{33} - U_3 - V_3 = 500 - 100 - 100 = 300$

إذا يمكن تحسين الحل باختيار الخلية التي تدخل الأساس المقابلة لأكبر تكلفة حدية سالبة بالقيمة المطلقة وهي الخلية (5،1). نشكل مسارها، ونجري تعديلات على الجدول الثالث وذلك بإضافة وطرح أصغر كمية على رؤوس الزوايا السالبة وهي(95) في الخلية(1،1). ويتم إعداد الجدول الرابع:

**جدول الحل الأساسي الرابع لمسألة النقل باستخدام طريقة التخطي**

| المصب / المنبع | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | $D_4$ | $D_5$ | $a_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_1$ | 100 | 800 | 100<br>145 | 500 | 400<br>95 | 240 |
| $a_2$ | 500 | 500<br>130 | 300 | 600<br>30 | 700 | 160 |
| $a_3$ | 200<br>120 | 900 | 500 | 900<br>95 | 800<br>45 | 260 |
| $b_i$ | 120 | 130 | 145 | 125 | 140 | 660 |

**المصدر: من إعداد الباحث بناء على معطيات المثال**

لكن هل توصلنا للحل الأمثل، نقوم بحساب التكاليف الحدية للخلايا غير المستعملة لنجد: أن كل تكاليفها الحدية إما موجبة أو معدومة لذلك نقول أن الجدول رقم 4 هو جدول الحل الأمثل. وعليه قيمة المتغيرات هي:

$$X_{13} = 145\ ;\ X_{15} = 95\ ;\ X_{22} = 130\ ;\ X_{24} = 30\ ;\ X_{31} = 120\ ;\ X_{34} = 95\ ;\ X_{35} = 45$$

**أما باقي المتغيرات فقيمها معدومة وعليه قيمة الدالة الاقتصادية هي:**

$$\begin{aligned} Z &= 100 \times 145 + 400 \times 95 + 500 \times 130 + 600 \times 30 + 200 \times 120 + 900 \times 95 \\ &\quad + 800 \times 45 \\ &= 14500 + 38000 + 65000 + 18000 + 24000 + 85500 + 36000 \\ &= 281000Da \end{aligned}$$

**حالات خاصة:**

- في حالة النموذج غير المتوازن أي في حالة عدم تساوي العرض و الطلب فإنه تتم إضافة الكمية المعروضة (في حالة العرض أقل من الطلب) في سطر جديد بتكاليف معدومة، أو إضافة الكمية المطلوبة في عمود جديد (في حالة الطلب أقل من العرض) في عمود جديد بتكاليف معدومة؛
- حالة التفكك أي عدد المتغيرات الداخلة في الحل لا يساوي ($m+n-1$)، وهو شرط أساسي لإيجاد مسارات اختبار الحل. حيث نلجأ إلى وضع خلية تصورية أو أكثر قيمتها ε بجوار الصفر ثم نقوم بإيجاد الحل ونهملها تماما في النهاية في أي جدول حصل التفكك.

**5-3- مسائل النقل في حالة تعظيم الأرباح والعوائد:**

لا تقتصر استخدامات مسائل النقل على حالة التدنئة. بل يتعدى ذلك إلى حالة التعظيم أيضا. حيث يتم فيها البحث عن أعظم ربح أو عائد في وجود نفس الشروط المعروضة في حالة التدنئة مع بعض الاختلاف، حيث أن دالة الهدف تكون في حالة التعظيم. كما يتم استبدال تكاليف نقل الوحدة الواحدة بالربح المحصل عليه جراء نقل الوحدة الواحدة.

**5-3-1- صياغة البرنامج:** إذا كان الربح المحصل عليه جراء نقل وحدة واحدة من المنبع $i$ نحو المصب $j$ هو $P_{ij}$ ، والكميات المنقولة $X_{ij}$ ، و$a_i$ كميات العرض لكل منبع، و $b_j$ كميات الطلب لكل مصب، فإن البرنامج الخطي الرياضي لمسألة النقل يكتب:

$$Max\ Z = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p_{ij} \times X_{ij}$$

$$s/c \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} X_{ij} = a_i \\ \sum_{i=1}^{m} X_{ij} = b_j \\ \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \\ X_{ij} \geq 0 \ ;\ p_{ij} \geq 0 \end{cases}$$

حيث

$j = 1,2,3, \dots, n$

$i = 1,2,3, \dots, m$

$n$ عدد المصبات

$m$ عدد المنابع

**5-3-2 حل مسائل النقل:** يتم أيضا إيجاد جدول الحل الأساسي الأول، إما بطريقة الزاوية الشمالية الغربية، أعلى عائد (المقابلة لأدنى تكلفة في حالة التدنئة) أو بطريقة فوقل.

ثم تحسين الحل إما بطريقة التخطي أو طريقة التوزيع المعدل. حيث يتم اختيار الخلية التي تدخل الأساس التي تعطي أكبر عائد حدي موجب (مقابل أقل تكلفة في الاتجاه السالب). ونحصل على الحل الأمثل عندما تعطي جميع الخلايا غير الداخلة في الحل عوائد حدية سالبة أو معدومة.

**ملاحظات:**

تختلف هذه حالة التعظيم عن حالة التدنئة في النقاط التالية:[1]

- عند استخدام طريقة التكلفة كان يتم اختيار أقل تكلفة بهدف تخفيض التكاليف، أما في حالة الأرباح فيتم اختيار أكبر خلية في الجدول لنبدأ الحل بها، و تسمى هذه الطريقة بطريقة تعظيم الأرباح؛
- عند استخدام طريقة فوجل التقريبية كان يتم حساب الفرق بين أصغر تكلفتين لكل سطر و عمود وذلك بهدف تخفيض التكاليف، أما في حالة التعظيم فيتم حساب الفرق بين أكبر رقمين لكل سطر وعمود ويلي ذلك اختيار أكبر فرق، ليتم بعدها تحديد الخلية الكبرى؛
- عند استخدام طرق تحسين الحل يتم تقييم و اختيار الخلية التي تحمل أكبر قيمة موجبة؛
- الحل الأمثل يكون عند الحصول على قيم جبرية سالبة أو معدومة للخلايا الفارغة.

[1] صوار يوسف، طاوش قندوسي، **مرجع سبق ذكره**، ص 116.

# الفصل السادس :
# مدخل إلى البرمجة غير الخطية

# الفصل السادس: مدخل إلى البرمجة غير الخطية

**6-1- تقديم:** إذا كانت دالة الهدف أو أحد قيود مسألة البرنامج الرياضي من الدرجة الثانية فما فوق لأحد المتغيرات $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ، فإننا ندعوها مسألة برمجة غير خطية.

عادة أساليب حل مسائل البرمجة غير الخطية أعقد بكثير من البرمجة الخطية وتتطلب غالبا فرض قيود إضافية لحلها.

**6-2- البرامج غير الخطية بقيود:** عادة ما يشتمل البرنامج غير الخطي بقيود على دالة الهدف والقيود التي يمكن أن تكون في صورة معادلات أو متراجحات.

**مثال 01):** إليك البرنامج الرياضي التالي:

$$Max: Z = (X_1 - 2)^2 + (X_2 - 3)^2$$

$$s/c \begin{cases} X_1 + 2X_2 \leq 12 \\ X_1 + X_2 \leq 9 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

**الحل:** نلاحظ أن دالة الهدف غير خطية. فهذا البرنامج يعد برنامجا غير خطيا ومتضمنا قيودا خطية في صورة متراجحات.

**مثال 02):** ليكن لدينا البرنامج الرياضي التالي:

$$Min: Z = {X_1}^2 + {X_2}^2 + {X_3}^2 + {X_4}^2$$

$$s/c \begin{cases} X_1 + 2X_2 + 3X_3 + 5X_4 - 10 = 0 \\ X_1 + 2X_2 + 5X_3 + 6X_4 - 15 = 0 \end{cases}$$

**الحل:** نلاحظ أن دالة الهدف غير خطية. فهذا البرنامج يعد برنامجا غير خطيا ومتضمنا قيودا خطية في صورة معادلات.

**مثال 03):** ليكن لدينا البرنامج الرياضي التالي:

$$Min: Z = X_1 + \frac{1}{2}X_2$$

$$s/c \begin{cases} {X_1}^2 + X_2 - 3 \leq 0 \\ X_2 - 1 \leq 0 \\ -X_1 \leq 0 \end{cases}$$

نلاحظ أن الأول متراجحة غير خطية. فهذا البرنامج يعد برنامجا غير خطيا ومتضمنا قيودا في صورة متراجحات.

**6-3- البرامج غير الخطية بدون قيود(غير متضمنة قيود):** قد يصادفنا في الحياة العملية مسائل تتبع البرمجة غير الخطية نبحث فيها عن القيمة العظمى أو الدنيا لدالة هدف Z تتضمن مجموعة من المتغيرات $X_1, X_2, \ldots, X_n$ يمكنها أن تأخذ القيم من $-\infty$ إلى $+\infty$ أي أنه لا يوجد أي قيد على أي متغير من متغيرات البرنامج. فالبرنامج يقتصر على دالة الهدف فقط[1].

**أمثلة:**

$$1)\quad Z = \left(X_1{}^2 - 1\right)^3 \quad \forall\, X_1 \in R$$

$$2)\quad Z = X_1{}^4 + X_2{}^4 \quad \forall\, X_1 \in R^2$$

$$3)\quad Z = X_1{}^3 - X_1 \quad \forall\, X_1 \in R$$

**6-4- الطريقة البيانية لحل مسائل البرمجة غير الخطية:** يمكن توضيح الطريقة البيانية لحل البرنامج غير الخطي من خلال عرض الأمثلة التالية:

**مثال 01):** حل بيانيا البرنامج غير الخطي التالي[2]:

$$Min: Z = (X_1 - 2)^2 + (X_2 - 3)^2$$

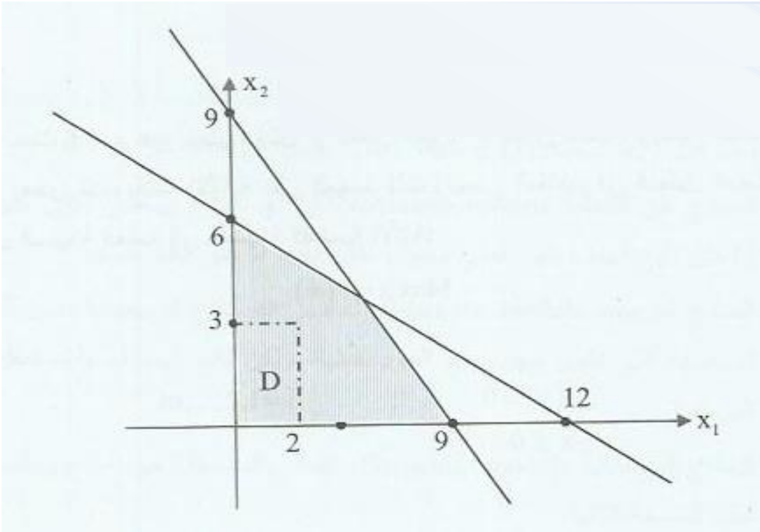
$$s/c\begin{cases} X_1 + 2X_2 \leq 12 \\ X_1 + X_2 \leq 9 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

**الحل:** نلاحظ أن دالة الهدف غير خطية. فهذا البرنامج يعد برنامجا غير خطيا.

أما الحل البياني فيمكن الوصول إليه من خلال تمثيل المستقيمات المولدة في معلم متعامد ومتجانس لتحدد لنا منطقة الحلول الممكنة كما يوضحه الشكل التالي:

[1] - Fabian Bastin, Op.Cit , P36.

[2] - محمد دباس الحميد، مرجع سبق ذكره، ص 254.




ثم يتم بعد ذلك تمثيل دالة الهدف وهي عبارة عن دائرة مركزها A(2,3) ونصف قطرها $r = \sqrt{Z}$ .

من الشكل نلاحظ أن أصغر قيمة تأخذها دالة الهدف عندما تكون Z=0 . أي مركز الدائرة وهي النقطة A(2,3).

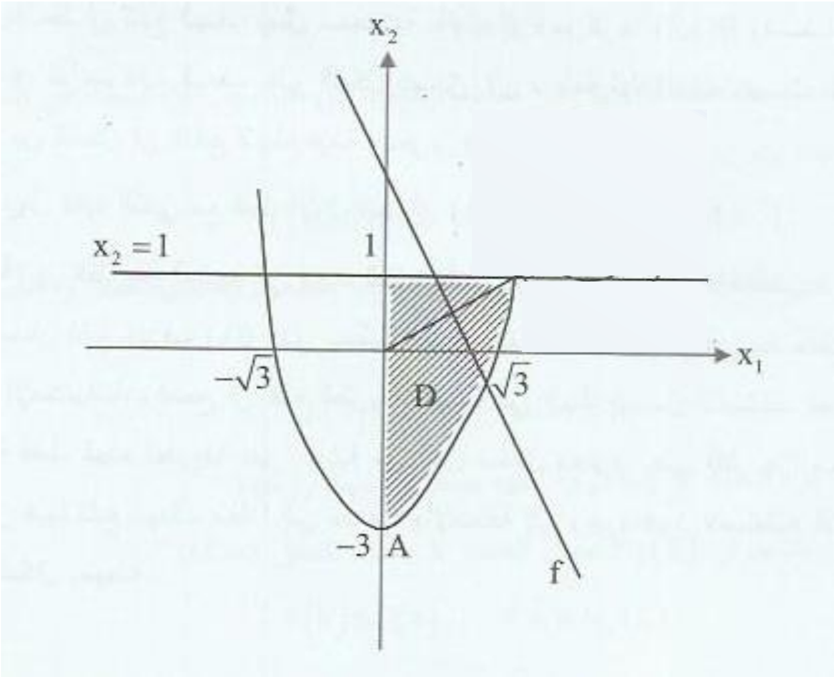
**مثال 02):** حل بيانيا البرنامج غير الخطي التالي[1]:

$$Min: Z = X_1 + \frac{1}{2}X_2$$

$$s/c\begin{cases} {X_1}^2 + X_2 - 3 \leq 0 \\ X_2 - 1 \leq 0 \\ -X_1 \leq 0 \end{cases}$$

الحل: نلاحظ أن القيد الأول $ {X_1}^2 + X_2 - 3 \leq 0$ عبارة عن معادلة قطع مكافئ. وعند أخذ نقطة من داخل القطع ولتكن (0,0) ونعوض في القيد الأول فنجد أن القيد محقق وبالتالي جميع النقاط الواقعة داخل القطع تحقق أيضا القيد الأول. ومن ثم يمكن تحديد منطقة الحلول الممكنة ولنوجد الحل الأمثل كما هو موضح في الشكل التالي:

[1] - محمد دباس الحميد، مرجع سبق ذكره، ص 255، بتصرف



$x_2$
$x_2 = 1$
1
$x_1$
$-\sqrt{3}$
$\sqrt{3}$
D
$-3$ A
f

نلاحظ أن دالة الهدف تكون عند أدنى قيمة لها عند النقطة A(0,-3) وبالتالي $Z = -\frac{3}{2}$

# الخاتمـــــة

## الخاتـــمة:

تعتبر مادة رياضيات المؤسسة من المواد المهمة في تكوين الطالب في شعبة العلوم التجارية فهي تكمل جانبا مهما في معارف الطالب وهو البحث في أمثلية استخدام الموارد. الذي يعالج الكثير من المشاكل التي تعترض المؤسسات الاقتصادية.

ولاكتساب المعارف والمفاهيم يجب أن يتمتع الطالب باكتساب مهارات في الرياضيات والجانب الإحصائي تمكنه من فهم مختلف محاور المادة. التي جاءت ضمن هذه المطبوعة حيث تمت معالجتها في خمسة فصول أساسية يكتسب من خلالها تكوينا يمكنه من فهم أهم الأساليب والطرق التي عالجت إشكاليات أمثلية الاستخدام للموارد.

# فهرس المحتويات

# فهـــــــرس المحتويات:

# فهـــــــرس المحتويات:

# فهـــــــرس المحتويات:

# قائمة المراجع

## قائمة المراجع:


1. حامد سعد نور الشمرتي، علي خليل الزبيدي، مدخل إلى بحوث العمليات ، الطبعة الأولى ، دار مجدلاوي للنشر و التوزيع، عمان، الأردن، 2007.
2. سالم إلياس، مطبوعة بعنوان: محاضرات في مقياس رياضيات المؤسسة، جامعة محمد بوضياف، المسيلة، 2016-2017.
3. سهيلة عبد الله سعيد، الجديد في الأساليب الكمية و بحوث العمليات، الطبعة الأولى ، دار الحامد للنشر و التوزيع، عمان، الأردن، 2007.
4. صوار يوسف، طاوش قندوسي، محاضرات في البرمجة الخطية – تمارين محلولة باستعمال برنامج Q.S.B- كلية العلوم الاقتصادية التجارية و علوم التسيير، جامعة الدكتور الطاهر مولاي، سعيدة، ديوان المطبوعات الجامعية، وهران، الجزائر، دون سنة نشر.
5. فتيحة بلجيلالي، محاضرات في مقياس رياضيات المؤسسة، كلية العلوم الاقتصادية التجارية وعلوم التسيير، ملحقة قصر الشلالة، جامعة ابن خلدون تيارت، الجزائر، 2017-2018.
6. لحسن عبد الله باشيوة ، بحوث العمليات ، دار اليازوري ، عمان الأردن، 2011.
7. محمد أحمد الطراونة، سليمان خالد عبيدات، مقدمة في بحوث العمليات،ط2، دار المسيرة، عمان، الأردن، 2010م -1431هـ.
8. محمد دباس الحميد ، البرمجة الرياضية، منشورات جامعة حلب، كلية الهندسة المعلوماتية، مديرية الكتب والمطبوعات الجامعية، جامعة حلب 2010.
9. محمد راتول، بحوث العمليات، الطبعة الثالثة، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 2008.
10. يحياوي إلهام، محاضرات مقياس رياضيات المؤسسة، كلية العلوم الاقتصادية، التجارية وعلوم التسيير، جامعة الحاج لخضر، باتنة، دون سنة النشر.
11. Fabian Bastin, Modèles de recherche opérationnelles, Département d'informatique et de recherche opérationnelle, Université de Montréal, IFT-1575, Hiver 2010.