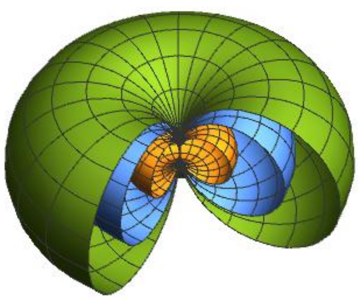
Université de Ghardaia
Département des Mathématiques et de l'Informatiques

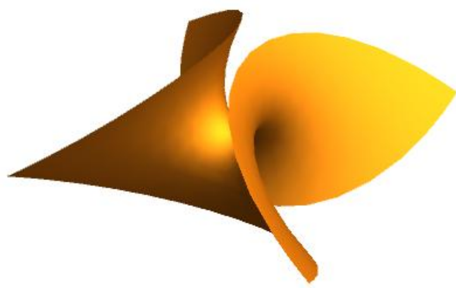
Cours 3ème Licence Mathématiques

Introduction
à la Géométrie Différentielle

Dr. Abdelouahab CHIKH-SALAH

e.mail : chikhsalah.abdelouahab@univ-ghardaia.dz





Année : 2025

Table des matières

Table des figures

Table des notations

$\mathbb{R}^n$	Espace vectoriel de dimension n des nombres réels.
M^n ou M	Variété différentielle de dimension n.
$\mathcal{V}(a)$	L'ensemble des voisinages du point a.
$C^k(M)$	L'ensemble de toutes les fonctions de classe C^k sur M.
$C^\infty(M)$ ou C^∞	L'ensemble de toutes les fonctions de classe C^∞ sur M.
$\mathcal{L}(E,F)$	L'ensemble des applications lineaires continues de E dans F
$\mathcal{D}^n$ ou $\mathcal{D}$	L'ensemble des fonctions différentiables sur M.
T_pM	Espace tangent de M en p.
$\{e_1, \cdots, e_n\}$	La base canonique de $\mathbb{R}^n$.
$\{e_1^*, \cdots, e_n^*\}$	La base dual canonique de $\mathbb{R}^n$.
$\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_1}\}$	La base canonique orthonormal de T_pM.
$X, Y, Z, X_i, \ldots$	Champs de vecteurs de M.
$[X,Y]$	Crochet de Lie des champs de vecteurs X et Y.
T_p^*M	Espace co-tangent de M en p.
TM	Fibré tangent de M.
$\{dx_1, \ldots, dx_n\}$	La base canonique orthonormal de TM.
ω	Une forme différentielle.
$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x),\ \partial_{x_i} f(x),\ \partial_i f(x)$	La dérivée directionnelle de f dans la direction de e_i au point x.
df_a ou Df_a	La différentielle de f en point a.
df ou Df	La différentielle de f.
$\mathfrak{X}(M)$ ou $\Gamma(M)$	L'ensemble des champs de vecteurs de M.
$\mathbb{S}^n$	la sphère de dimension n.
γ	Courbe différentielle sur M.
$\bigotimes^k E^*$	L'ensembles des k-formes linéaire sur E.
$\bigwedge^k E^*$	L'ensembles des k-formes linéaire alternée sur E.
$T \otimes L$	Produit tensoriel des deux formes T et L.
$T \wedge L$	Produit extérieur des deux formes alternées T et L.
$\alpha, \beta, \ldots$	Formes differentielles.
$\Omega^k(U)$	L'ensemble des k-formes différentielles sur un ouvert U.
f^*	Le Pulback de l'application f.

Introduction

La géométrie différentielle est une branche des mathématiques qui combine les techniques de la géométrie et de l'analyse pour étudier les propriétés des courbes, des surfaces et des structures plus générales dans des espaces dits « différentiables », comme les variétés. Elle est apparue pour comprendre des objets géométriques complexes en utilisant des outils de calcul différentiel, ce qui permet de les analyser localement comme des objets euclidiens.

Notions de base
Variétés différentiables : Une variété est un espace qui, localement, ressemble à un espace euclidien de dimension donnée. Par exemple, la surface d'une sphère est une variété de dimension 2, car localement, elle ressemble à un plan. Les variétés permettent de généraliser la notion de surface et de courbe dans des dimensions plus élevées.

Applications différentiables :
Ce sont des fonctions entre variétés qui possèdent des dérivées continues. Ces fonctions permettent de comparer des variétés et d'étudier comment elles se transforment les unes par rapport aux autres.

Vecteurs tangents et espaces tangents :
En tout point d'une variété, on peut définir un espace tangent, qui est une approximation locale de la variété autour de ce point. Les vecteurs tangents, qui appartiennent à cet espace, représentent les directions possibles de déplacement sur la variété.

Formes différentielles et intégration :
Une forme différentielle est un outil mathématique permettant de généraliser la notion de fonction, en intégrant sur des objets de dimension supérieure. Cela mène à des résultats puissants comme le théorème de Stokes, qui relie l'intégration sur une région à celle sur son bord, généralisant ainsi le théorème fondamental du calcul intégral.

Variétés et cartes locales
Au cœur de la géométrie différentielle se trouve le concept de variété, qui généralise les courbes et surfaces en dimensions supérieures. Une variété de dimension n est un espace qui, localement, ressemble à un espace euclidien de dimension n (comme une surface plane ou un espace à trois dimensions). Par exemple, la surface d'une sphère est une variété de dimension 2 qui peut être décrite localement comme un plan, même si globalement elle a une courbure positive. Les cartes locales et les atlases sont utilisés pour décrire ces variétés en découpant l'espace en petits morceaux, chacun ressemblant

à un espace euclidien simple.

Courbes, surfaces et métriques
Les objets de base de la géométrie différentielle incluent les courbes et surfaces. Une courbe est une variété de dimension 1, tandis qu'une surface est une variété de dimension 2. Pour analyser la "forme" de ces objets, on introduit une métrique, qui mesure les distances et angles à l'intérieur de la variété. Par exemple, dans une sphère, la métrique détermine la façon dont on mesure les distances le long de sa surface incurvée. Cela permet de définir des concepts comme la courbure, qui décrit l'étendue de l'incurvation d'une surface ou d'une variété.

Applications de la géométrie différentielle
La géométrie différentielle est centrale en physique théorique, notamment en relativité générale où l'espace-temps est modélisé comme une variété courbée. Elle est également utilisée en mécanique, en théorie des systèmes dynamiques, et dans l'étude des surfaces en géométrie.

En conclusion, la géométrie différentielle offre une vue riche et profonde des objets géométriques à travers le prisme de la dérivation et de l'intégration. Elle constitue un domaine fondamental pour les mathématiques appliquées et théoriques.

Ce cours est une initiation à la géométrie différentielle, dans lequel je donne une introduction très simple et des donnés général, la plupart du temps sans démonstration, car le cours est destiné au étudiants de Licence Mathématiques et de Master non Géomètre

Dans notre cas, sont des spécialités L3 : Analyse et M2 : Analyse Fonctionnelle à l'université de Ghardaia.

A.Chikh-Salah

Chapitre 1

Calcul différentiel

1.1 Introduction

L'idée du calcul différentiel est d'approcher au voisinage d'un point une fonction f par une fonction plus simple (ou d'approcher localement le graphe de f par un espace plus simple).

Une fois les notations assimilées, les méthodes et les résultats du calcul différentiel sont naturels : ce sont les mêmes que pour l'étude des fonctions d'une variable réelle.

On est ainsi amené à étudier la restriction des fonctions le long d'une droite comme, par exemple, pour démontrer les formules de Taylor. Aussi à généraliser les outils familiers en dimension 1 comme les changements de variables, l'inégalité des accroissements finis, ... etc.

Pour toute la suite E , F et G désignent des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie, et $\| \cdot \|_E$, $\| \cdot \|_F$, $\| \cdot \|_G$ leurs normes respective.

Définition 1.1.1 (Application affine) *Une application f de E dans F est dite **application affine** s'il existe une application linéaire A de E dans F, et un vecteur b de F tel que :*

$$\forall x \in E : \qquad f(x) = A(x) + b.$$

1.2 Différentielles

Intuitivement : Une applications $f : E \to F$ est différentiable en un point a de E, si elle peut être approchée au voisinage de a par une application affine.

Graphiquement : le graphe de f ressemble localement à un espace affine (ou un espace plat) T_a.

Définition 1.2.1 *Soit f une application de E dans F et U un ouvert de E. Soit $a \in U$. On dit que f est **différentiable** au point a Si :*

- *Il existe une application linéaire continue $L \in \mathcal{L}(E, F)$.*
- *Il existe une application $\epsilon : U \to F$ tel que $\lim\limits_{x \to a} \epsilon(x) = 0$.*

Tel que

$$\forall x \in U, \quad f(x) = f(a) + L(x - a) + \epsilon(x).\|x - a\|_E.$$

Définition équivalente :

Définition 1.2.2 *Soit f une application de E dans F et U un ouvert de E. Soit $a \in U$. On dit que f et **différentiable** au point a Si :*

Il existe une application linéaire continue $L \in \mathcal{L}(E, F)$, tel que

$$\forall x \in U, \quad \lim_{x \to a} \frac{\|f(x) - f(a) - L(x-a)\|_F}{\|x-a\|_E} = 0.$$

Ou encore, on posant $x - a = h$:

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{\|f(a+h) - f(a) - L(h)\|_F}{\|h\|_E} = 0.$$

Proposition 1.2.1 *Soit $f : E \to F$ avec les conditions des définitions présidentes :*

1. *L'application L si elle existe, alors elle est unique.*
2. *Si f est différentiable alors elle est continue.*

Définition 1.2.3 *Soit $f : E \to F$ avec les conditions des définitions présidente, Si f est différentiable au point a, on dit que L est **la différentielle de f en** a, et on la note df_a ou Df_a.*

Définition 1.2.4 (La différentielle)

1. *On dit que l'application f est différentiable sur U si elle différentiable en tout point de U.*
2. *On appelle **la différentielle** de f, l'application :*

$$\begin{aligned} df :\ U &\longrightarrow \mathcal{L}(E, F) \\ a &\longmapsto df_a \end{aligned}$$

3. *Si df est continue on dit que f est **continument différentiable**, et que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.*

Exemples :

1. Soit $f : U \to F$ une application constante, (i.e. : $\exists c \in F, \forall x \in U : f(x) = c$), alors
$$\forall a \in U,\ df_a = 0.$$
2. Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ (i.e. f est une application linéaire), alors f est continument différentiable en tout point a de E et
$$df_a = f.$$
3. Si $f : E \times E \to F$ est bilinéaire (i.e. linéaire pour chaques variables), alors f est continument différentiable et
$$\forall (a_1, a_2), (h_1, h_2) \in E \times E : \quad df_{(a_1,a_2)}(h_1, h_2) = f(a_1, h_2) + f(h_1, a_2).$$

1.2.1 Opérations sur la différentielle

Proposition 1.2.2 *Soient $f : U \subset E \to F$ et $g : V \subset E \to F$ deux applications différentiables et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors :*

1. *$f + g$ est différentiable sur $U \cap V$ et :*
$$d(f+g) = df + dg,$$
$$i.e. \quad \forall a \in U \cap V,\ \forall h \in E :\ d(f+g)_a(h) = df_a(h) + dg_a(h).$$
2. *λf est différentiable sur U et*
$$d(\lambda f) = \lambda df \quad i.e. \quad \forall a \in U\ ,\ \forall h \in E :\ d(\lambda f)_a(h) = \lambda df_a(f).$$

Définition 1.2.5 (La différentielle d'applications composées)
Soient $f : U \subset E \to F$ et $g : V \subset F \to G$ deux applications différentiables, et $f(U) \subset V$, alors $g \circ f$ est différentiable et
$$\forall a \in U, \quad d(g \circ f)_a = dg_{f(a)} \circ df_a.$$
i.e. $\forall a, h \in U$:
$$d(g \circ f)_a(h) = dg_{f(a)}\left(df_a(h)\right).$$

1.2.2 Cas des Réels

dans cette partie on prend $E = \mathbb{R}^p$ et $F = \mathbb{R}^q$.
Et que $\{e_1, \dots e_n\}$ la base canonique $\mathbb{R}^n$, avec $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$. (1 à la i-ème composante) c.a.d :
$$e_i = (x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} x_j = 0 & si \quad j \neq i \\ x_j = 1 & si \quad j = i \end{cases}.$$
Pour tout $x \in E$ et pour tout $y \in F$, on leurs composantes : $x = (x_1, \dots, x_p)$ et $y = (y_1, \dots, y_q)$ respectivement.

Dérivées partielles
Soit $f : U \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ différentiable, On définit l'application g_i par
$$\begin{aligned} g_i :\ U_i \subset \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^q \\ t &\longmapsto f(x_1, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_p) \end{aligned}$$
avec les x_j fixés. Cette application est dérivable en x_i et
$$g_i'(x_i) = df_x(e_i)$$
elle est dite la ***dérivée directionnelle*** de f dans la direction de e_i au point x. elle est notée :
$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \quad ou \quad \partial_{x_i} f(x) \quad ou \quad \partial_i f(x).$$

Elle est données par : pour tous $i \in \{1, \dots, p\}$

$$\begin{aligned} \partial_i f: \ U &\longrightarrow \mathbb{R}^q \\ x &\longmapsto \partial_i f(x) \end{aligned}$$

Plus général :

$$df_x(h) = df_x(\sum_{p}^{i=1} h_i e_i) = \sum_{p}^{i=1} h_i df_x(e_i) = \sum_{p}^{i=1} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x).$$

Proposition 1.2.3

1. *Puisque $F = \mathbb{R}^q$ d'ou : $f = (f_1, \dots, f_q)$ alors :*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(x), \dots, \frac{\partial f_q}{\partial x_i}(x) \right).$$

2. *L'existence de toutes les dérivées partielles n'implique pas en général que f est différentiable.*

Matrice Jacobienne

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^p \to F = \mathbb{R}^q$ différentiable au point x, et $f = (f_1, \dots, f_q)$, on définit la ***matrice Jacobienne*** de f dans la base canonique par :

$$Df(x) = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(x) & \cdots & \partial_p f_1(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 f_q(x) & \cdots & \partial_p f_q(x) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R}).$$

Pour un $h = (h_1, \dots, h_p) \in U$, on a : $df_x(h) = Df(x).^t(h_1, \dots, h_p)$.

$$df_x(h) = Df(x).^t(h_1, \dots, h_p) = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(x) & \cdots & \partial_p f_1(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 f_q(x) & \cdots & \partial_p f_q(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_p \end{pmatrix}.$$

Remarques : Si $p = q$,

- Le déterminant de $Df(x)$ est dit le **Jacobien** de f, noté

$$Jac\, f_x := \det(Df(x)).$$

- df_x est un isomorphisme $\iff$ $Jac\, f_x \neq 0$.

Théorème 1.2.1 *Soit une application $f : U \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, tel que $f = (f_1, \cdots, f_q)$, alors*
f est continument différentiable si et seulement si toutes les dérivées partielles des f_i existent et sont continues sur U.

1.2.3 Différentielles secondes et supérieurs

Définition 1.2.6 *soit $f : U \subset E \to F$ une application différentiable en $a \in U$, de différentielle df_a.*

*On dit que f est **deux fois différentiables** en a, ou que f admet une **différentielle seconde** en a, si l'application différentielle df est différentiable en a, notée d^2f_a et cette deuxième différentielle est donnée par :*

$$d^2 f_a := d(df)_a.$$

tel que $d^2f_a \in \mathcal{L}(E; \mathcal{L}(E, F))$ qui est équivalant aux applications bilinéaires de $E \times E$ dans F et

$$d^2 f_a(h, k) := \Big(d(df)_a(h)\Big)(k), \quad h, k \in E.$$

Définition 1.2.7 *La **différentielle d'ordre** k de f en $a \in E$ est la différentielle de $d^{k-1}f$ en a (par récurrence), notée $d^k f_a$*

$$d^k f_a := d(d^{k-1}f)_a.$$

On dit que f est de classe $\mathcal{C}^k$ en a sur $U \subset E$ si $d^k f$ existe en tous points de U est continue.

Théorème 1.2.2 (Théorème de Schwartz) *Si une application $f : E \to F$ est deux fois différentiable en un point $a \in E$, et elle est continue, (c.a.d : de classe $\mathcal{C}^2$) alors l'application $d^2f_a : E \times E \to F$ est bilinéaire et symétrique.*

Cas des Réels :
Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ alors $j, k = 1, \ldots, n$ alors les deuxièmes dérivées partielles sont données par :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right) & si \quad j \neq k \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) & si \quad j = k \end{cases}.$$

Corrolaire 1.2.1 *Par le théorème 1.2.2, si une fonction $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ en $a \in \mathbb{R}^p$ alors sa matrice hessienne en ce point est symétrique (la matrice jacobienne de df en a)*

$$\forall i, j \in \{1, 2, \cdots, p\} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}(a).$$

1.2.4 Homéomorphismes et difféomorphismes

Soient E et F deux espaces vectoriels, $U \subset E$ et $V \subset F$ des ouverts, et $f : U \subset E \to V \subset F$ une application.

Définition 1.2.8 *On dit que :*

- *f est un **homéomorphisme** si f est bijective et si f et f^{-1} sont continues.*
- *f est un **difféomorphisme** si f est bijective et f et f^{-1} sont de classe $\mathcal{C}^1$.*

- *f est un **difféomorphisme de classe** $\mathcal{C}^k$ si f est bijective et f et f^{-1} sont de classe $\mathcal{C}^k$.*
- *f est **difféomorphisme local** en $a \in U$, s'il existe $U_a \subset U$ ouvert contenant a tels que la restriction de f à U_a, $f_{|U_a} : U_a \to f(U_a)$ soit un difféomorphisme.*

Proposition 1.2.4 .

- *la composition de deux difféomorphismes de classe $\mathcal{C}^k$ est un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^k$.*
- *L'ensemble des difféomorphismes de classe $\mathcal{C}^k$ d'un ouvert $U \in E$ sur lui-même forme un groupe par rapport à l'opération de composition*

1.3 Théorème des inversions locales

1.3.1 Applications lipschitziennes, contractions

soient E et f deux espaces vectoriels normés, et soit φ une application de E sur F.

Définition 1.3.1 *φ est k-**lipschitzienne** si il existe une constante k strictement positive telle que*

$$\forall (x, y) \in E^2, \ \|\varphi(x) - \varphi(y)\|_F \leq k\|x - y\|_E.$$

Définition 1.3.2 *Soit $\varphi : E \to F$*

- *On dit que φ est **lipschitzienne** s'il existe $k \geq 0$ et φ est k-lipschitzienne.*
- *S'il existe de tels k alors le plus petit d'entre eux existe et est appelé la **constante de Lipschitz** de φ.*
- *On note $Lip(\varphi)$ cette constate et on a*

$$Lip(\varphi) = \sup_{x \neq y} \left(\frac{\|\varphi(x) - \varphi(y)\|_F}{\|x - y\|_E} \right).$$

- *φ est dite **contractante** si φ est k-lipschitzienne et $k \in [0, 1[$.*
- *φ est dite **localement lipschitzienne** si pour tout point x de E, il existe un voisinage V de x tel que la restriction de φ à V soit lipschitzienne (pour une certaine constante k qui peut dépendre de V, donc de x).*

Remarques :

- Toute fonction lipschitzienne est uniformément continue.
- Toute fonction localement lipschitzienne est continue.
- Sur un espace compact, toute fonction localement lipschitzienne est lipschitzienne.

Proposition 1.3.1 *Une contraction ϕ d'un espace métrique complet possède un unique point fixe.*

Proposition 1.3.2 *Soit $\psi : \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une contraction définit sur un ouvert $\mathcal{O}$ avec sa constante de Lipschitz λ.*

Alors l'application $\varphi : x \in \mathcal{O} \mapsto x + \psi(x)$ est un homéomorphisme sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

En plus l'homéomorphisme inverse est lipschitzien avec la constante de Lipschitz inférieur à $(1 - \lambda)^{-1}$.

1.3.2 Théorème d'inversion locale (cas des Réels)

Théorème 1.3.1 *Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^k$, $k \geq 1$, définie sur une partie ouverte U de $\mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Et a un point de U ; Si la différentielle df_a est un isomorphisme linéaire(Inversible), Alors f est un difféomorphisme local de classe $\mathcal{C}^k$, e.i.*

il existe un voisinage ouvert de a $V_a \in \mathcal{V}(a)$, avec $a \in V_a \subset U$ tel que :
$f : V_a \to f(V_a)$ est un difféomorphisme de $\mathcal{C}^k$.

Comme application direct de ce théorème on a les cas particuliers :

Théorème 1.3.2 *Soit f une application de classe $\mathcal{C}^1$ d'un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$, $(n \leq m)$. On suppose que $0 \in U$ et que df_0 est* ***injective****. Alors*
il existe un ouvert $V \subset \mathbb{R}^m$, avec $0 \in V$,
il existe un ouvert $U' \subset U$, tel que $f(U') \subset V$,
il existe un difféomorphisme ϕ sur son image tels que :

$$\phi(f(x_1, \cdots, x_n)) = (x_1, \cdots, x_n, 0, \cdots, 0).$$

Théorème 1.3.3 *Soit f une application de classe $\mathcal{C}^1$ d'un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$, $(n \geq m)$. On suppose que $0 \in U$ et que df_0 est* ***surjective****. Alors*
il existe un ouvert $W \subset \mathbb{R}^n$, avec $0 \in V$,
il existe un difféomorphisme ψ de W sur son image tels que $\psi(W) \subset U$ et :

$$f(\psi(x_1, \cdots, x_n)) = (x_1, \cdots, x_m).$$

1.3.3 Théorème d'inversion locale

Soient E, F deux espaces vectoriels, $U \subset E$ une partie ouverte.

Théorème 1.3.4 *Soit $f : U \subset E \to F$ une application de classe $\mathcal{C}^k$ $(k \geq 1)$, et $a \in U$, on suppose que Df_a soit inversible (isomorphisme linéaire), alors*
f est un difféomorphisme local en a de classe $\mathcal{C}^k$.

e.i. $\exists U_a \subset U$ voisinage ouvert de a tels que : $f_{|U_a} : U_a \to f(U_a)$ est un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^k$.

1.4 Théorème des fonctions implicites

Le but est d'étudier les ensembles de $\mathbb{R}^n$ (plus généralement dans des espaces vectoriels) défini par une équation de la forme

$$F(x_1, \cdots, x_n) = 0.$$

On sait déjà étudier quelques cas simples. Par exemple, on est capable de représenter les ensembles de $\mathbb{R}^2$ d'équations

$$f_1(x, y) = 2x + 5y - 4 = 0, \quad f_2(x, y) = y - x\sin(x^2)x - 5x = 0$$

$$f_3(x,y) = x - tg(y)y = 0$$

le plus simple pour étudier l'ensemble considéré est de réécrire f_1, f_2 sous la forme $y = \phi_1(x)$, $y = \phi_2(x)$ et f_3 sous la forme $x = \phi_3(y)$. Les ensembles étudiés ne sont alors rien de plus que les graphes des fonctions ϕ_1 , ϕ_2 et ϕ_3 respectivement. On en déduit qu'on a affaire à des courbes, et peut obtenir toutes sortes d'informations utiles.

Par exemple, en calculant la dérivée des fonctions ϕ_i, on peut obtenir la tangente à cette courbe en tout point. Plus généralement on trouve le théorème

Théorème 1.4.1 (Théorème des fonctions implicites, cas de $\mathbb{R}^2$) *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et une application $F : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^k$ avec $k \geq 1$. Soit un point $(a,b) \in U$ tel que*

$$F(a,b) = 0 \quad et \quad \frac{\partial F}{\partial y}(a,b) \neq 0.$$

Alors il existe des voisinages V_a de a dans $\mathbb{R}$ et W_b de b dans $\mathbb{R}$ tel que $V_a \times X_b \subset U$, et il existe une application $\phi : V_a \to W_b$ de classe $\mathcal{C}^k$ tel que

$$\forall (x,y) \in V_a \times W_b, \quad F(x,y) = 0 \iff y = \phi(x).$$

Théorème 1.4.2 (Cas général) *Soient E, F deux espaces vectoriels de dimensions respective n et m, $W \subset E \times F$ partie ouvert, et*
$f : W \subset E \times F \to F$ une application de classe $\mathcal{C}^1$, et (a,b) un point de W tel que :

1. *$f(a,b) = 0$*
2. *La matrice jacobienne $D_y f(a,b)$ est inversible*

Alors :

- *Il existe un voisinage ouvert $U_a \subset E$*
- *Il existe un voisinage ouvert $V_b \subset F$*
- *Tel que $(a,b) \in U_a \times V_b \subset W \subset E \times F$.*
- *Il existe une application $g : U_a \to V_b$ de classe $\mathcal{C}^1$*

tel que

1. *$\forall (x,y) \in U_a \times V_b$: $\quad f(x,y) = 0 \implies y = g(x)$.*
2. *$\forall x \in U_a$: $\quad f(x, g(x)) = 0$.*
3. *$\forall (x,y) \in U_a \times V_b$ la matrice jacobienne $D_y f(x,y)$ est inversible*
4. *Pour tout $u \in U_a$ la matrice jacobienne de g $Dg(u)$ est donnée par :*

$$Dg(u) = -\left[D_y f(u, g(u))\right]^{-1} . D_x f(u, g(u)).$$

Avec la notation :

$$D_y f(a,b) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(a,b)\right)_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq m}}$$

1.5 Exercices

Exercice 01 :
Soient les fonctions suivantes définis de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ par :

- $f_1(x,y) = x^2y^2 - xy - 12$.
- $f_2(x,y) = \frac{x^2}{x^2-y}$.
- $f_3(x,y,z) = (\frac{x-2y}{x-y}, \frac{x-z}{x-2z})$.
- $f_4(x,y,z) = (xyz, x^y, \frac{x}{yz}, \frac{1}{x+y+z})$.
- $f_5(x) = (x, \sqrt{x^2-2x+1}, \sqrt{x^2-\sqrt{x+1}})$.

1. Déterminer n et p pour chaque fonctions.
2. Calculer le domaine de définition pour chaque fonctions.
3. Calculer les dérivées partielles de chaque fonctions.
4. Donner leurs matrices Jacobiennes.

Exercice 02 :
Soit f une application de E dans F espaces vectoriels normés de dimension finie.
On sait de même que "f différentiable en x_0" $\implies$ "f admet des dérivées partielles en x_0" montrer que les réciproques sont fausses en général en s'inspirant de :
Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définit par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

meme question pour la fonction $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définit par

$$g(x,y) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} + y^2 \sin\frac{1}{y} & \text{si } xy \neq 0 \\ x^2 \sin\frac{1}{x} & \text{si } y = 0 \\ y^2 \sin\frac{1}{y} & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Exercice 03 :
Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^2$ et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définit par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{g(x)-g(y)}{x-y} & \text{si } x \neq y \\ g'(x) & \text{si } x = y \end{cases}$$

montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ en tout point de $\mathbb{R}^2$ et calculer sa différentielle.

Exercice 04 : Soient E, F deux espaces vectoriels réels, et $f : E \to F$ une application linéaire continue, alors

1. $f \in \mathcal{C}^1(E,F)$ et on a :
$$\forall a \in E \ : \ Df_a = f$$

2. Déduire que l'application différentielle $Df : E \to \mathcal{L}(E, F)$ est constante.
3. Soit $g : U \subset E \to F$ la restriction de f à un ouvert non vide U, montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
   - g est continue en tout point de U
   - g est différentiable en tout point de U
   - $g \in \mathcal{C}^1(E, F)$.
4. Montrer que Si $h : E \to F$ une application affine continue $h = f + c$ avec c constante de F alors $h \in \mathcal{C}^1(E, F)$ et que

$$\forall a \in E \ : \ D_a h = f$$

Exercice 05 : Soient les fonctions $f_1,\ f_2,\ f_3\ f_4,\ f_5$ de l'exercice 1

- Calculer leurs Rangs.
- Sont-elles des immersions ?.
- Sont-elles des submersions ?.
- Sont-elles Injectives, Surjectives ?.

Exercice 06 : Les applications suivantes $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ sont-elles des immersions ? Sont-elles injectives ? Si oui, leur image est-elle plongée ?

1. $f_1(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$.
2. $f_2(u, v) = (u, v, uv)$.
3. $f_3(u, v) = (u \cos v, v \sin u, \lambda v)$.
4. $f_4(u, v) = ((2 + \cos v) \cos u, (2 + \cos v) \sin u, \sin v)$.

Définition : On dit que $F : M \to N$ est un **plongement** si F est une immersion injective et un homéomorphisme de M dans $F(M)$ pour la topologie induite.

Exercice 07 : Pour $t \in]-\infty, 1[$, on pose $f(t) = (t^2, t - t^3)$.
L'application $f :]-\infty, 1[\to \mathbb{R}^2$ est-elle une immersion ? Est elle injective ?. dessiner son image dans le plan.

Exercice 08 : Les applications suivantes $f_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ sont-elles des submersions ? Peut-on les restreindre à un voisinage de ${}_i f^{-1}(0)$ de telle sorte que la restriction soit une submersion ?

1. $f_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - a^2$.
2. $f_2(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$.
3. $f_3(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$.

Exercice 09 : Soit S la nappe paramétrée définie par

$$x(u, v) = u + v, \quad y(u, v) = uv, \quad z(u, v) = u^2 + v^2. \qquad (u, v) \in \mathbb{R}^2$$

1. Verifier que S et incluse dans la surface d'équation $x^2 - 2y - z = 0$. les deux surfaces coïncident-elles ?.

2. Quelle sont les intersection de S avec les plan $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$.
3. Dessiner S.
4. En quels points ce plan passe par l'origine ? .

Exercice 10 :
Soit la fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$:

$$f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$$

1. Est elle un difféomorphisme global ?
2. soit $X = (1, 2) \in \mathbb{R}^2$, donner un voisinage de X et un voisinage de $f(X)$ dans les quels f est difféomorphisme.
3. Donner deux ouverts maximal U et V de $\mathbb{R}^2$ pour que f soit un difféomorphisme de U dans V.

Peut on faire la même chose pour les fonctions :

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad (x, y) \mapsto (x - y, x, y)$
2. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad (x, y, z) \mapsto (x^2 + xy^2, -\frac{1}{2}xy^2 - \frac{1}{2}x^2, z^2 - 4z)$.

Exercice 11 :
Soit la fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, avec f est une fonction de $u(x_1, x_2, ..., x_n)$.
On rappelle la formule en une variable : $f(u)' = f'(u).u'$

1. Calculer $f(u)''$ dans le cas d'une variable.
2. Calculer $\frac{\partial}{\partial x_i} f$ et $\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f$ dans le cas de n-variables.
3. Montrer que

$$\Delta f = f''(u).\|u'\|_2^2 + f'(u).\Delta u, \quad \text{avec} \quad \|u'\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} (\frac{\partial u}{\partial x_i})^2.$$

On prend maintenant $n = 3$ et $u = \frac{x^2+y^2}{z^2}$,

4. Montrer que f est harmonique si et seulement si

$$2(u^2 + u)f''(u) + (3u + 2)f'(u) = 0.$$

Rappel : une fonction f est harmonique si $\Delta f = 0$.

Chapitre 2

Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$

Approche : Après avoir considéré des fonctions définies sur des intervalles de $\mathbb{R}$ (autrement dit des morceaux de droites) puis sur des morceaux de plans ou d'espaces de dimensions quelconques, on souhaite maintenant s'intéresser à des fonctions définies par exemple sur des courbes ou des surfaces. Par exemple sur des cercles, des sphères. . .
Le but de ce chapitre est de commencer par définir et bien comprendre ce qu'on va considérer comme courbes ou surfaces. Plus généralement on va introduire les sous-variétés de dimension p dans $\mathbb{R}^n$. Une courbe sera une sous-variété de dimension 1, une surface est une sous-variété de dimension 2, etc. On notera tout de même que la définition d'une sous-variété de dimension 1 ne correspondra pas à la notion de courbe paramétrée.

Par exemple une sphère est une sous-variété de dimension 2 dans $\mathbb{R}^3$. La terre est (grosso modo) une sphère, mais à notre échelle où on n'en voit qu'une toute petite partie on a l'impression de marcher sur un plan (à tel point qu'on a longtemps pensé que la terre était effectivement plate . . .).

Ainsi une sous-variété de dimension 1 est une partie de $\mathbb{R}^n$ telle que si on "zoom" sur n'importe lequel de ses points, on finit par avoir l'impression qu'il s'agit d'un morceau de droite pour la dimension 1, ou un plat pour les dimensions supérieurs. Avec cette idée en tête, pouvez-vous dire lesquels parmi ces ensembles du plan seront considérés comme des sous-variétés de dimension 1 ? Lorsque c'est le cas, pouvez-vous dessiner la droite tangente en chaque point ?

Le but de ce chapitre est maintenant de donner des définitions rigoureuses pour donner un sens précis à l'idée intuitive que l'on peut se faire d'une courbe ou d'une surface.

J.Royer - Université Toulouse

Rappel : Rappelons que, lorsqu'un espace topologique M est un sous ensemble de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ avec la topologie induite de $\mathbb{R}^n$, M hérite la structure topologique de $\mathbb{R}^n$, i.e. un sous ensemble de M est ouvert s'il est l'intersection d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$ avec M. Un voisinage d'un point a de M pour la topologie induite sur M est alors l'intersection de M avec un voisinage de a dans $\mathbb{R}^n$.

2.1 Difféomorphismes, immersions, submersions

Soient $U \subset \mathbb{R}^n$ et $V \subset \mathbb{R}^m$ deux sous ensembles ouverts, avec $n, m \in \mathbb{N}^*$, et $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty, \omega\}$.

Définition 2.1.1 *une fonction de régularité $\mathcal{C}^\omega$ est une fonction **analytique** réelle, c'est-à-dire développable en série entière autour de chaque point.*

Définition 2.1.2 (Difféomorphisme)
*On dit que $f : U \to V$, (avec $n = m$) est un **difféomorphisme** de classe $\mathcal{C}^k$, ou $\mathcal{C}^k$-**difféomorphisme**, si*

- *f est une bijection de U dans V,*
- *f et f^{-1} sont de classe $\mathcal{C}^k$.*

*On dit que f est un $\mathcal{C}^k$-**difféomorphisme local** en $x \in U$, si*

- $\exists U_x \in \mathcal{V}(x),\ x \in U_x \subset U,$
- $\exists V_y \in \mathcal{V}(y),\ y \in V_y \subset V$, *tel que* $y = f(x)$,
- *$f : U_x \to V_y$ soit un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme.*

Définition 2.1.3 (Submersion) *Soient $U \subset \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble ouvert, $a \in U$ et $f : U \to \mathbb{R}^m$ une application de classe $\mathcal{C}^1$, on dit que f est une **submersion** en a si df_a est surjective.*

avec df_a est la différentielle de f en a, qui est égale à la matrice jacobienne de f en a.

Remarque : Le théorème du rang et la surjection de df_a, assurent que $n \geq m$.

Définition 2.1.4 (Immersion) *Soient $U \subset \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble ouvert, $a \in U$ et $f : U \to \mathbb{R}^m$ une application de classe $\mathcal{C}^1$.*
*On dit que f est une **immersion** en a si df_a est injective.*

Remarque : Le théorème du rang et l'injection de df_a assurent $n \leq m$.

2.2 Définition des sous-variétés

Introduction : Il y a plusieurs moyens de décrire une courbe dans le plan, on peut la décrire implicitement, par une équation.
Prenons l'exemple du cercle unitaire, il est donné par l'équation cartésienne $x^2+y^2-1=0$, on peut aussi la décrire par un paramétrage, le cercle unité est l'ensemble des points $(\cos t, \sin t)$ pour $t \in [0, 2\pi]$, on peut la décrire par un graphe de fonctions,

au moins localement : par exemple, la partie supérieure du cercle unité est l'ensemble des points $(x, f(x))$ où $f(x) = \sqrt{1-x^2}$.

La même situation se produit lorsqu'on considère un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^n$, il peut être décrit par une équation (si c'est un hyperplan) ou plus généralement par un ensemble d'équations, il peut aussi être décrit par un paramétrage, en écrivant que ce sous-espace vectoriel est l'ensemble des combinaisons $\{\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p\}$, où $(u_1, \cdots, u_p)$ est une famille génératrice de F.

Les sous-variétés de $\mathbb{R}^n$ sont la généralisation à $\mathbb{R}^n$ des courbes de l'espace ou des courbes et surfaces de l'espace.

Comme dans les exemples précédents, elles vont pouvoir être décrites de différentes façons.

(source : *http : //www.bibmath.net/*)

Définition 2.2.1 (Par un difféomorphisme ou redressement)
*Soit M un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$, on dit que M est une **sous-variété** de $\mathbb{R}^n$ de dimension p et de classe $\mathcal{C}^k$, $(p \leq n,\ k > 0)$, si pour tout $x \in M$ on a :*

1. *il existe un voisinage $U_x \in \mathcal{V}(x)$ et $U_x \subset \mathbb{R}^n$,*
2. *il existe un voisinage $V_0 \in \mathcal{V}(0_{\mathbb{R}^n})$ et $V_0 \subset \mathbb{R}^n$,*
3. *Il existe un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme $\varphi : U_x \to V_0$ telle que $\varphi(x) = 0$ et*

$$\varphi(U_x \cap M) = V_0 \cap (\mathbb{R}^p \times \{0_{\mathbb{R}^{n-p}}\}) \,. \tag{2.1}$$

i.e. $\forall a \in U_x \cap M : \varphi(a) = (y_1, \cdots, y_p, 0, \cdots, 0)$.

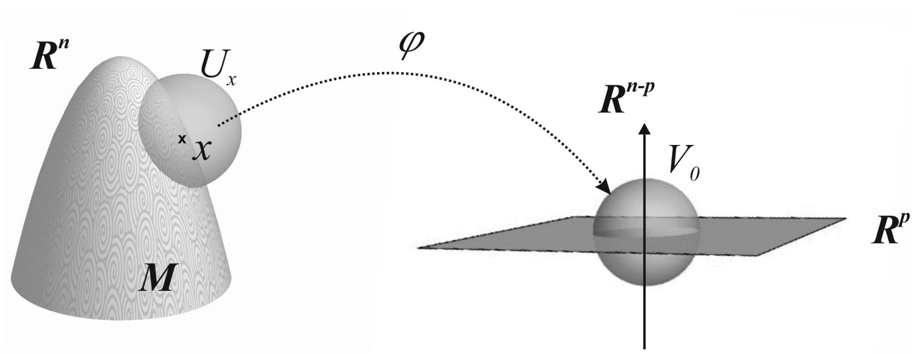


FIGURE 2.1 – Sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension p

Remarque 2.2.1 *Cette définition (par redressement) signifie qu'une partie M de $\mathbb{R}^n$ est une sous-variété de dimension p si on peut tordre (via un difféomorphisme) le voisinage de chacun de ses points de sorte que M soit envoyé sur un morceau d'un sous-espace affine (plat) de dimension p.*

Définition 2.2.2 (Par une submersion où fonction implicite local)
*Soit M un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$), on dit que M est une **sous-variété** de $\mathbb{R}^n$ de dimension p et de classe $\mathcal{C}^k$, si pour tout $x \in M$ on a :*

1. *il existe un voisinage $U_x \in \mathcal{V}(x)$ avec $U_x \subset \mathbb{R}^n$,*
2. *il existe un $\mathcal{C}^k$-submersion $\phi : U_x \to \mathbb{R}^{n-p}$ en x, telle que*

$$U_x \cap M = \phi^{-1}(\{0_{\mathbb{R}^{n-p}}\}). \tag{2.2}$$

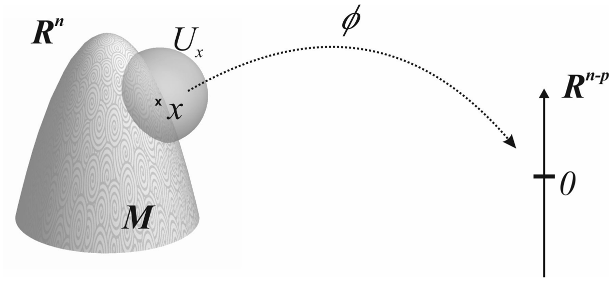


FIGURE 2.2 – Sous-variété de $\mathbb{R}^n$ définit par la submersion ϕ.

Définition 2.2.3 (Par une immersion où paramétrage local)
*Soit M un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$), on dit que M est une **sous-variété** de $\mathbb{R}^n$ de dimension p et de classe $\mathcal{C}^k$ si, pour tout $x \in M$:*

1. *il existe voisinage $U_x \in \mathcal{V}(x)$ avec $U_x \subset \mathbb{R}^n$,*
2. *il existe voisinage $V_0 \in \mathcal{V}(0_{\mathbb{R}^p})$,*
3. *il existe un $\mathcal{C}^k$-immersion injective $\psi : V_0 \to \mathbb{R}^n$ en $0_{\mathbb{R}^p}$ telle que $\psi(0_{\mathbb{R}^p}) = x$ et induisant un homéomorphisme*

$$\psi(V_0) = U_x \cap M. \tag{2.3}$$

*Une applications qui satisfait les conditions 3. (Immersion, Injective, Homéomorphisme) est dite **plongement**.*

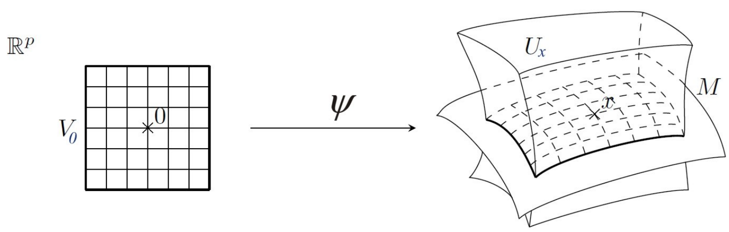


FIGURE 2.3 – Sous-variété de $\mathbb{R}^n$ définit par l'immersion ψ.

Définition 2.2.4 (Par un graphe local)
*Soit M un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$), on dit que M est une **sous-variété** de $\mathbb{R}^n$ de dimension p et de classe $\mathcal{C}^k$ si, pour tout $x \in M$ et avec identification linéaire $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$, on a :*

1. *il existe un voisinage de x, $U_x \in \mathcal{V}(x)$, telle que $U_x \subset \mathbb{R}^n$,*
2. *il existe un ouvert $V \subset \mathbb{R}^p$,*
3. *il existe une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ $f : V \to \mathbb{R}^{n-p}$ telle que $U_x \cap M$ est le graphe de f, i.e.*

$$U_x \cap M = \{(y, f(y)) \mid y \in V\}. \tag{2.4}$$

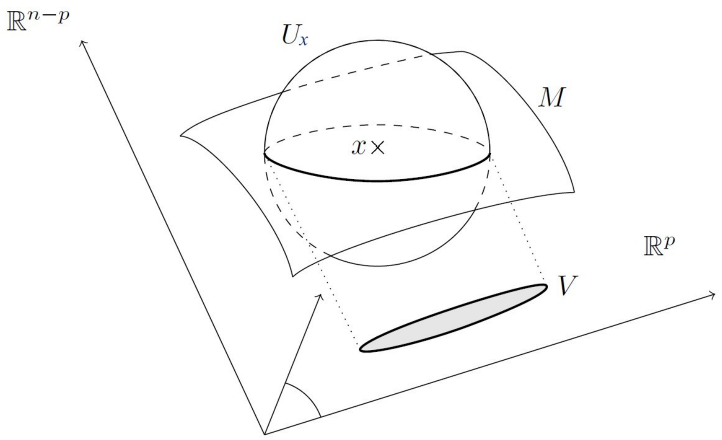


FIGURE 2.4 – Sous-variété de $\mathbb{R}^n$ définit par un graphe local.

Théorème 2.2.1

Les quatre définitions des sous-variétés, si-dessus, sont équivalentes.

Remarque 2.2.2

- *Pour la définition 2.2.3, attention : si $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ est une application dont la différentielle est injective (immersion), ne suffira pas pour que $\phi(U)$ soit une sous-variété.*
- *Par abus de langage un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ tel que tout point a un voisinage qui soit image d'une application de différentielle injective est appelé sous-variété immergée. Mais ce n'est pas une sous-variété.*
  En particulier si j n'est pas injective, $j(u_0) = j(u_1) = x_0$, on peut avoir la situation suivante (exp :$p = 1, n = 2$)

On voit alors que $M = \phi(U)$ n'est pas une sous-variété, car une carte enverrait les deux vecteurs tangents à chaque branche de la courbe (qui sont linéairement indépendants) sur des vecteurs de $\mathbb{R}$, donc liés.

Définition 2.2.5 *Soit M une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension p, on dit*

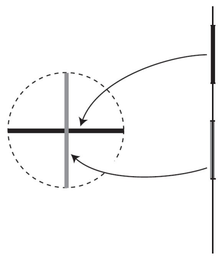


FIGURE 2.5 – Contre-exemple de l'insuffisance de l'immersion.

- *M est une sous-variété **lisse** si elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$.*
- *M est une sous-variété **analytique** réelle lorsqu'elle est $\mathcal{C}^\omega$.*
- *M est une **courbe** si $p = 1$.*
- *M est une **surface** si $p = 2$.*
- *M est une **hypersurface** si $p = n - 1$.*
- *On note M^p pour dire que M est dimension p.*

Proposition 2.2.1 *Soit M une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension p et de classe $\mathcal{C}^k$, alors pour tout l tel que $1 \leq l \leq k$, M est aussi de classe $\mathcal{C}^l$.*

Exemples :

1. $\mathbb{R}^n$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ lisse de dimension n .
2. Tout ouvert non vide U de $\mathbb{R}^n$ est une sous-variété lisse de dimension n.
   Pour le prouver on prend le difféomorphisme identité si $0 \in U$ si non on prend une translation qui est un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^\infty$, par la définition 2.2.1 on a que U est une sous-variété de dim n et de classe $\mathcal{C}^\infty$.
3. Toute ligne droite dans $\mathbb{R}^n$ est une sous-variété lisse de dimensions 1.
4. Les cercles $\mathbb{S}_{(a,b)}$ de centre (a, b) et de rayon r dans $\mathbb{R}^2$, sont des sous variétés de dimension 1, car : $\mathbb{S}_{(a,b)}$ les l'ensemble des points tels que
   $$\mathbb{S}_{(a,b)} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2\right\}.$$
   $\mathbb{S}_{(a,b)}$ est l'image réciproque de l'ensemble $\{0\}$ par la fonction f de classe $\mathcal{C}^\infty$ définit par
   $$f(x, y) = (x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2,$$
   qui a la propriété : pour tout $(x, y) \in \mathbb{S}_{(a,b)}$ on a :
   $$Jac\ f_{(x,y)} = \Big[2(x - a)\ ,\ 2(y - b)\Big] \neq (0, 0),$$
   d'où $Jac\ f_{(x,y)}$ est de rang 1, alors f est une submersion,
   par la définition 2.2.2, $\mathbb{S}_{(a,b)}$ est une sous-variété de dim 1 et de classe $\mathcal{C}^\infty$.
5. On général toute sphère $\mathbb{S}^n$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ est une hypersurface lisse.

6. un hyperplan affine de $\mathbb{R}^n$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension $n-1$.
   Car : Un hyperplan est donné par l'équation sous la forme $f(x) = L(x) + b$ avec L est une forme linéaire non nul dans $Jac\ L = L$ qui est de classe $\mathcal{C}^\infty$, et b est une constante de $\mathbb{R}^n$, alors f est une submersion.
   Par la définition 2.2.2 on a que hyperplan est une sous-variété de dim $n-1$ et de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Remarque 2.2.3 *Il n y a pas unicité de l'équation définissant un ensemble.*

Proposition 2.2.2 *Soit M une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ et $a \in M$ alors, la dimension en a est définie de manière unique.*
Si M est connexe cette dimension ne dépend pas du choix du point a.

Prouve : Si on avait deux difféomorphismes φ_1, φ_2 tels que

$$\varphi_1(U_a \cap M) = \varphi_1(U_a) \cap \mathbb{R}^p \times \{0\} \quad et \quad \varphi_2(U_a \cap M) = \varphi_2(U_a) \cap \mathbb{R}^q \times \{0\}$$

alors $\psi = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \mathbb{R}^p \times \{0\} \to: \mathbb{R}^q \times \{0\}$ serait un difféomorphisme local au voisinage de 0.
On déduit que $d\psi_0 : \mathbb{R}^p \times \{0\} \to: \mathbb{R}^q \times \{0\}$;
Or $d\psi_0$ est une application linéaire bijective, donc $p = q$.

Maintenant si $\varphi : U_a \to V_b$, avec $b = \varphi(a)$, est un difféomorphisme, alors pour tout $x \in U_a$, par la translation on a bien : $\psi(y) = \varphi(y) - \varphi(x)$ est difféomorphisme d'un voisinage U_x du point x. On en déduit que la dimension dans le point a est égale à la dimension en x, alors $D_p = \{x \in M \mid Dim_x = p\}$ est un ouvert.
Or son complémentaire $M - D_p = \bigcup_{j \neq p} D_j$ est une réunion d'ouvert.
On déduit que si D_p est non vide et M connexe, alors $M = D_p$.

2.3 Application entre les sous-variétés

Définition 2.3.1 *Soient M^p une sous-variété de de dimension p de $\mathbb{R}^n$ et N^q une sous-variété de dimension q de $\mathbb{R}^m$, soit f une application de M dans N,*

on dit que f est de classe $\mathcal{C}^k$ si pour tout $a \in M$, tout paramétrage local γ de M définit au voisinage V de $0_{\mathbb{R}^p}$ dans $\mathbb{R}^p$, et tout paramétrage local ν de N définit au voisinage W de $0_{\mathbb{R}^q}$ dans $\mathbb{R}^q$ tel que $f(\gamma(V)) \subset \nu(W)$ alors :

$$\nu^{-1} \circ f \circ \gamma : V \to W$$

est de casse $\mathcal{C}^k$.

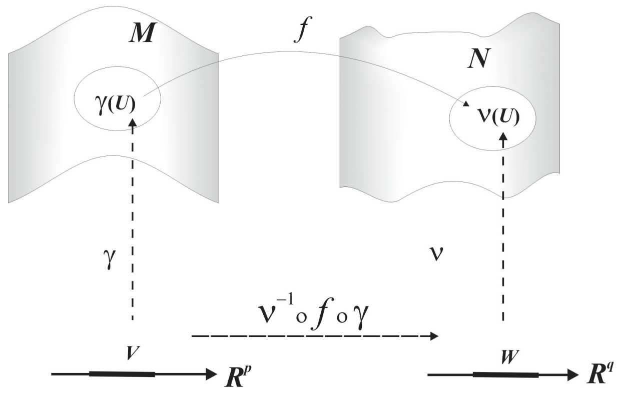


FIGURE 2.6 – Application entre des sous-variétés

2.4 Espaces tangentes

Soit M^p uns sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension p de classe $\mathcal{C}^1$

Définition 2.4.1 (Courbe)
*Toute application continue d'un intervalle de $\mathbb{R}$ dans M est dite **courbe** sur M.*

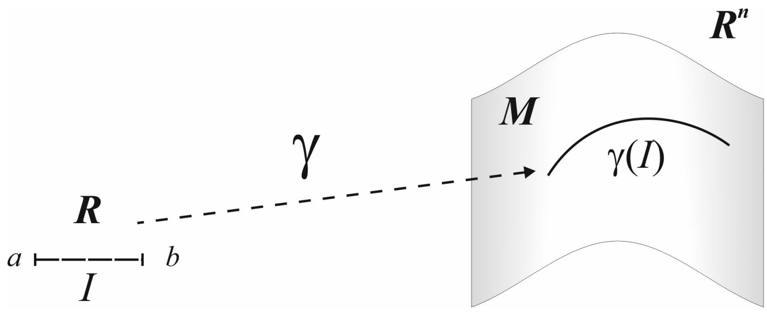


FIGURE 2.7 – Courbe sur une sous-variété de $\mathbb{R}^3$

Définition 2.4.2 *Soit M^p une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension p de classe $\mathcal{C}^1$, et $a \in M$. Un vecteur v de $\mathbb{R}^n$ est **tangent** à M en a si :*

- *Il existe $\varepsilon > 0$ de $\mathbb{R}$,*
- *Il existe une courbe $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to M$ de classe $\mathcal{C}^1$, telle que*

$$\gamma(0) = a \quad et \quad \dot{\gamma}(0) = v.$$

*v est dit **vecteur tangent** de M en a.*

Définition 2.4.3 *l'ensemble de tous les vecteurs tangent à M en a est dite **l'espace tangent** à M en a, il est noté T_aM.*
*On dit aussi le **plan tangent**.*

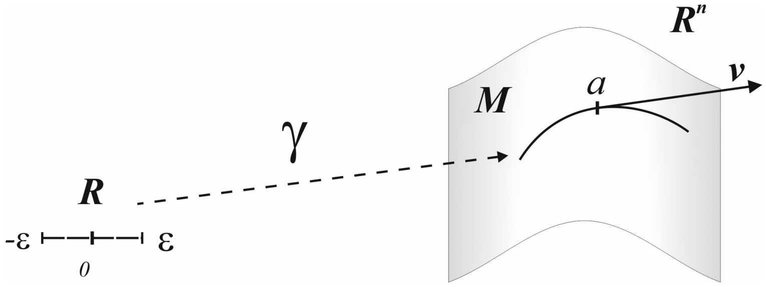


FIGURE 2.8 – Vecteur tangent sur une sous-variété $\mathbb{R}^3$

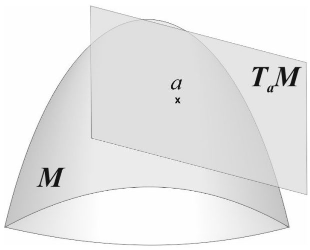


FIGURE 2.9 – Espace tangent (ou plan tangent) sur une sous-variété $\mathbb{R}^3$

Théorème 2.4.1 *Soit M^p uns sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension p de classe $\mathcal{C}^1$, et $a \in M$. alors l'espace tangent T_aM est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension p.*

Prouve : la prouve de se théorème sera faite dans le cas plus général des Variétés différentielles.

Proposition 2.4.1 *Soit M^p uns sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension p de classe $\mathcal{C}^1$, et $a \in M$.*

1. *Si $U_a \subset \mathbb{R}^n$ est un voisinage ouvert de a, et $V_0 \subset \mathbb{R}^n$ est un voisinage ouvert de 0 et $\phi : U_a \to V_0$ un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme tel que $\phi(U_a \cap M) = V_0 \cap (\mathbb{R}^p \times \{0\})$ alors :*
$$T_aM = (D\phi_a)^{-1}(\mathbb{R}^p \times \{0\}).$$
2. *Si $U_a \subset \mathbb{R}^n$ est un voisinage ouvert de a, et $\varphi : U_a \to \mathbb{R}^{n-p}$ une submersion de classe $\mathcal{C}^1$ en a, telle que $U_a \cap M = \varphi^{-1}(\varphi(a))$, alors*
$$T_aM = \ker(D_a\varphi_x).$$
3. *Si $V_0 \subset \mathbb{R}^p$, et si $U_a \subset \mathbb{R}^n$, et $\psi : V_0 \to U_a$ un plongement local de M en a de classe $\mathcal{C}^1$ avec $\psi(0) = a$, alors :*
$$T_aM = Im\ (D\psi_0).$$

Proposition 2.4.2 *Soient M^p une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ et $x \in M$ un point quelconque, alors l'espace tangent T_xM est l'ensemble des vecteurs vitesse en $t = 0$ des courbes $\mathcal{C}^\infty$ tracés sur M passant par x à l'instant $t = 0$.*

Prouve : Soit φ un difféomorphisme (carte) en x, et γ une courbe tracée sur M telle que $\gamma(0) = x$.
Alors pour t assez proche de 0, $\varphi(\gamma(t))$ est bien définie, tracée sur $\mathbb{R}^p \subset \mathbb{R}^n$ et passe par 0 en $t = 0$. Danc la tangente en 0 de $\varphi(\gamma(t))$ est dans $\mathbb{R}^p$ i.e. $d\varphi(c(0))\gamma'(0)$ est dans $\mathbb{R}^p$, ce qui par définition équivaut à $\gamma'(0) \in T_xM$.

Inversement, Soit $\nu \in T_xM$ alors $d\varphi(x)\nu$ est dans $\mathbb{R}^p$?
soit une courbe paramétrée de $\mathbb{R}^p$ $\gamma : t \mapsto \gamma(t)$, tangente à $d\varphi(x)\nu$ en $t = 0$.
alors quitte à restreindre la courbe γ à un voisinage de 0, on peut supposer contenue dans $V = \varphi(U_x)$. alors $c(t) = \varphi^{-1}(\gamma(t))$ est une courbe tracée sur M, et le calcul précédent montre qu'elle est tangente à ν en $t = 0$.

Exemple :

Soit la sphère $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\|^2 = 1\}$. c'est une sous-variété de dimension 2 définit par la submersion $F(x) = \|x\| - 1$ et $S^2 = F^{-1}(\{0\})$.
On a que sa différentielle : $dF_x(h) = 2 < x, h >$, alors l'espace tangent en $x \in S^2$ à la sphère, T_xS^2 est le plan orthogonal à x.

2.5 Exercices

Exercice 01 :

1. Déterminer le paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$ pour lequel l'ensemble suivant soit une sous-variété
$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x^2 + y^2 + z^2 = xyz + \alpha\}$$
2. De même déterminer les paramètres $(p, q) \in \mathbb{R}^2$ pour lesquels l'ensemble suivant soit une sous-variété
$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ y^2 = x^3 - 3px + q\}$$

donner la dimension de ces sous-variétés

Exercice 02 :
Les applications suivantes $f_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$? définirent elles des sous-variétés ? (*calcul de submersion est fait en exo 04 de la série 1*)

1. $f_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - a^2$.
2. $f_2(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$.
3. $f_3(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$.

Exercice 03 :
Montrer que l'ensemble
$$\{(u^2, v^2, w^2, \sqrt{2}\, uv, \sqrt{2}\, vw, \sqrt{2}\, uw) \in \mathbb{R}^6;\ (u, v, w) \in \mathbb{R}^3,\ u^2 + v^2 + w^2 = 1\}$$
est une sous-variété de $\mathbb{R}^6$. Et qu'elle est incluse dans la sphère unitaire.

Exercice 04 :
Soit S la nappe paramétrée définie par

$$x(u,v) = u+v, \quad y(u,v) = uv, \quad z(u,v) = u^2+v^2. \qquad (u,v) \in \mathbb{R}^2$$

1. les deux ensembles sont ils des sous-variétés ? l'intersection et elle une sous-variétés ?

Exercice 05 :
Soit X un espace vectoriel de dimension n, soit Y un espace vectoriel de dimension $m \geq n$, soit U un ouvert de X. Soit $f : U \to Y$ un plongement. On note $M = f(U)$. Soit $a \in M$, $a = f(\alpha)$ pour un $\alpha \in U$.

1. Soit $x \in X$, $x \neq 0$. Montrer qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que l'application g définie sur $]-\epsilon, \epsilon[$ par $g(t) = ?\alpha + tx$ prend ses valeurs dans U.
2. On note $\gamma = f \circ g :]-\epsilon, \epsilon[\to Y$. Montrer que $\gamma(t) \in M$ pour tout $t \in]-\epsilon, \epsilon[$. Déterminer $\gamma(0)$ et $\gamma'(0)$ en fonction de f, α, a et x.
3. En déduire que $df(\alpha)(x) \in T_aM$.
4. Montrer qu'on a $T_aM = de(\alpha)X = \{df(\alpha)(x),\ x \in X\}$.

Exercice 06 :
Soient les ensembles suivants :

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x^2+y^2+z^2 = xyz + \alpha x + \beta y + \gamma\}$$
$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x^2+z^3 = ay - b\}$$

avec $\alpha, \beta, \gamma, a, b \in \mathbb{R}$.

1. A, B sont ils des sous-variétés ?
2. pour quelles paramètres $\alpha, \beta, \gamma, a, b$ le seront-ils ? donner leurs dimensions.
3. Calculer $C = A \cap B$ pour ces paramètres.
4. C est il une sous-variété ? si oui, quel est sa dimension ?.

Exercice 07 :
Les sous-ensembles V_i de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ qui suivent, sont-ils des sous-variétés ?
Si oui, qu'elles sont leurs dimensions.

1. $V_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y = |x|\}$.
2. $V_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 - x = y^2\}$.
3. $V_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 = y^3\}$.
4. $V_4 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x^2+y^2+xy = z^2\}$.

Exercice 08 : Étudier selon les paramètres α, β, γ de $\mathbb{R}$ si l'ensemble A est une sous-variété, donner sa dimension

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x^2+y^2+z^2 = xyz + \alpha x + \beta y + \gamma\}$$

Exercice 09 :
Soit V le sous-ensemble défini par :

$$V = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ t^3 + x^3 + y^3 + z^3 = t + x^2 - y^2 + z^2 = x - y + z - 2 = 0\right\}$$

1. Donner la fonction f qui définit V
2. f est-elle une submersion ?
3. Peut-on réduire $\mathbb{R}^4$ pour que V soit une sous-variété ?
4. Si oui, donner la dimension de V.

Chapitre 3

Les formes différentielles

Les formes différentielles sont des objets mathématiques qui permettent de décrire de manière précise la variation d'une grandeur dans l'espace. Elles sont particulièrement utiles en géométrie différentielle et en physique théorique, où elles sont utilisées pour décrire les champs de forces, les propriétés des courbes et des surfaces, ainsi que la dynamique des systèmes physiques.

Les formes différentielles sont utilisées pour décrire un grand nombre de phénomènes physiques, tels que les champs électromagnétiques, les champs gravitationnels, les courants électriques, les ondes sonores, etc. En physique, les formes différentielles sont utilisées pour décrire les propriétés des champs de forces à travers des équations différentielles appelées équations de Maxwell. Les formes différentielles sont également utilisées pour décrire les propriétés géométriques des surfaces et des courbes en géométrie différentielle.

En mathématiques, les formes différentielles sont largement utilisées pour résoudre des problèmes d'optimisation, de calcul vectoriel, d'intégration, de théorie des nombres, etc. Les formes différentielles permettent également de généraliser de nombreux concepts mathématiques familiers, tels que le gradient, la divergence, la rotation, la dérivée, etc.

(ChatGPT)

3.1 Algèbre tensorielle.

Soit E un espace vectoriel de dimension n

3.1.1 Formes multilinéaires

Définition 3.1.1 *Une application L est dite une **forme k-linéaire** ou une **k-forme linéaire** sur E avec*

$$\begin{array}{rccc} L: & E^k & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (v_1, \ldots, v_k) & \longmapsto & L(v_1, \ldots, v_k) \end{array}$$

Si elle est linéaire pour chaque variables.
c'est à dire : $\forall i \in \{1, \ldots, k\}, \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ on a :

$$L(v_1, \ldots, \alpha v_i + \beta w_i, \ldots, v_k) = \alpha L(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_k) + \beta L(v_1, \ldots, w_i, \ldots, v_k).$$

L'ensemble des formes k-linéaires est notée : $\bigotimes^k E^*$ ou $\mathcal{L}^k(E)$.

Remarque 3.1.1 *Pour un $k = 1$ on a une application linéaire, c'est le duale de E.*

Proposition 3.1.1 (& Définition) *Soient $L \in \bigotimes^k E^*$ and $T \in \bigotimes^l E^*$.*
***Le produit tensoriel** de T et L est la forme $(k+l)$-linéaire notée $L \otimes T \in \bigotimes^{k+l} E^*$ définit par :*

$$L \otimes T(v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_{k+l}) := L(v_1, \ldots, v_k) T(v_{k+1}, \ldots, v_{k+l}).$$

Remarque 3.1.2 *Le produit tensoriel est associatif mais non commutatif.*

Soit $\{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E alors on définit la base duale dans E^* par : $\{e_1^*, \ldots, e_n^*\}$ avec $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$

Proposition 3.1.2

- *$\bigotimes^k E^*$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.*
- *La famille $\{e_{i_1}^* \otimes \ldots \otimes e_{i_k}^*, \ 1 \leq i_j \leq n\}$ est libre et c'est une base de $\bigotimes^k E^*$.*
- *$dim \bigotimes^k E^* = n^k$.*

3.1.2 Formes multilinéaires alternées

Définition 3.1.2 *Soit $T \in \bigotimes^k E^*$ une k-forme linéaire,*
*T est dite **alternée** ou **anti-symétrique** si elle change de signe lorsqu'on échange deux vecteurs, e.i. :*

$$T(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_k) = -T(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_k).$$

L'ensemble des k-formes linéaires alternées est noté : $\bigwedge^k(E)$ ou $\bigwedge^k E^*$.
On pose par convention : les 0-formes sans des constantes e.i.

$$\bigwedge^0 E^* = \mathcal{L}^0(E) = \bigotimes^0 E^* = \mathbb{R}.$$

Théorème 3.1.1 *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n, alors :*
$\bigwedge^k(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\bigotimes^k E^*$ de dimension $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Rappel : On désigne par $\mathcal{G}_n$ (ou autre notation $\sum_n$), le groupe de permutation de $\{1, \dots, k\}$, c'est-à-dire le groupe des bijections de cet ensemble.

Toutes permutation $\sigma \in \mathcal{G}_n$ admet une unique signature $\varepsilon_\sigma = \pm 1$.

Proposition 3.1.3 *Soit $L \in \bigotimes^k E^*$ une k-forme linéaire de l'espace E. les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *la k-forme L est alternée.*
2. *Pour toutes permutation $\sigma \in \mathcal{G}_n$ et pour tout $v_1, \dots, v_k \in E$ on a :*
$$L(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) = \varepsilon_\sigma . L(v_1, \dots, v_k).$$
3. *Pour tout $v_1, \dots, v_k \in E$:*
. *S'il existe $i \neq j$ tel que $v_i = v_j$ alors $L(v_1, \dots, v_k) = 0$.*
4. *Si $v_1, \dots, v_k \in E$ sont linéairement dépendants alors $L(v_1, \dots, v_k) = 0$.*

Prouve *: En exercice.*

Corrolaire 3.1.1 *Si $k > dim(E)$ alors $\bigwedge^k E^* = \{0\}$,*
e.i. toutes les k-formes alternées sur E sont identiquement nulle.

Proposition 3.1.4 (& Définition) *Soit $L \in \bigotimes^k E^*$, on lui associe l'**antisymetrisé** qui est la k-forme alternée $Alt(L) \in \bigwedge^k E^*$ définit par :*

$$Alt(L)(v_1, \dots, v_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathcal{G}_k} \varepsilon_\sigma L(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}).$$

Définition 3.1.3 (Produit extérieur) *On définit le **produit extérieur** de $L \in \bigwedge^k E^*$ et de $T \in \bigwedge^l E^*$, noté $L \wedge T$ par :*

$$L \wedge T = \frac{(k+l)!}{k!l!} Alt(L \otimes T),$$

c'est à dire :

$$L \wedge T(v_1, \dots, v_{k+l}) = \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in \mathcal{G}_{k+l}} \varepsilon_\sigma . L(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) . T(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)}).$$

Proposition 3.1.5 *Soient $L, L_1, L_2 \in \bigwedge^k E^*$, $T \in \bigwedge^l E^*$ et $H \in \bigwedge^s E^*$ alors :*

- *$L \wedge T$ est une $(k+l)$-forme alternée.*
- *Le produit extérieur est associatif $L \wedge (T \wedge H) = (L \wedge T) \wedge H$.*
- *$L \wedge T = (-1)^{kl} T \wedge L$.*
- *$(L_1 + L_2) \wedge T = L_1 \wedge T + L_2 \wedge T$.*

Théorème 3.1.2 *Soit $\{e_1, \dots, e_n\}$ une base de E , et $\{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ la base dual associe telle que $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$ alors :*

La famille $\{e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^*,\ 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n\}$ forme une base de $\bigwedge^k E^*$.

3.2 Formes différentielles

Définition 3.2.1 *soit un espace vectoriel de dimension fini n, et U un ouvert de E, Une **forme différentielle de degré** k, ou une k**-forme différentielle**, est une application lisse de U dans $\bigwedge^k E^*$:*

$$\begin{array}{rccc} \alpha : & U \subset E & \longrightarrow & \bigwedge^k E^* \\ & x & \longmapsto & \alpha_x \end{array}$$

l'ensemble des k-formes différentielles sur U est noté $\Omega^k(U)$.

Proposition 3.2.1 *L'ensemble des k-formes différentielles $\Omega^k(U)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension non-fini en général. On a*

$$\forall \alpha, \beta \in \Omega^k(U),\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \lambda.\alpha + \mu.\beta \in \Omega^k(U)$$

$$\textit{avec } (\lambda.\alpha + \mu.\beta)(x) = \lambda.\alpha(x) + \mu.\beta(x), \quad \forall x \in U.$$

Remarque 3.2.1 *soit $\Omega^k(U)$ l'ensemble des k-formes sur U et $\alpha \in \Omega^k(U)$*

- *Si $k = 0$ alors $\Omega^0(U)$ est l'ensemble des fonctions lisses de U dans $\mathbb{R}$,*

$$\Omega^0(U) = \{f : U \to \mathbb{R} \textit{ lisse}\}.$$

- *Si $k = 1$ alors $\Omega^1(U)$ est l'ensemble des différentielles des fonctions lisses,*

$$\Omega^1(U) = \{df \ / \ f : U \to \mathbb{R} \textit{ lisse}\}.$$

- *Si $\{e_1, \dots, e_n\}$ une base de E, alors pour tout $x \in U$, il existe des fonctions $\alpha_{i_1,\dots,i_k} \in \mathcal{C}^\infty(U)$ telle que :*

$$\alpha_x = \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n} \alpha_{i_1,\dots,i_k}(x)\ e^*_{i_1} \wedge \dots \wedge e^*_{i_k}.$$

- *Comme e^*_i sont des une-formes alors elles sont la différentielle de l'application $i^{ème}$ coordonée $x \mapsto x^i$ alors on note :*

$$\alpha_x = \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n} \alpha_{i_1,\dots,i_k}(x)\ dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}.$$

- *Dans le cas des **une-formes** c'est la différentielle d'une fonction f alors :*

$$\alpha = df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i.$$

- *On note l'ensemble de toutes les formes différentielles sur U par $\Omega(U)$*

$$\Omega(U) := \bigoplus_{k=1}^{n} \Omega^k(U)$$

Définition 3.2.2 (Produit extérieur des formes) *Soient deux formes $\alpha \in \Omega^k(U)$ et $\beta \in \Omega^s(U)$ alors en définit le **produit extérieur** de α et β noté $\alpha \wedge \beta$ par :*

$$\alpha \wedge \beta(x) := \alpha(x) \wedge \beta(x), \qquad \forall x \in U.$$

Remarque 3.2.2 *les propriétés de distributivité, anticommutativité et associativité pour le produit extérieur de formes différentielles sont conséquences des propriétés analogues pour le produit de formes alternées.*

3.3 Formes différentielles Réelles

Pour cette section on considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^n$ et $U \subset \mathbb{R}^n$ un domaine borné.

3.3.1 Formes différentielles de degré 0

Définition 3.3.1 *Une forme différentielle de degré* 0 *sur* U *est une fonction continue* $f : U \to \mathbb{R}$*. (En général en prend des fonctions de classe* $\mathcal{C}^1$*). e.i.*

$$\wedge^0 U = \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}).$$

3.3.2 Formes différentielles de degré 1

Définition 3.3.2 *Une forme différentielle de degré* 1 *sur* U *est la différentielle d'une fonction de classe* $\mathcal{C}^2$*,* $f : U \to \mathbb{R}$*. c.a.d :*

$$\alpha \in \wedge^1 U : \quad \exists f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R}) \;/\; \alpha = \sum_{j=1}^{n} f_j dx_j,$$

où $f_j \in \mathcal{C}^0(U, \mathbb{R})$*. (En général en prend les fonctions* f_j *de classe* $\mathcal{C}^1$*).*

Example 3.3.1

- *Soit* $U \subset \mathbb{R}^2$ *ouvert, pour une fonction* $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$*, la différentielle totalle de* f *est une 1-forme différentielle,*

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}\, dy.$$

- *Cas d'une fonction à trois variables* $U \subset \mathbb{R}^3$ *:*

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}\, dy + \frac{\partial f}{\partial z}\, dz.$$

3.3.3 Formes différentielles de degré 2

Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un domaine borné

Définition 3.3.3 *Une forme différentielle de degré* 2 *sur* U *est la deuxième différentielle d'une fonction de classe* $\mathcal{C}^2$*,* $f : U \to \mathbb{R}$*. c.a.d :*

$$\alpha \in \wedge^2 U : \quad \exists f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R}) \;/\; \alpha = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f_{ij} dx_i \wedge dx_j,$$

où $f_{ij} \in \mathcal{C}^0(U, \mathbb{R})$*. (En général en prend les fonctions* f_{ij} *de classe* $\mathcal{C}^\infty$*).*

Example 3.3.2

- $\alpha = \dfrac{x^2 - y}{z}\, dx + yx\, dy - z\, dz$ *est une 1-forme différentielle de* $\mathbb{R}^3$*.*

- $\alpha = \dfrac{2}{z}\, dx \wedge dy$ *est une 2-forme différentielle de* $\mathbb{R}^3$.

Remarque 3.3.1

- *Toutes les 2-formes de* $\mathbb{R}^2$ *sont sous la forme :*

$$\alpha = f\ dx \wedge dy, \quad \text{avec } f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}).$$

- *On général on note dans le cas des réels* $dx_i.dx_j$ *au-lieu de* $dx_i \wedge dx_j$.

Example 3.3.3

- *Soit* $U \subset \mathbb{R}^2$ *ouvert, pour une fonction* $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$, *la deuxième différentielle totalle de* f *est une 2-forme différentielle,*

$$d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\ dx.dy.$$

- *Cas d'une fonction à trois variables* $U \subset \mathbb{R}^3$ *:*

$$d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\ dx.dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}\ dy.dz + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}\ dx.dz.$$

3.4 Image réciproque - Pullback

Définition 3.4.1 *Soient* $U \subset E$ *et* $V \subset F$ *deux ouverts d'espaces vectoriels, et soit une application lisse* $f : U \to V$,
*l'**Image réciproque** (ou **Pullback**) de* f *est l'application notée* f^* *définit par :*

$$\begin{array}{cccc} f^* : & \Omega^k(V) & \longrightarrow & \Omega^k(U) \\ & \omega & \longmapsto & f^*\omega := f^*(\omega) \end{array}$$

telle que :

$$(f^*\omega)_x(v_1, \ldots, v_k) := \omega_{f(x)}\Big(df_x(v_1), \ldots, df_x(v_k)\Big), \quad \forall v_1, \ldots, v_k \in U.$$

Proposition 3.4.1 *Soit une application lisse* $f : U \to V$,

1. *Pour tout* $\omega, \theta \in \Omega^k(V)$, *on a*

$$f^*(\omega + \theta) = f^*\omega + f^*\theta.$$

2. *Pour tout* $\omega \in \Omega^k(V)$ *et* $\theta \in \Omega^l(V)$, *on a*

$$f^*(\omega \wedge \theta) = (f^*\omega) \wedge (f^*\theta)$$

3. *Soit une autre application lisse* $g : V \to W$ *et* $\alpha \in \Omega^k(W)$, *on a*

$$g \circ f : U \to V \to W$$
$$(g \circ f)^* : \Omega^k(W) \to \Omega^k(V) \to \Omega^k(U)$$

avec

$$(g \circ f)^*\alpha = (f^* \circ g^*)\alpha = f^*(g^*\alpha).$$

3.4.1 La différentielle extérieur

Soit E un espace vectoriel de dimension n, et $U \subset E$ un ouvert. On rappel que l'ensemble de toutes les formes différentielles est noté : $\Omega(U) = \bigoplus_{k=0}^{n} \Omega^k(U)$.

Théorème 3.4.1 (& Définition) *Il existe une unique application linéaire, dite* ***la différentielle extérieur****, notée*

$$\begin{array}{rccl} d: & \Omega(U) & \longrightarrow & \Omega(U) \\ & \omega & \longmapsto & d\omega := d(\omega) \end{array}$$

qui a les propriétés suivantes :

1. $\forall \omega \in \Omega^k(U)$ *alors* $d\omega \in \Omega^{k+1}(U)$.
2. $\forall f \in \Omega^0(U)$ *alors* df *est la différentielle de fonction.*
3. $\forall \omega \in \Omega^k(U)$ *et* $\forall \theta \in \Omega^l(U)$ *alors*
$$d(\omega \wedge \theta) = d\omega \wedge \theta + (-1)^k \omega \wedge d\theta.$$
4. *On a que* $d \circ d = 0$.

Exemple : Dans un ouvert $U \in \mathbb{R}^3$ les une-formes sur U sont sous la forme

$$\omega = f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz$$

La différentielle extérieur de ω est :

$$d\omega = \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right) dx \wedge dy + \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}\right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}\right) dz \wedge dx.$$

Définition 3.4.2 *Soit* $\omega \in \Omega(U)$ *on dit que :*

- ω *est* ***fermée*** *si* $d\omega = 0$.
- ω *est* ***exacte*** *s'il existe une forme* $\theta \in \Omega(U)$ *telle que* $\omega = d\theta$.

Proposition 3.4.2 *Par le faite que* $d \circ d = 0$, *alors*

toute forme exacte est fermée.

Mais la réciproque est fausse en général.

Contre-exemple : Sur $\mathbb{R}^2/\{0\}$ la forme $\omega = \dfrac{ydx - xdy}{x^2 + y^2}$ est une forme fermée, mais elle n'est pas exacte.

Proposition 3.4.3 *Soit* $f : U \to V$ *lisse, alors*

$$d \circ f^* = f^* \circ d.$$

c.a.d : $\forall \omega \in \Omega^k(V) : d(f^*\omega) = f^*(d\omega)$.

Ce qui nous donne :

L'image réciproque d'une forme fermée (resp. exacte) est une forme fermée (resp. exacte).

3.4.2 Lemme de Poincaré

Définition 3.4.3 *Un ouvert* $U \in \mathbb{R}^n$ *est dit étoilé s'il existe un point* $a \in U$ *tel que pour tout* $x \in U$ *le segment* $[a, x] \subset U$.

Rappel : $[a, x]$ *est un segment :* $[a, x] := \{t.a + (1 - t)x \ / \ t \in [0, 1]\}$.

Théorème 3.4.2 (Lemme de Poincaré) *Si* $U \subset \mathbb{R}^n$ *est un ouvert étoilé alors toute forme fermée sur* U *est exacte.*

Corrolaire 3.4.1 *Soit* $U \subset \mathbb{R}^n$ *ouvert. Si* U *est difféomorphe à* $\mathbb{R}^n$ *alors :*
pour toute $\omega \in \Omega^k(U)$ *tel que* $d\omega = 0$ *alors* ω *est exacte.*

Chapitre 4

Intégration des formes différentielles

4.1 Intégration des 1-formes

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Définition 4.1.1

- *Une* ***courbe*** *sur est l'image d'un intervalle de* $\mathbb{R}$ *par une application continue* $\gamma : [a, b] \to U$.
- *Une courbe* $\gamma : [a, b] \to U$ *est dite de* ***classe*** $\mathcal{C}^1$ ***par moreaux*** *s'il existe* $t_1, \cdots, t_k \in \mathbb{R}$ *tel que :* $a = t_1 < t_2 < \cdots < t_k = b$ *et* γ *dans classe* $\mathcal{C}^1$ *dans les intervalles* $[t_i, t_{i+1}]$ *pour tous* $i = 1, \cdots, k-1$.

Définition 4.1.2 *Soit* $\alpha \in \Omega^1(U)$ *une 1-forme sur* U*, et* γ *une courbe de classe* $\mathcal{C}^1$ *par moreaux sur* U*,*
*alors on définit l'****intégrale de*** α ***le long de la courbe*** γ *par :*

$$\int_\gamma \alpha := \sum_{i=1}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \alpha_{\gamma(t)}.\gamma 1'(t)\ dt,$$

avec γ_i *est la restriction de* γ *à l'intervalle* $[i, i+1]$.

Proposition 4.1.1 *avec les mêmes condition que la définition précédente on a :*

1. *Avec un changement de paramétrage croissant de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* γ *l'intergale ne change pas, et*

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} \alpha_{\gamma(t)}.\gamma 1'(t)\ dt = \int_{\varphi^{-1}(t_i)}^{\varphi^{-1}(t_{i+1})} \alpha_{\gamma\circ\varphi(t)}.\gamma'(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

   Et si le paramétrage est décroissant alors la transformée est en son opposé.

2. *Si* α *est exacte, et soit deux courbes* γ_1 *et* γ_2 *paramétrées de classe* $\mathcal{C}^1$ *et de mêmes extrémités, c.a.d. mêmes points de dépare* a, b *et mêmes images* $\gamma_1(a) = \gamma_2(a)$ *et* $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$ *alors*

$$\int_{\gamma_1} \alpha = \int_{\gamma_2} \alpha$$

3. *Si α est exacte, c.a.d. qu'il existe une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ lisse telle que $\alpha = df$, et $\alpha = df$, alors l'intégrale le long de la courbe γ devient :*

$$\int_\gamma \alpha = \int_\gamma df = \int_a^b \frac{df}{dt} dt,$$

où encore :

$$\int_\gamma \alpha = \int_\gamma df = \int_a^b f'(\gamma(t))\,\gamma'(t)dt = \int_a^b (f \circ \gamma)'(t)dt = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

4. *Dans le cas ou γ est une courbe fermée, c.a.d. $\gamma(a) = \gamma(b)$:*

$$\int_\gamma df = 0.$$

Proposition 4.1.2 *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ par arcs et soit α une 1-forme sur U, alors*
la forme α est exacte si et seulement si pour tout lacet (courbe fermée) γ de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux on a $\int_\gamma \alpha = 0$.

Proposition 4.1.3 *Si $U \subset \mathbb{R}^2$ ouvert, et avec une forme fermée*
$df = f_1\ dx + f_2\ dy$, alors l'intégral le long d'une courbe $\gamma : [a, b] \to U$ de classe $\mathcal{C}^1$ est donnée par :

$$\int_\gamma df = \int_\gamma f_1\ dx + f_2\ dy = \int_a^b \left(f_1(x(t), y(t))\frac{dx}{dt} + f_2(x(t), y(t))\frac{dy}{dt} \right) dt.$$

Lemme 4.1.1 *Avec lers même conditions de la proposition précédente :*

- *L'intégral le long de $-\gamma$ est*

$$\int_{-\gamma} f_1 dx + f_2 dy = -\int_\gamma f_1 dx + f_2 dy.$$

- *Si deux courbes γ_1 et γ_2 sont équivalentes alors*

$$\int_{\gamma_1} f_1 dx + f_2 dy = \int_{\gamma_2} f_1 dx + f_2 dy.$$

Proposition 4.1.4 *Si $U \subset \mathbb{R}^3$ ouvert, et avec une forme fermée*
$df = f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz$, alors l'intégral le long d'une courbe $\gamma : [a, b] \to U$ de classe $\mathcal{C}^1$ est donnée par :

$$\begin{aligned}\int_\gamma df &= \int_\gamma f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz \\ &= \int_a^b \left(f_1(x(t), y(t), z(t))\frac{dx}{dt} + f_2(x(t), y(t), z(t))\frac{dy}{dt} + f_3(x(t), y(t), z(t))\frac{dz}{dt} \right) dt.\end{aligned}$$

4.2 Théorème de Stocks

4.2.1 Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$ orientées

Une sous-variété orientée de $\mathbb{R}^n$ est un objet mathématique qui ressemble localement à un espace euclidien de dimension plus petite et qui est muni d'une orientation cohérente. Ce type de sous-variété est essentiel pour définir des intégrales de formes différentielles et appliquer le théorème de Stokes dans $\mathbb{R}^n$.

L'orientation est essentielle pour définir l'intégration sur les sous-variétés. Dans le théorème de Stokes, on doit intégrer sur une sous-variété M et sa frontière ∂M, qui doivent toutes deux être orientées de manière cohérente. Cette orientation détermine le signe de l'intégrale et permet d'interpréter des résultats comme l'égalité entre une intégrale sur un domaine et une intégrale sur sa frontière.

En résumé : - Une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ est une partie de $\mathbb{R}^n$ qui est "lisse" et ressemble localement à un espace euclidien de dimension inférieure. - Une sous-variété orientée est une sous-variété où un choix d'orientation cohérent a été fixé, ce qui est crucial pour les intégrales et les théorèmes comme celui de Stokes.

Définition 4.2.1 (Orientation d'une sous-variété) *Une sous-variété est* ***orientable*** *s'il est possible de choisir une orientation qui est cohérente partout sur la sous-variété.*

Une ***orientation*** *consiste à choisir un "sens" pour chaque point de la sous-variété de manière continue.*

Pour une sous-variété de dimension k, l'orientation est généralement donnée en choisissant un ordre pour une base des vecteurs tangents (une base pour chaque point de la sous-variété) qui se conserve de manière cohérente à travers toute la sous-variété.

Définition 4.2.2 (Sous-variété orientée de $\mathbb{R}^n$) *Une* ***sous-variété orientée*** *de dimension k dans $\mathbb{R}^n$ est une sous-variété $M \subset \mathbb{R}^n$ de dimension k munie d'une orientation.*

Une ***orientation*** *sur M consiste à choisir, pour chaque point $p \in M$, une base orientée $\{e_1, \ldots, e_k\}$ de l'espace tangent T_pM, de façon cohérente sur M, c'est-à-dire qu'il est possible de couvrir M par des cartes locales (U, ϕ) telles que les bases canoniques $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_k}\right\}$ de $\mathbb{R}^k$ soient compatibles entre elles d'un voisinage à l'autre.*

Formellement :
cela signifie que l'orientation sur M est définie par une classe d'équivalence de bases de T_pM qui reste continue sur M.

Cas des courbes et des surfaces :

- Pour une courbe dans $\mathbb{R}^n$ (une sous-variété de dimension 1), une orientation correspond à choisir un sens de parcours (par exemple, de gauche à droite).
- Pour une surface dans $\mathbb{R}^3$ (une sous-variété de dimension 2), une orientation correspond à choisir un sens pour le vecteur normal (par exemple, vers l'extérieur ou vers l'intérieur).

Exemple de sous-variété orientée :

1. Considérons le cercle unité $S^1 \subset \mathbb{R}^2$, qui est une sous-variété de dimension 1 (une courbe) dans $\mathbb{R}^2$. On peut choisir d'orienter S^1 en fixant un sens de parcours, par exemple dans le sens antihoraire. Ce choix d'orientation nous permet d'intégrer des formes 1-différentielles sur le cercle de manière cohérente, en sachant quel "sens" est pris en compte pour les intégrales.
2. Pour une surface comme la sphère unité $S^2 \subset \mathbb{R}^3$, qui est une sous-variété de dimension 2 dans $\mathbb{R}^3$, l'orientation est souvent donnée par le choix de la direction du vecteur normal : par exemple, une orientation "vers l'extérieur" signifie que les vecteurs normaux pointent vers l'extérieur de la sphère.

4.2.2 Théorème de Stokes dans $\mathbb{R}^n$

Pour comprendre en profondeur le théorème de Stokes dans le cadre de $\mathbb{R}^n$, explorons étape par étape ce qu'il signifie en termes de formes différentielles et d'intégrales.

Théorème 4.2.1 (Le théorème de Stokes dans $\mathbb{R}^n$) *Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un domaine orienté de dimension k avec une frontière orientée ∂U de dimension $k-1$. Si ω est une $(k-1)$-forme définie sur U, le théorème de Stokes affirme que :*

$$\int_U d\omega = \int_{\partial U} \omega.$$

Cette formule dit que l'intégrale de la différentielle $d\omega$ de ω sur le domaine U est égale à l'intégrale de ω sur la frontière ∂U de U.

Interprétation

Le théorème de Stokes relie l'intégration sur un domaine U à l'intégration sur sa frontière ∂U. Intuitivement, cela signifie que l'intégrale "globale" d'un changement (d'une dérivée extérieure) sur un domaine est déterminée par les valeurs sur les bords de ce domaine.

4.2.3 Cas particuliers dans l'analyse vectorielle

Dans $\mathbb{R}^3$, le théorème de Stokes prend des formes connues en analyse vectorielle.

Théorème 4.2.2 (Le Théorème de Stokes pour le rotationnel) *Si S est une surface orientée dans $\mathbb{R}^3$ et que $\vec{F}$ est un champ de vecteurs, alors on peut écrire :*

$$\int_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = \oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

où $d\vec{S}$ est l'élément de surface orienté sur S et $d\vec{r}$ est l'élément de ligne le long de la courbe ∂S, la frontière de S. Ici, $\nabla \times \vec{F}$ est analogue à $d\omega$ pour une 1-forme associée au champ $\vec{F}$.

Théorème 4.2.3 (Le théorème de la divergence ou théorème de Gauss) *Si $V \subset \mathbb{R}^3$ est un volume avec une surface fermée $S = \partial V$, alors pour un champ vectoriel $\vec{F}$, on a :*

$$\int_V (\nabla \cdot \vec{F})\, dV = \oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}.$$

Ici, $\nabla \cdot \vec{F}$ correspond à $d\omega$ pour une 2-forme associée au champ $\vec{F}$.

4.3 Applications du théorème de Stockes

Le théorème de Stokes est fondamental dans de nombreux domaines :

- **Électromagnétisme**
  Les lois de Maxwell utilisent le théorème de Stokes pour relier les intégrales de surface et les intégrales de ligne
- **Théorie des champs**
  En physique, il permet de lier le comportement de champs vectoriels sur des surfaces aux valeurs de ces champs sur les frontières de ces surfaces.
- **Calcul des variations et géométrie différentielle**
  Le théorème de Stokes généralise des théorèmes intégrals à des espaces de dimensions plus élevées et permet d'étudier des propriétés géométriques et topologiques de variétés.

En résumé, le théorème de Stokes dans $\mathbb{R}^n$ établit un lien entre la géométrie d'un domaine et sa frontière, en permettant le passage d'une intégrale sur le domaine à une intégrale sur sa frontière, tout en généralisant des concepts classiques d'analyse vectorielle dans un cadre abstrait et puissant.

Chapitre 5

Variétés différentielles

Il s'agit d'un cours d'introduction aux variétés différentiables. Ce sont des analogues de dimensions supérieures de surfaces comme celle-ci :

FIGURE 5.1 – La Bouteille de Klein

C'est les images à avoir, mais nous ne devons pas penser à une variété comme toujours inclut dans un espace euclidien fixe comme celui-ci, mais plutôt comme un objet abstrait. L'une des forces motrices historiques de la théorie était la relativité générale, où la variété est un espace-temps à quatre dimensions, des trous de ver et tout :

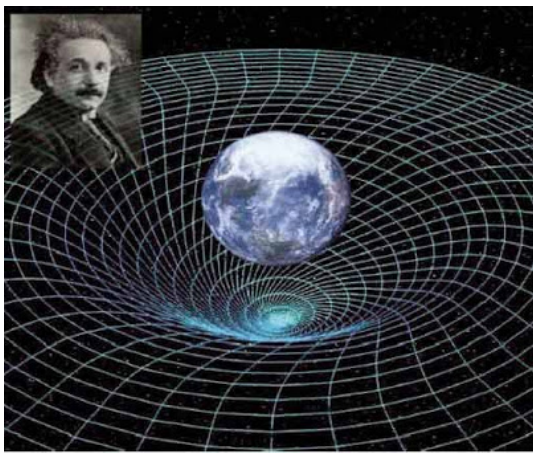


FIGURE 5.2 – L'espace temps de la relativité général

L'espace-temps ne fait pas partie d'un plus grand espace euclidien, il existe simplement, mais nous devons apprendre à faire une analyse sur celui-ci, ce qui est le sujet de ce cours.

Un autre apport au sujet vient de la mécanique - la dynamique des systèmes mécaniques complexes implique des espaces avec de nombreux degrés de liberté.

La première idée que nous rencontrerons est en réalité la propriété de définition d'une variété - de pouvoir décrire localement des points par n nombres réels, *coordonnées locales*. Il faudra ensuite définir des objets analytiques (*champs vectoriels*, *formes différentielles* par exemple) qui sont indépendants du choix des coordonnées. Cela a un double avantage : d'une part, cela nous permet de discuter de ces objets sur des variétés topologiquement non triviales comme les sphères, et d'autre part, il fournit également le langage pour exprimer les équations de la physique mathématique sous une forme sans coordonnées, l'un des principes fondamentaux de la relativité.

L'exemple le plus élémentaire des techniques analytiques sur une variété est la théorie des formes différentielles et la dérivée extérieure. Cela généralise le *grad*, *div* et *curl* du calcul tridimensionnel ordinaire. Elle fournit une généralisation très naturelle des théorèmes de Green et de Stokes en trois dimensions et donne également naissance à la *cohomologie de De Rham* qui est une manière analytique d'approcher la topologie algébrique de la variété. Cela a été important dans une vaste gamme de domaines allant de la géométrie algébrique à la physique théorique.

Une utilisation plus raffinée de l'analyse nécessite des données supplémentaires sur la variété, avec des définitions un peux avancés, on peut décrire certaines caractéristiques de base des métriques riemanniennes. Celles-ci généralisent la première forme fondamentale d'une surface et, sous leur forme lorentzienne, fournissent la substance de la relativité générale. Une histoire plus complète demande un cours beaucoup plus long, mais on donne juste les éléments de base des variétés.

Nigel Hitchin

5.1 Variétés topologiques

Soit M un espace topologique i.e. : ensemble de points muni d'une topologie. tel que :

1. M est à base dénombrable : M a une base dénombrable d'ouverts, où il admet un sous-ensemble dénombrable dense.
2. M est espace séparé (en anglais : Hosdorff space) : pour tout deux points distincts ont des voisinages distincts, e.i.

$$\forall x, y \in M \mid x \neq y : \quad \exists U \in \mathcal{V}(x),\ \exists V \in \mathcal{V}(y) \mid U \cap V = \varnothing.$$

Remarque 5.1.1 ***Pour la suite on considère tous les ensembles comme des espaces topologique, dénombrables et séparés***

5.2 Cartes locale et atlas

Définition 5.2.1 *Soit M un espace topologique, une* ***carte****, ou* ***carte locale*** *ou* ***application de coordonnée locale*** *est le pair (U, φ) tel que*

1. *U est un sous-ensemble ouvert de M,*
2. *l'application $\varphi : U \to \Omega$ est un homéomorphisme dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$.*

Définition 5.2.2 *Dans $\mathbb{R}^n$ on appelle les **fonctions projection** : $\pi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ les fonctions $\mathcal{C}^\infty$ définis par*

$$\pi_i(x_1, \ldots, x_n) = x_i, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Définition 5.2.3 *Soit M un espace topologique*

- *Soit $p \in M$, on dit de (U, φ) est une **carte de** p si et seulement si $p \in U$.*
- *Si (U, φ) est une carte, alors les fonction $x_i = \pi_i \circ \varphi$ sont dites **coordonnées locales**.*
- *Pour tout $p \in U$ le n-uplet $(x_1(p), \ldots, x_n(p))$ est **l'ensemble des coordonnés de** p par rapport à la carte (U, φ).*
- *Par l'inverse, (Ω, φ^{-1}) est dite la **paramétrisation local**.*

Définition 5.2.4 *Soit M un espace topologique, et soient (U_i, φ_i) et (U_j, φ_j) deux cartes locales avec $U_i \cap U_j \neq \varnothing$.*
*On appelle **applications de transition** où (**applications de changement de cartes**) les applications, φ_i^j et φ_j^i de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, définis par*

$$\varphi_i^j = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \to \varphi_j(U_i \cap U_j)$$
$$\varphi_j^i = \varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \to \varphi_i(U_i \cap U_j)$$

Il est claire que $\varphi_i^j = (\varphi_j^i)^{-1}$, (sont isomorphes).
*Dans ce cas on dit que (U_i, φ_i) et (U_j, φ_j) sont des **cartes compatibles**.*

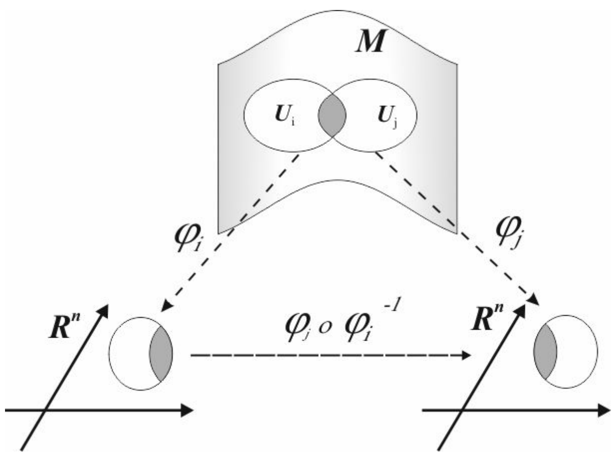


FIGURE 5.3 – Application de changement de cartes

Définition 5.2.5 *Soit M un espace topologique, et $n \in \mathbb{N}^*$, $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$. On appel n-**atlas de classe** $\mathcal{C}^k$ où un $\mathcal{C}^k$ n-**atlas**, (où tout simplement un **atlas**) l'ensemble des cartes sur M noté $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}$ tel que :*

1. *Les U_i recouvrent M i.e.*
$$M = \bigcup_i U_i$$
2. *$\varphi(U_i) \subseteq \mathbb{R}^n$ pour tout i, i.e. n est une constante pour toutes les cartes.*
3. *Dans le cas ou $U_i \cap U_j \neq \varnothing$ les applications de changement de carte φ_i^j et φ_j^i sont des $\mathcal{C}^k$-difféomorphismes.*

*Si $k = \infty$ on dit que c'est un **atlas lisse** (en. : Smooth).*

Remarque 5.2.1

1. *Nous devons nous assurer que nous avons suffisamment de cartes pour mener à bien notre programme de généralisation du calcul sur $\mathbb{R}^n$ aux variétés.*
2. *Pour cela, nous devons pouvoir ajouter de nouvelles cartes chaque fois que cela est nécessaire, à condition qu'elles soient compatibles avec les cartes précédentes dans l'atlas existant.*

Définition 5.2.6 *Soient M un espace topologique, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ deux atlas sur M.*

*On dit qu'ils sont des **atlas compatibles** si est seulement si toute carte de l'un est compatible avec toutes les cartes de l'autre atlas.*

Remarque 5.2.2

- *Deux atlas sont compatibles équivalant a dire que leurs union est aussi un atlas.*
- *La compatibilité des $\mathcal{C}^k$ n-atlas induit une relation d'équivalence sur M.*
- *Alors, soit $\mathcal{A}$ un atlas sur M, la collection $\widetilde{\mathcal{A}}$, de toutes les cartes compatibles avec $\mathcal{A}$ est un **atlas maximal** dans la classe d'équivalence des cartes compatibles avec $\mathcal{A}$.*

Définition 5.2.7 (Variété topologique) *Tout espace topologique séparé M muni d'un n-atlas $\mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}^*$, tel que $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}$ ou φ_i sont des homéomorphismes (ou tout simplement $\mathcal{A}$ est un n-atlas de classe $\mathcal{C}^0$), est dite une **variété topologique**. Noté $(M, \mathcal{A})$.*
*n est dite la **dimension** de la variété M.*

5.3 Variétés différentielles abstraites

Définition 5.3.1 *Soit M un espace topologique séparé dénombrable, $n \in \mathbb{N}^*$, pour un certain $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$.*
*Le couple $(M, \mathcal{A})$ est dite **variété différentielle** de dimension n et de classe $\mathcal{C}^k$ si :*
M admet un n-atlas $\mathcal{A}$ de classe $\mathcal{C}^k$, avec $k > 0$.

*Si $k = \infty$ on dit que c'est un **variété lisse** (en. : Smooth manifold).*

Remarque 5.3.1

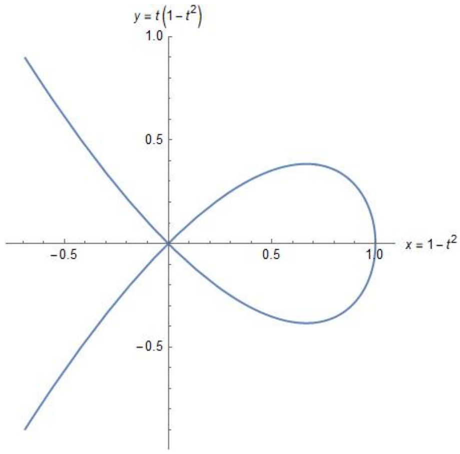


FIGURE 5.4 – Nodal cubic, n'est pas une variété

1. *Il aurait peut-être été préférable d'utiliser la terminologie "**variété abstraite**" plutôt que "**variété**" pour souligner le fait que l'espace M n'est pas a priori un sous-espace de $\mathbb{R}^N$, pour un certains N.*
2. *On général on dit une variété différentielle pour parler d'une variété de classe $\mathcal{C}^\infty$.*
3. *On note M^n pour dire que M est une variété de dimension n.*
4. *Toute variété différentielle de classe $\mathcal{C}^k$ est une variété topologique.*

Exemples :

1. L'ensemble $\mathbb{R}^n$ est une variété différentielle de dimension n, pour cela il suffit de prendre l'atlas : $\mathcal{A} = \{(\mathbb{R}^n, Id)\}$ avec Id est le difféomorphisme $\mathcal{C}^\infty$ identité.
2. Tout ouvert U de $\mathbb{R}^n$ est une variété différentielle de dimension n et de classe $\mathcal{C}^\infty$, on peut prendre l'atlas d'une seul carte : $\mathcal{A} = \{(U, Id)\}$.
3. L'ensemble $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = x^2 - x^3\}$ appelé **nodal cubic** *n'est pas une variété*, on peut aussi le définir comme une courbe paramétrée $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 1 - t^2,\ y = t(1 - t^2),\ \forall t \in \mathbb{R}\}$. Le problème ce pose à l'origine, qui est de dimension 2 alors que le reste est de dimension 1.
4. L'ensemble $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = x^3\}$ appelé **Parabole semi-cubique** (en : **Cuspidal cubic**) *est une variété topologique mais elle n'est pas différentiable*, on aussi le définir comme une courbe paramétrée $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x = t^2,\ y = t^3),\ \forall t \in \mathbb{R}\}$. Le problème ce pose à l'origine, qui est continu mais non différentiable .

Proposition 5.3.1 *Si un espace topologique M est une variété topologique parce qu'il a un atlas composé d'une seule carte, alors il est automatiquement une variété lisse !*

Corrolaire 5.3.1 *En particulier si $f : U \to \mathbb{R}^m$ une fonction continue d'un sous-ensemble ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$, alors le graphe Γ_f définit par :*

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^{n+m} \mid x \in U\}$$

est une variété lisse.

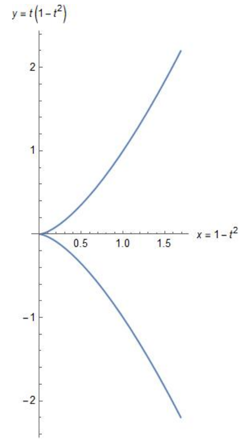


FIGURE 5.5 – Cuspidal Cubic , est une variété topologique non différentiable

Prouve :
Ceci est vrais car : on prenant l'atlas composé par la seul carte (U, φ) avec φ est la projection lisse définit par

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \Gamma_f & \to & U \\ & (x, f(x)) & \mapsto & x \end{array}$$

avec $\varphi^{-1}(U) = \Gamma_f$ qui est une immersion $\mathcal{C}^\infty$.

Example 5.3.1 *La sphère unitaire* $\mathbb{S}^n$
Avec la projection stéréographique par le pôle nord et le pôle sud, définissent deux cartes sur $\mathbb{S}^n$ *est une variété lisse.*
Soient $N = (0, \ldots, 0, 1)$ *et* $S = (0, \ldots, 0, -1)$ *le pôle nord et le pôle sud respectivement. on définit les projections stéréographiques des pôles nord et sud par : (voir la Figure 5.6)*

$$\begin{array}{rccc} \sigma_N : & \mathbb{S}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ & (x_1, \ldots, x_{n+1}) & \mapsto & \frac{1}{1+x_{n+1}}(x_1, \ldots, x_n) \end{array} \tag{5.1}$$

$$\begin{array}{rccc} \sigma_S : & \mathbb{S}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ & (x_1, \ldots, x_{n+1}) & \mapsto & \frac{1}{1-x_{n+1}}(x_1, \ldots, x_n) \end{array} \tag{5.2}$$

les inverses de ces projections sont donnés par :

$$\sigma_N^{-1} = \frac{1}{(\sum_{i=1}^n x_i^2) + 1} \left(2x_1, \ldots, 2x_n, (\sum_{i=1}^n x_i^2) - 1 \right)$$
$$\sigma_S^{-1} = \frac{1}{(\sum_{i=1}^n x_i^2) + 1} \left(2x_1, \ldots, 2x_n, (\sum_{i=1}^n x_i^2) + 1 \right)$$

Donc, si on pose $U_N = \mathbb{S}^n - \{N\}$ *et* $U_S = \mathbb{S}^n - \{S\}$ *on aura bien* $\{(U_N, \sigma_N), (U_S, \sigma_N S)\}$ *un atlas lisse de la sphère.*
Comme exemple : pour tout $p \in U_N \subset \mathbb{S}^2$ *son image est* $p' = \sigma_N(p) \in \mathbb{R}^2$ *qui est l'intersection de la ligne droite* (N, p) *avec* $\mathbb{R}^2$.

Pour les isomorphismes de changement des cartes :$U_N \cap U_S = \mathbb{S}^2 - \{N, S\}$ *sont donnés par :*

$$\sigma_N \circ \sigma_S^{-1} \sigma_N \circ \sigma_S^{-1} = \sigma_S \circ \sigma_N^{-1}$$

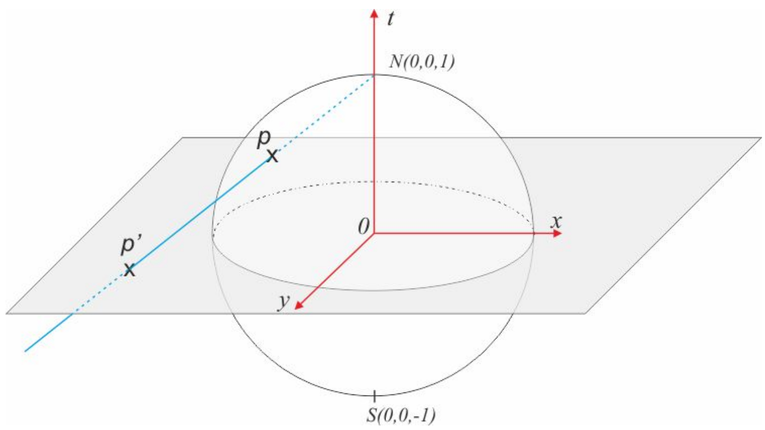


FIGURE 5.6 – projection stéréographique par le pôle nord, de $\mathbb{S}^2$ dans $\mathbb{R}^2$

définit par :

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}(x_1, \dots, x_n).$$

Théorème 5.3.1 (produits de variétés)
Soient M_1 et M_2 deux variétés différentielles de classe $\mathcal{C}^k$ et de dimensions respective n_1 et n_2, alors $M_1 \times M_2$ est une variété différentielle de classe $\mathcal{C}^k$ et de dimension $n_1 + n_2$.

Prouve : On sait bien que $M_1 \times M_2$ est un espace topologique, topologie définit pas la topologie produit (les ouverts de $M_1 \times M_2$ sont les unions quelconques des sous-ensembles $U \times V$ pour tous U ouvert de M_1 et V ouvert de M_2).

Pour toutes cartes quelconques (U_i, φ_i) de M_1 et (V_j, ψ_j) de M_2, on définit la carte $(U_i \times V_j, \varphi_i \times \psi_j)$ de $M_1 \times M_2$ avec :

$$\begin{array}{rccc} \varphi_i \times \psi_j : & U_i \times V_j & \to & \mathbb{R}^{n+m} \\ & (p, q) & \mapsto & (\varphi_i(p),\ \psi_j(q)) \end{array}.$$

Définition 5.3.2 (Application entre variétés) *Soient M_1 et M_2 deux variétés de classe $\mathcal{C}^k$ de dimensions respective n_1 et n_2, on dit que $f : M_1 \to M_2$ est une **application de classe $\mathcal{C}^k$ entre variétés** (ou bien **$\mathcal{C}^k$-application**), si pour tout $p \in M_1$ il existe une carte (U_p, φ) de M_1 et une carte (V_q, ψ) de M_2 tel que :*

1. *$f(p) = q$*
2. *$f(U_p) \subset V_q$*
3. *et l'application de $\mathbb{R}^{n_1} \to \mathbb{R}^{n_2}$:*

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U_p) \to \psi(V_q)$$

est une fonction de classe $\mathcal{C}^k$.

*On dit que f est **lisse** (ou de classe $\mathcal{C}^\infty$) si $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.*
On note $f^{\varphi\psi}$ la fonction $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$.

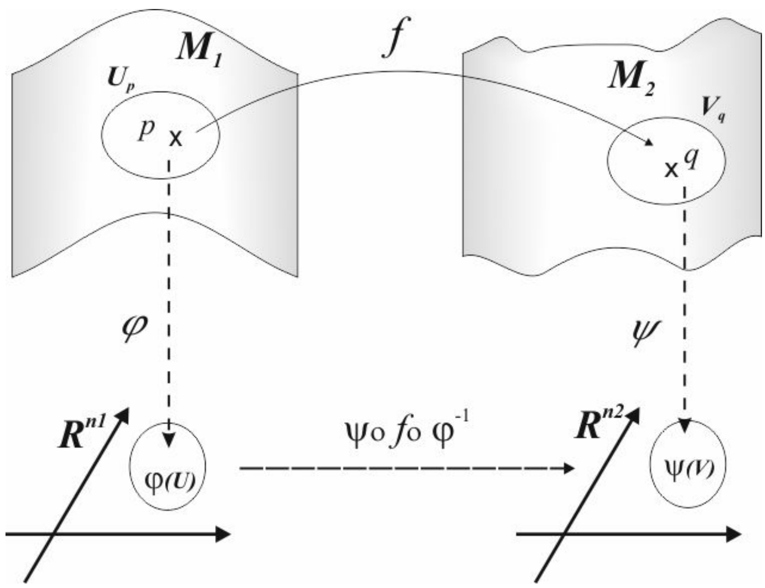


Figure 5.7 – Application entre variétés

Remarque 5.3.2

1. *Cette notion de différentiabilité ne dépend pas du choit des cartes de M_1 et M_2.*
2. *$f : M \to N$ est difféomorphisme si f est bijective et f et f^{-1} sont différentiable, alors on a nécessairement dim $M_1 =$ dim M_2.*

Définition 5.3.3 (Rang d'une application)

1. ***Rappel :*** *Soit $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une application différentiable en $x \in \mathbb{R}^n$. Le* ***Rang*** *de h en x est défini comme le rang de l'application linéaire dh_x (e.i. dim $Im\ dh_x$). On le note $Rg_x h$.*
   Où dh_x est la différentielle de h on x.
2. *Soit $f : M^n \to N^m$ une application différentielle entre deux variétés, et p un point de M, on appel* ***Rang*** *de l'application f en p le rang de la fonction*

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,$$

avec (U_p, φ) une carte de M contenant p et $(V_{f(p)}, \psi)$ une carte de N contenant $f(p)$, noté

$$Rg_p f := Rg_{\varphi(p)}\ (\psi \circ f \circ \varphi^{-1}).$$

Proposition 5.3.2 *Soit $f : M \to N$ une application différentiable entre variétés et $p \in M$, $f(p) = q \in N$. Alors le Rang de f ne dépend pas du choix des cartes (U_p, φ) et (V_q, ψ).*

Prouve : Soient (U_p, φ) et (U'_p, φ') deux cartes de M contenant p et soient (V_q, ψ) et (V'_q, ψ') deux cartes de N contenant $q = f(p)$. avec l'intersection des domaines on a :

$$\psi' \circ f \circ \varphi'^{-1} = (\psi' \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \varphi'^{-1})$$

Or on a que la différentielle de $\psi' \circ \psi^{-1}$ et de $\varphi \circ \varphi'^{-1}$ sont des isomorphismes, alors

$$Rg_{\varphi'(p)}(\psi' \circ f \circ \varphi'^{-1}) = Rg_{\varphi(p)}(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})$$

Remarque 5.3.3 *Pour $f : M^n \to N^m$ on a bien $f^{\varphi\psi} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, alors si on pose $f^{\varphi\psi} = (f^1, \ldots, f^m)$ alors le Rang de dans un point $p \in M$ est le Rang de la matrice jacobienne :*

$$Jac\ f_{\varphi(p)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial x^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f^m}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^m}{\partial x^n} \end{pmatrix}_{|\varphi(p)} \tag{5.3}$$

Définition 5.3.4 *Soit $f : M \to N$ une application différentiable entre variétés.*

1. *On dit que f est une **immersion** si $Rg_p f = dim\ M$ pour tout $p \in M$, e.i. Df_p est injectif.*
   Ce qui nous oblige a avoir $dim\ M \leq dim\ N$.
2. *On dit que f est une **submersion** si $Rg_p f = dim\ N$ pour tout $p \in M$, e.i. Df_p est surjective.*
   Ce qui nous oblige a avoir $dim\ M \geq dim\ N$.
3. *On dit que f est un **plongement** si f est immersion injective et un homéomorphisme de M dans $f(M)$ pour la topologie induite de celle de N.*

Lemme 5.3.1 *Une application entre variétés $f : M \to N$ est un difféomorphisme si et seulement si f est bijective et en tout point $p \in M$ on a*

$$Rg_p\ f = dim\ M = dim\ N.$$

Remarque 5.3.4

1. *Une immersion n'est pas forcement injective.*
2. *Une application injective n'est pas forcement une immersion.*
3. *Une immersion injective est déjà une bijection continue de M dans $f(M)$.*
   Pour qu'elle soit un homéomorphisme, il suffit que f^{-1} soit continue sur $f(M)$.

Définition 5.3.5 (Sous-variété) *Soit M une variété différentielle abstraite de dimension n et de classe $\mathcal{C}^k$, et soit N un sous-ensemble non-vide de M. On dit que N est une **sous-variété** de M de dimension n' est de classe $\mathcal{C}^k$ ($n' \leq n$), si*
Pour tout point $p \in N$, il existe une carte (U_p, φ) de M contenant p telle que

$$\varphi(U_p \cap N) = \varphi(U_p) \cap (\mathbb{R}^{n'} \times \{0_{\mathbb{R}^{n-n'}}\}).$$

Théorème 5.3.2 *Soit M une variété différentielle abstraite de dimension n et de classe $\mathcal{C}^k$, et soit N un sous-Variété de M de dimension n' alors N est une variété différentielle abstraite de dimension n' et de classe $\mathcal{C}^k$.*

Prouve : il suffit de définir l'atlas de N par celui de M.
Soit $p \in N$ et (U_p, φ) une carte de M contenant p.
En premier la topologie de N est la topologie induite par celle de M.
On définit la carte différentielle (V_p, ψ) contenant p sur N par :

$$V_p = U_p \cap N, \qquad \psi = \varphi|_{V_p}.$$

Théorème 5.3.3 *Soit $f : U \subset M^n \to N^k$ une application différentiable entre deux variétés différentielles, et U un ouvert de M, alors*

1. *Si f est un plongement sur U, alors $W = f(U)$ est une sous-variété différentielle de N de dimension n.*
2. *Si f est une submersion et $y \in f(M)$, alors $H = f^{-1}(y)$ est une sous-variété différentielle de M de dimension $n - k$.*

Prouve :

le lien : D :\ Documents\ OneDrive\ Cours enseignement\ Géométrie differentielle\ cours - Géométrie differentielle AOT13.pdf page 8

Remarque 5.3.5 (Variétés aux sous-variétés de $\mathbb{R}^n$)
Soit M une variété différentielle et $f : M \to \mathbb{R}^n$ un plongement.
L'ensemble $f(M)$ est alors une sous-variété de $\mathbb{R}^n$. Les variétés M et $f(M)$ sont alors difféomorphes, c'est-à-dire indistinguables du point de vue de la géométrie différentielle.

Inversement :
Est-il possible de plonger toute variété dans un espace $\mathbb{R}^N$?
De façon équivalente, est-il possible de considérer n'importe quelle variété comme une sous-variété d'un $\mathbb{R}^N$?

La réponse est oui, et on peut de plus préciser N.

Théorème 5.3.4 (Plongement de Whitney) *Toute variété de dimension n admet un plongement sur une sous-variété fermée de $\mathbb{R}^{2n+1}$.*

5.4 Espaces tangentes

Jusqu'à présent, nous avons parlés d'applications lisses entre variétés mais pas de leurs différentielles !
Pour définir cette dernière, il nous faut d'abord définir l'espace tangent en un point p a une variété M. Nous allons nous inspirer de ce qui a été fait pour les sous-variétés de $\mathbb{R}^n$, en utilisant les courbes passant par p. [11, 17].

Pour toute la suite de cette section, M ***est une variété lisse de dimension*** n***.***

5.4.1 Vecteur tangent et espace tangent

Définition 5.4.1 (Courbe sur une variété) *Soit $p \in M$ un point quelconque. On appelle* ***courbe*** *passent par p, toute application différentiable c entre variétés, et il existe $]-\varepsilon, \varepsilon[\subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert centré en 0 telle que :*

$$c: \begin{array}{ccc}]-\varepsilon, \varepsilon[& \to & M \\ t & \mapsto & c(t) \end{array}, \qquad \text{avec} \quad c(0) = p. \tag{5.4}$$

Définition 5.4.2 *deux courbes c_1, c_2 sont* ***tangentes*** *au point p si*

- $c_1(p) = c_2(p)$
- *Il existe une carte locale (U, φ) de p telle que :*

$$\frac{d}{dt}(\varphi \circ c_1)(0) = \frac{d}{dt}(\varphi \circ c_2)(0).$$

Remarque 5.4.1

1. *Cette définition est indépendante de la carte choisie.*
   En effet si (V, ψ) est une autre carte autour de p, on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\psi \circ c_1)(0) &= \frac{d}{dt}\left[(\psi \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ c_1)\right](0) \\ &= D(\psi \circ \varphi^{-1}) \circ \frac{d}{dt}(\varphi \circ c_1)(0) \\ &= D(\psi \circ \varphi^{-1}) \circ \frac{d}{dt}(\varphi \circ c_2)(0) \\ &= \frac{d}{dt}(\psi \circ c_2)(0). \end{aligned}$$

2. *On définit ainsi une relation d'équivalence sur l'ensemble des courbes passant par p par : deux courbes c_1 et c_2 sont équivalentes si elles sont tangentes en p, e.i.*

$$c_1 \sim c_2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad c_1(p) = c_2(p) \quad \text{et} \quad \frac{d}{dt}(\varphi \circ c_1)(0) = \frac{d}{dt}(\varphi \circ c_2)(0).$$

Définition 5.4.3 (Vecteur tangent & Espace tangent)

Un ***vecteur tangent*** *à M en p est une classe d'équivalence de courbes tangentes en p.*

L'espace tangent *à M en p, noté T_pM, est l'ensemble de tous les vecteurs tangents à M en p.*

Remarque 5.4.2 *On peut montrer que T_pM est un espace vectoriel en utilisant une carte. La structure vectorielle n'apparait cependant pas clairement. De plus la définition de T_pM fait intervenir un espace très gros, l'ensemble des courbes passant par p, qui n'est pas aisé à manipuler. Nous allons voir maintenant qu'on peut donner une autre définition équivalente des vecteurs tangents qui résoudra ces difficultés.*

5.4.2 Dérivations

Pour cette section M une variété différentielle de dimension n lisse et p un point quelconque de M.

Définition 5.4.4 *Soit $U \subset M$ ouvert tel que $p \in U$*

$$\mathcal{C}^\infty(p) = \{f : U \to \mathbb{R},\ \mathcal{C}^\infty\ /\ f = g \iff \exists V_p \in \mathcal{V}(p) :\ f(x) = g(x),\ \forall x \in V_p \subset U\}$$

c.a.d : Considérons l'ensemble des fonctions à valeurs réelles, de classe $\mathcal{C}^\infty$, définies sur un ouvert de M contenant un voisinage de p, dans lequel on identifie les fonctions qui sont égales sur un voisinage de p (on obtient ainsi des germes de fonction). On note $\mathcal{C}^\infty(p)$ cet ensemble.

Remarque 5.4.3 *L'ensemble $\mathcal{C}^\infty(p)$ est une algèbre, c'est-à-dire un espace vectoriel muni d'une opération interne (la multiplication).*

Sur cet ensemble de fonctions on définit des opérateurs.

Définition 5.4.5 (Dérivation) *L'application (ou l'opérateur) $D_p : \mathcal{C}^\infty(p) \to \mathbb{R}$ est une **dérivation** si : pour toutes fonctions $f, g \in \mathcal{C}^\infty(p)$ et pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ on a*

1. *D_p est linéaire :*
$$D_p(\alpha f + \beta g) = \alpha D_p(f) + \beta D_p(g).$$
2. *D_p satisfait la condition de Leibniz :*
$$D_p(fg) = D_p(f).g(p) + f(p).D_p(g).$$

*On note $\mathcal{D}(p)$ **l'ensemble des dérivations** en p.*

Proposition 5.4.1

- *L'ensemble $\mathcal{D}(p)$ est un **espace vectoriel** pour les opérations :*
  $\forall D_p, D'_p \in \mathcal{D}(p)$ et $\forall \alpha \in \mathbb{R}$
  - ⋆ $(D_p + D'_p)(f) = D_p(f) + D'_p(f)$
  - ⋆ $D_p(\alpha f) = \alpha D_p(f)$
- *$\forall D_p \in \mathcal{D}(p)$ et $\forall C^{te} \in \mathcal{C}^\infty(p)$ fonction constante : $D_p(C^{te}) = 0$.*

Lemme 5.4.1 (Lemme d'Hadamard) *Soit (U, φ) une carte locale de M centrée en p avec $\varphi = (x_1, \cdots, x_n)$ (les coordonnées locales de φ).*
Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(p)$, il existe $\chi_1, \cdots, \chi_n \in \mathcal{C}^\infty(p)$ telles que :

$$f = f(p) + \sum_{i=1}^{n} x_i \chi_i.$$

Autrement dit : pour tout $q \in U$:

$$f(q) = f(p) + \sum_{i=1}^{n} x_i(q) \chi(q)_i.$$

La carte locale est centrée en p veut dire : $\varphi(p) = 0$.

On utilisera ce lemme pour caractériser les éléments de $\mathcal{D}(p)$. Soit (U, φ) une carte locale centrer en p, alors une dérivation $D_p \in \mathcal{D}(p)$ s'écrit :

$$\begin{aligned} D_p.f &= D_p.\left(f(p)\right) + \sum_{i=1}^{n} \left(\chi_i(p) D_p.x_i + x_i(p) D_p.\chi_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \chi_i(p) D_p.x_i. \end{aligned}$$

Ainsi : la donnée de la dérivation D_p est équivalente à la donnée des réels $D_p.x_i, \quad i = 1, \ldots, n.$

Lemme 5.4.2 *On a que :*

$$\dim \mathcal{D}(p) \;=\; n \;=\; \dim M. \tag{5.5}$$

Ce lemme montre que sur $\mathbb{R}^n$, toute dérivation est une dérivée directionnelle, car à tout v vecteur de $\mathbb{R}^n$ est associée une dérivation en x

$$g \mapsto \lim_{t \to 0} \frac{g(x+tv) - g(x)}{t},$$

qui est la dérivée directionnelle en x dans la direction de v. L'ensemble des dérivées directionnelles en x est ainsi un sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}(x)$ de dimension n, alors il est égal $\mathcal{D}(x)$.

Proposition 5.4.2 *Soient $g \in \mathcal{C}^\infty(p)$ et un vecteur tangent en p $X_p \in T_pM$, Alors la dérivée $\dfrac{d}{dt}(g \circ c)(0)$ est la même pour toutes les courbes $c(s)$ passant par p et appartenant à la même classe d'équivalence de X_p.*

La valeur de cette dérivée est notée : $X_p \cdot g$.

Prouve :
Soit (U, φ) une carte locale de p, alors on obtient :

$$\frac{d}{dt}(g \circ c)(0) = D(g \circ \varphi^{-1}) \circ \frac{d}{dt}(\varphi \circ c)(0).$$

or on a que $\frac{d}{dt}(\varphi \circ c)(0)$ ne dépend que de la classe de X_p, ce prouve la proposition. .□

Proposition 5.4.3 *L'application $g \mapsto X_p \cdot g$ est une dérivation.*

Prouve :
Dans la carte (U, φ) de p, et choisir un représentant $c(t)$ de la classe X_p alors on a :

$$X_p \cdot g = \frac{d}{dt}\Big((g \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ c)\Big)(0).$$

□

Remarque 5.4.4 *Cette dérivation est en fait une généralisation des dérivées directionnelles. En effet on a vu que dans $\mathbb{R}^n$ un vecteur tangent vx est associé canoniquement à une direction $v = \dot{c}(0)$. La dérivation $g \mapsto X_p \cdot g$ est alors clairement égale à la dérivée directionnelle.*
On appellera parfois l'application $g \mapsto X_p \cdot g$ dérivée directionnelle de g dans la direction X_p.

Théorème 5.4.1 *L'ensemble des vecteurs tangent T_pM s'identifie à l'espace vectoriel $\mathcal{D}(p)$ de dimension n des dérivations en p.*

Cette identification permet de définir une structure vectorielle sur l'espace tangent T_pM (appelé également, en conséquence, espace vectoriel tangent). Notons que cette structure vectorielle coïncide avec celle que l'on peut obtenir à partir de la lecture dans une carte.

Pour la suite nous identifions systématiquement T_pM et $\mathcal{D}(p)$.

5.4.3 Différentielle d'une application

Soient deux variétés différentielles M^n et N^k de dimensions respective n et k. Et $F : M \to N$ une application différentiable.

Définition 5.4.6 (Image réciproque) *Soit $g : N \to \mathbb{R}$ une fonction, avec F on peut correspondre une fonction sur M, pour tout $p \in M$:*

$$\begin{array}{rccl} F^* : & \mathcal{C}^\infty(F(p)) & \to & \mathcal{C}^\infty(p) \\ & g & \mapsto & F^*g := g \circ F \end{array}$$

L'application F^*g est dite ***l'image réciproque*** *de g par F.*

Définition 5.4.7 (La différentielle) *On appelle* ***la différentielle*** *de F en point $p \in M$ l'application* ***Linéaire*** *dF_p définie par :*

$$\begin{array}{rccl} dF_p : & TpM & \to & T_{F(p)}N \\ & X_p & \mapsto & dF_p(X_p) \end{array}$$

telle que :

$$dF_p(X_p) \cdot g := X_p \cdot (F^*g), \qquad \forall g \in \mathcal{C}^\infty(F(p)).$$

La définition de la différentielle ne fait appel qu'à des propriétés locales de la variété et de l'application. Comme localement une variété est difféomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^n$, toute les propriétés des applications différentiables dans les espaces vectoriels normés sont vraies localement pour les applications différentiables sur les variétés (c'est le principe de base pour obtenir des résultats locaux dans les variétés). Citons les plus importantes de ces propriétés.

Théorème 5.4.2 (Théorème de composition)
Soient $F : M \to N$ et $G : N \to W$ deux applications différentiables entre variétés. Soit $p \in M$ et $F(p) \in N$. Alors $G \circ F$ est différentiable en p et

$$d(G \circ F)_p = dG_{F(p)} \circ dF_p.$$

Corrolaire 5.4.1 *Si $F : M \to N$ est un difféomorphisme, alors, pour tout point $p \in M$, dF_p est un isomorphisme.*

La réciproque n'est vrais que localement.

5.4.4 Théorème des inversion locale (cas des variétés)

Le cas général de ce théorème est détaillé dans la Section 1.3, ici on va donné ce théorème dans le cas des variétés pour définir l'espace tangent sur la variété.

Définition 5.4.8 *Une application $F : M \to N$ entre variétés est un* ***difféomorphisme local*** *en un point p de M, s'il existe un voisinage $U \in \mathcal{V}(p)$ dans M et un voisinage $V \in \mathcal{V}(F(p))$ dans N tels que l'application $F|_U : U \to V$ est difféomorphisme.*

Théorème 5.4.3 (Théorème des inversions locales) *Soit $F : M \to N$ une application entre variétés différentielles différentiable en $p \in M$ telle que l'application différentielle :*

$$dF_p : T_pM \to T_{F(p)}N \quad \text{est un isomorphisme.}$$

Alors F est un difféomorphisme local en p. Et on a la différentielle de $F_{|U}$ est donné par :

$$d\left(F|_U^{-1}\right) = (dF_p)^{-1}.$$

Ce théorème a une conséquence importante pour la détermination de coordonnées locales. En effet, un système de coordonnées locales n'est rien d'autre qu'un difféomorphisme local de M dans $\mathbb{R}^n$. Ainsi une application différentiable $\varphi : M \to \mathbb{R}^n$ (de la carte locale) définit des coordonnées locales en p si et seulement si $d\varphi_p$ est un isomorphisme.

5.4.5 Coordonnées sur l'espace tangent

[0] Dans cette section on va construire des coordonnées (où-bien une base) sur notre espace tangent, en utilisant les différentielles des cartes locales à l'espace tangent dans ses points.

Pour mieux comprendre les choses on donne le cas de $\mathbb{R}^n$ après on passe au cas général.

a. Cas de l'espace $T_x\mathbb{R}^n$: On a la propriétés que $T_x\mathbb{R}^n$ est canoniquement isomorphe à $\mathbb{R}^n$ et on peut l'identifié à l'ensemble des dérivées partielles en x, c.a.d : Soit un point $x\mathbb{R}^n$, les dérivées partielles en x sont données les dérivations sur $\mathbb{R}^n$

$$\frac{\partial}{\partial x^i}|_x \ : \ g \mapsto \frac{\partial g}{\partial x^i}(x).$$

Dans l'ensemble des dérivées directionnelles en x ces dérivées partielles forment une base, et c'est aussi une base de l'espace tangent $T_x\mathbb{R}^n$. dite la base canonique ou la base naturelle. ainsi tout vecteur tangent $v_x \in T_x\mathbb{R}^n$ s'écrit

$$v_x = v^1 \left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_x + \cdots + v^1 \left.\frac{\partial}{\partial x^n}\right|_x.$$

Remarque 5.4.5 *Ce vecteur est aussi la classe d'équivalence des courbes $c(t)$ passant par x telles que*

$$\dot{c} = (v^1, \dots, v^n).$$

D'où on a l'identification canonique $T_x\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n$ qui est donné par

$$v_x \mapsto (v^1, \dots, v^n).$$

b. Cas de l'espace T_pM : Dans le cas des variétés différentielles abstraites, le tout est lié aux cartes locales et le faite que les applications de ces cartes sont des difféomorphismes dans le domaine de la carte.

Soient un point $p \in M$ et (U, φ) une carte de M tel que $p \in U$ (c.a.d U est domaine de p), on a que :

$$\varphi : U \to \varphi(U) \quad \text{est un difféomorphisme.}$$

d'ou

$$d\varphi_p : T_pM \to T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^n \text{ est inversible .}$$

Et que

$$(d\varphi_p)^{-1} = d\left(\varphi^{-1}\right)_{\varphi(p)} : T_{\varphi(p)} \to T_pM \text{ est un isomorphisme .}$$

D'autre part si on pose $x = \varphi(p) \in \mathbb{R}^n$, alors $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_x, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\Big|_x\right)$ est la base canonique de $T_x\mathbb{R}^n$. Et on calcule l'image de cette base par l'isomorphisme $(d\varphi_p)^{-1}$, qu'on note de la même notation :

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p = d\left(\varphi^{-1}\right)_{\varphi(p)}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_x\right), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Avec ces vecteurs tangents , on construit une base de T_pM dite la ***base naturelle*** associées aux coordonnées localees φ :

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\bigg|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\bigg|_p\right)$$

Remarque 5.4.6 *Si $g \in \mathcal{C}^\infty(p)$ on a pour tout $i = 1, \ldots, n$:*

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p \cdot g = d\left(\varphi^{-1}\right)_{\varphi(p)}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_x\right) \cdot g = \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_x \cdot \left(g \circ \varphi^{-1}\right) = \frac{\partial\left(g \circ \varphi^{-1}\right)}{\partial x^i}(x).$$

Proposition 5.4.4 *Dans la base naturelle associée aux coordonnées locales φ, $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\Big|_p\right)$, un vecteur tangent $X_p \in T_pM$ s'écrit*

$$X_p = X^1 \frac{\partial}{\partial x^1}\bigg|_p + \cdots + X^n \frac{\partial}{\partial x^n}\bigg|_p \qquad \textit{avec} \qquad X^i = X_p \cdot x^i.$$

Prouve. on a que

$$X_p \cdot x^i = \sum_{j=1}^{n} X^j \frac{\partial x^i}{\partial x^j},$$

or on a que

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & si \quad i \neq j \\ 0 & si \quad i = j \end{cases}$$

d'ou le résultat. □

5.5 Fibrés tangentes

Toute l'étude de l'espace tangent, dans la section présidente, se fait localement par rapport à une carte locale ou tour d'un point. Dans cette section on donne une notion où une définition d'un espace qui englobe tout les espaces tangents sur toute la variété.

Pour commencer on voit d'bord le cas d'un même point dans deux cartes différentes d'intersection non vide.

Soit p un point de M qui est dans deux cartes (U, φ) et (V, ψ) d'intersection non vide et de coordonnées locales respectives $x^1, \ldots, x^n$ et $y^1, \ldots, y^n$ et leurs bases tangentes de T_pM respective $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right)$ et $\left(\frac{\partial}{\partial y^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial y^n}\right)$.
Au moyen de l'application de changement de cartes Pour les points d'intersection $U \cap V$, on peut écrire Les coordonnées y^j en fonction des coordonnées x^i :

$$y^j(x^1, \ldots, x^n) = (\psi \circ \varphi^{-1})^j(x^1, \ldots, x^n).$$

un vecteur tangent $v \in T_pM$ s'écrit dans les deux bases par :

$$v \;=\; \sum_{i=1}^{n} v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \;=\; \sum_{j=1}^{n} \tilde{v}^j \frac{\partial}{\partial y^j}.$$

On calculant $v(y^k)$, on déduit :

$$\tilde{v}^j = \sum_{i=1}^{n} v^i \frac{\partial(\psi \circ \varphi^{-1})^k}{\partial x^i} \tag{5.6}$$

et que

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial(\psi \circ \varphi^{-1})^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^j}. \tag{5.7}$$

Définition 5.5.1 (Fibré tangent) *Le fibré tangent d'une variété M^n est la structure différentielle de dimension $2n$ sur l'ensemble TM définit par :*

$$TM = \{(p, X_p),\ p \in M,\ X_p \in T_pM\}.$$

Le fibré tangent est l'union des espace tangents

$$TM = \bigcup_{p \in M} \{p\} \times T_pM \quad \text{où encore} \quad TM = \bigcup_{p \in M} T_pM$$

Remarque 5.5.1 *L'union dans la définition du fibré tangent, est une union disjointe, c.a.d : on ne peut pas additionner des éléments $X_p \in T_pM$ et $Y_q \in T_qM$ si $T_pM \neq T_qM$.*

Définition 5.5.2 (Projection canonique) *On appelle projection canonique sur TM l'application (projection)*

$$\begin{array}{rccc} \pi : & TM & \to & M \\ & (p, X_p) & \mapsto & p \end{array}$$

Théorème 5.5.1 *Le fibré tangente a une structure de variété différentielle de dimension $2n$.*

Remarque 5.5.2 *La projection canonique π est une application différentiable, et aussi c'est une submersion surjective.*

Définition 5.5.3 (L'application différentielle) *Soient M, N deux variétés différentielle et $F : M \to N$ une application différentiable.*
***L'application différentielle** de F, notée dF est définie par :*

$$\begin{array}{rccc} dF : & TM & \to & TN \\ & (p, X_p) & \mapsto & (F(p), dF_p(X_p)) \end{array}$$

Proposition 5.5.1 *Soient M, N deux variétés différentielle et $F : M \to N$ une application différentiable, et dF l'application différentielle de F, on a :*
Si F est difféomorphisme alors dF l'ai aussi et $(dF)^{-1} = d(F^{-1})$.

5.6 Exercices

Exercice 01 :
Les applications suivantes $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ sont-elles des immersions ? Sont-elles injectives ? Si oui, leur image est-elle plongée ?

1. $f(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$.
2. $f(u, v) = (u, v, uv)$.
3. $f(u, v) = (u \cos v, v \sin u, \lambda v)$.
4. $f(u, v) = ((2 + \cos v) \cos u, (2 + \cos v) \sin u, \sin v)$.

Définition : On dit que $F : M \to N$ est un **plongement** si F est une immersion injective et un homéomorphisme de M dans $F(M)$ pour la topologie induite.

Exercice 02 :
Les applications suivantes $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ sont-elles des submersions ? Peut-on les restreindre à un voisinage de $f^{-1}(0)$ de telle sorte que la restriction soit une submersion ?

1. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - a^2$.
2. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$.
3. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$.

Exercice 03 :
Pour $t \in]-\infty, 1[$, on pose $f(t) = (t^2, t - t^3)$.
L'application $f :]-\infty, 1[\to \mathbb{R}^2$ est-elle une immersion ? Est elle injective ?. dessiner son image dans le plan.

Exercice 04 :
Montrer que l'ensemble

$$\{(u^2, v^2, w^2, \sqrt{2}\, uv, \sqrt{2}\, vw, \sqrt{2}\, uw) \in \mathbb{R}^6;\ (u, v, w) \in \mathbb{R}^3,\ u^2 + v^2 + w^2 = 1\}$$

est une sous-variété de $\mathbb{R}^6$. Et qu'elle est incluse dans la sphère unitaire.

Exercice 05 :
Soit S la nappe paramétrée définie par

$$x(u,v) = u+v, \quad y(u,v) = uv, \quad z(u,v) = u^2+v^2. \qquad (u,v) \in \mathbb{R}^2$$

1. Verifier que S et incluse dans la surface d'équation $x^2 - 2y - z = 0$. les deux surfaces coïncident-elles ?.
2. Quelle sont les intersection de S avec les plan $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$.
3. Dessiner S.
4. En quels points ce plan passe par l'origine ? .

Exercice 06 :
Soit l'application j définie par :

$$\begin{array}{rccc} J: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (t,\theta) & \longmapsto & (t\cos\theta, t\sin\theta, \theta) \end{array}$$

1. Montrer que j est un plongement. on note V son image
Soit π la projection définie par :

$$\begin{array}{rccc} \pi: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & (x,y) \end{array}$$

2. Donner la restriction de π à V, qu'on note $\pi_{|V}$.
3. $\pi_{|V}$ est elle une submersion ?, est elle une immersion ?.

Exercice 07 :
Soit l'application f définie par :

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & (2xz, 2yz, 1-2z^2) \end{array}$$

On note $f_{|\mathbb{S}^2}$ la restriction de f à la sphère unitaire de dimension 2.
1. Montrer que l'image de $f_{|\mathbb{S}^2}$ est dans $\mathbb{S}^2$.
2. Montrer que $f_{|\mathbb{S}^2}$ est surjective de $\mathbb{S}^2$ dans $\mathbb{S}^2$.

Exercice 08 :
Soit une application f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$, montrer que :

1. Peut-on avoir f comme immersion et submersion simultanément ?
2. pour $n = p$, et f est une submersion, est-ce que c'est une immersion dans ce cas ?
3. Si f est injective est-elle toujours une immersion ?
4. Si pour tous $a \in \mathbb{R}^n$, df_a est de rang maximal, est ce que f est une immersion ? est elle injective ?

Exercice 09 :
Dans l'espace $\mathbb{R}^n$, on considère le sous-ensemble E qui est ouvert dans $\mathbb{R}^p$ avec $0 < p < n$.
E est-il une sous-variété de $\mathbb{R}^n$?. Si oui, de quelle dimension ?.

Exercice 10 :
Soit le cercle unitaire $\mathbb{S}^1$ de $\mathbb{R}^2$. Et on considère les deux sous ensembles U et V définis par :

$$U_1 = \{(\cos\alpha, \sin\alpha),\ \alpha \in I_1 =]0, \pi[\ \}, \qquad U_2 = \{(\cos\alpha, \sin\alpha),\ \alpha \in I_2 =]-\pi, 0[\ \}$$
$$U_3 = \left\{(\cos\alpha, \sin\alpha),\ \alpha \in I_3 =]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}[\ \right\}, \quad U_4 = \left\{(\cos\alpha, \sin\alpha),\ \alpha \in I_4 =]\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{3}{2}\pi[\ \right\}.$$

1. Dessiner les ensembles U_1, U_2, U_3 et U_4.
2. Montrer que U_1, U_2, U_3 et U_4 sont des ouverts de $\mathbb{S}^1$, sont ils des ouverts de $\mathbb{R}^2$?.
3. Trouver deux applications φ_i $(1 \leq i \leq 4)$ pour que $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{1\leq i\leq 4}$ soit un atlas k-différentiable de $\mathbb{S}^1$, k à déterminé. *Rappel* : $\varphi_i : U_i \to \mathbb{R}$.
4. Peut-on dire que $(\mathbb{S}^1, \mathcal{A})$ est une variété lisse ?.

Annexe A

Rappels Algébriques et Topologiques

A.1 Rappels d'algèbre des structures

A.1.1 Lois de composition

Définition A.1.1 ***Loi de composition interne :*** *On appelle loi de composition interne sur un ensemble non vide G toute application ϕ sur $G \times G$ et à valeurs dans G.*
Si ϕ est une loi de composition de composition interne sur G, on notera souvent : $*$, $\star$, $\bullet$, $\perp$, ...etc.

$$\forall (a,b) \in G \ , \ a \star b = \phi(a,b).$$

On notera $(G, \star)$ l'ensemble non vide G muni de la loi de composition interne $\star$.

Example A.1.1 *L'addition et la multiplication usuelles sont des lois de composition interne sur $\mathbb{N}$; $\mathbb{Z}$; $\mathbb{Q}$; $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.*

Définition A.1.2 *Soit G un ensemble non vide, on appel* ***l'ensemble de toutes les parties*** *de G, l'ensemble de tous les sous-ensembles de G, noté $\mathcal{P}(G)$*

$$\mathcal{P}(G) := \{A; A \subset G\}.$$

Définition A.1.3 *Soit G un ensemble non vide muni de la loi de composition interne $\star$, on dit que :*

1. *La loi $\star$ est* ***associative*** *si :*

$$\forall a, b, c \in G \ , \ (a \star b) \star c = a \star (b \star c).$$

2. *La loi $\star$ est* ***commutative*** *si :*

$$\forall a, b \in G \ , \ a \star b = b \star a.$$

3. *G admet un* ***élément neutre*** *"e" pour la loi $\star$ si :*

$$\forall a \in G \ , \ a \star e = e \star a = a.$$

4. *Si G admet un élément neutre e, on dit qu'un élément a de G admet un* ***symétrie*** *(ou un* ***symétrique*** *ou a est* ***inversible*** *) si :*

$$\exists\, a' \in G\ ,\ a \star a' = a' \star a = e.$$

5. *Un élément $a \in G$ est dit* ***régulier*** *ou* ***simplifiable*** *si :*

$$\forall b, c \in G, \begin{cases} a \star b = a \star c \implies b = c, \\ b \star a = c \star a \implies b = c. \end{cases}$$

Théorème A.1.1 *Soit $(G, \star)$ un ensemble non vide muni d'une loi de composition interne. Si G admet un élément neutre*

1. *Alors cet élément neutre est unique.*
2. *Si un élément $a \in G$ admet un inverse, alors cet inverse est unique.*

Définition A.1.4 (Loi de composition externe) *Soit E et X deux ensembles. On appelle* ***loi de composition externe*** *sur E toute application $\bullet$ de $X \times E$ dans E :*

$$\begin{aligned} \bullet :\ X \times E &\longrightarrow E \\ (a, x) &\longmapsto a \bullet x. \end{aligned}$$

Dans ce cadre général, les éléments de X sont appelés ***opérateurs*** *et on dit que "E est muni d'une loi de composition externe à opérateurs dans X".*

Définition A.1.5 (Partie stable.) *Soit E un ensemble muni d'une loi de composition externe $\bullet$ à opérateurs dans X. Soit F une partie de E,*

On dit que F est ***stable*** *par la loi $\bullet$ si :*

$$\forall \alpha \in X,\ \forall x \in F,\ \alpha \bullet x \in F.$$

Si F une partie stable par la loi $\bullet$, alors la restriction de $\bullet$ à F est une loi de composition externe sur F, on l'appelle ***loi induite*** *par $\bullet$ dans F*

Définition A.1.6 (Distributivité.) *Soit E un ensemble muni :*
- D'une loi de composition interne $*$;
- D'une loi de composition externe $\bullet$ à opérateurs dans X.
- On dit que la loi $\bullet$ est ***distributive à gauche*** *par rapport à la loi $*$ si :*

$$\forall \alpha \in X,\ \forall x, y \in E,\ \alpha \bullet (x * y) = (\alpha \bullet x) * (\alpha \bullet y).$$

- On dit que la loi $\bullet$ est ***distributive à droite*** *par rapport à la loi $*$ si :*

$$\forall \alpha \in X,\ \forall x, y \in E,\ (x * y) \bullet \alpha = (x \bullet \alpha) * (y \bullet \alpha).$$

- On dit que la loi $\bullet$ est ***distributive*** *par rapport à la loi $*$ si elle est distributive à gauche et à droite.*

A.1.2 Structure de groupe

Définition A.1.7 *On appelle* ***groupe*** *tout ensemble non-vide G muni d'une loi de composition interne $\star$, ou G admet une* ***structure de groupe****, s'il vérifiant les 3 propriétés suivantes (appelées* ***axiomes*** *de la structure de groupe) :*

1. *La loi $\star$ est associative dans G.*
2. *G admet un élément neutre pour la loi $\star$.*
3. *Tout élément de G admet un inverse dans G pour la loi $\star$.*

On note $(G, \star)$ pour le groupe.

Définition A.1.8 *Soit $(G, \star)$ un groupe, on dit que c'est un* ***groupe commutatif****, ou un* ***groupe abélien****, si tout les éléments de G commute pour la loi $\star$. c.a.d*

$$\forall a, b \in G,\ a \star b = b \star a.$$

Remarque A.1.1 *(**Remarques et conventions des notations**).*
Afin d'éviter la lourdeur de la notation, on convient généralement de noter la loi de composition interne d'un groupe quelconque G,
soit comme une ***multiplication*** *par un point ".",*
soit comme une ***addition*** *par un $+$.*
Dans le premier cas, le symétrique d'un élément est appelé son inverse noté a^{-1} .
Dans le second cas, son opposé noté $-a$.
Usuellement, on réserve la notation additive au cas des groupes abéliens.
C'est pourquoi, dans toute la suite de ce polycopié, on adoptera pour les groupes quelconques, conformément à l'usage courant, la notation multiplicative.

Théorème A.1.2 *Soit $(G, \star)$ un groupe alors on a :*

1. *Tout élément de G est simplifiable.*
2. *Pour tout $a \in G$: $(a^{-1})^{-1} = a$, avec a^{-1} est le symétrie de a.*
3. *Pour tous éléments $a,\ b \in G$: $(a \star b)^{-1} = b^{-1} \star a^{-1}$.*
4. *Plus général : $\forall a_1, a_2, ...a_n \in G$: $(a_1 \star a_2 \star ... \star a_n)^{-1} = a_n^{-1} \star a_{n-1}^{-1} \star ... \star a_1^{-1}$.*

A.1.3 Sous-groupes

Définition A.1.9 *Soit $(G, \star)$ un groupe. Un* ***sous-groupe*** *de G est un sous-ensemble $H \subset G$ tel que :*

- *H est non vide.*
- *pour tous $a, b \in H$: $a \star b^{-1} \in H$.*

Théorème A.1.3 *Soit $(G, \star)$ un groupe, H un sous-groupe de G si et seulement si :*

- *H contient l'élément neutre e de G.*
- *H est stable pour la loi $\star$, c'est à dire que*

$$\forall a, b \in G :\ a \star b \in H.$$

- *H est stable par le passage à l'inverse, c'est à dire que :*

$$\forall a \in H: \ a^{-1} \in H.$$

Proposition A.1.1 *Soit $(G, \star)$ un groupe,*

- *Tout sous-groupe H de G à une structure de groupe par la loi Star.*
- *Tout sous-groupe K du sous-groupe H est un sous-groupe de G.*

Théorème A.1.4 *Soit $(G, \star)$ un groupe, Soit $(H_i)_{i\in I}$ une famille de sous-groupes de G*

- *L'intersection $H = \cap_{i\in I} H_i$ est sous-groupe de G.*
- *la réunion $H = \cup_{i\in I} H_i$ n'est pas nécessairement un sous-groupe de G.*

Définition A.1.10 *Soit X un sous-ensemble d'un groupe $(G, \star)$,*
le ***sous-groupe engendré*** *par X est l'intersection de tous sous-groupes de G qui contiennent X.*

On note $\langle X\rangle$ le sous groupe de G engendré par X, et c'est le plus petit des sous-groupes contiennent X.

Théorème A.1.5 *Soient $(G, \star)$ un groupe et X, Y deux parties de G,*

1. *On a $X \subset \langle X\rangle$,*
2. *$X = \langle X\rangle$ si et seulement si X est un sous-groupe de G.*
3. *Si $X \subset Y$, alors $\langle X\rangle \subset \langle Y\rangle$.*

Définition A.1.11 *Soit $(G, \star)$ un groupe, on dit que G est* ***monogène*** *s'il existe $x \in G$ tel que $G = \langle x\rangle$.*
Si de plus G est fini, on dit alors qu'il est ***cyclique****.*

A.1.4 Morphismes de groupes

On désigne par $(G, \star)$ et $(H, \circ)$ deux groupes et on note respectivement e et e' les éléments neutres de G et H.

Définition A.1.12 *Soit φ une application de G dans H, On dit que φ est un* ***morphisme de groupe*** *de G dans H si :*

$$\forall a, b \in G, \ \varphi(a \star b) = \varphi(a) \circ \varphi(b).$$

- *On dit que φ in un* ***isomorphisme*** *si φ in bijective. On note $G \backsimeq H$.*
- *On dit que φ in un* ***endomorphisme*** *si $G = H$.*
- *On dit que φ in un* ***automorphisme*** *si φ in bijective et $G = H$.*

Théorème A.1.6 *Soit φ un morphisme de G dans H alors :*

- $\varphi(e) = e'$.
- $\varphi(a^{-1}) = \varphi(a)^{-1}$.

Théorème A.1.7 *Soient G, H, K trois groupes, et les morphismes :*

$$\varphi : G \to H, \qquad \psi : H \to K$$

alors $\psi \circ \varphi : G \to K$ est aussi un morphisme de groupe.

Définition A.1.13 *soit φ un morphisme de groupe de G dans H.*

1. ***Le noyau** de φ est l'ensemble :*

$$\ker(\varphi) = \{x \in G,\ \varphi(x) = e'\}.$$

2. ***L'image** de φ est l'ensemble :*

$$Im(\varphi) = \{\varphi(x),\ x \in G\}.$$

Théorème A.1.8 *Soit φ un morphisme de groupe de G dans H, alors :*

1. $\ker(\varphi)$ *est un sous-groupe de G.*
2. *φ est injective si et seulement si,* $\ker(\varphi) = \{e\}$.
3. *$Im(\varphi)$ est un sous-groupe de H.*
4. *φ est surjective si et seulement si, $Im(\varphi) = H$.*
5. *Pour tout sous-groupe G' de G, $\varphi(G')$ est un sous groupe de H.*
6. *Pour tout sous-groupe H' de H, $\varphi^{-1}(H')$ est un sous groupe de G*

A.1.5 Structure d'anneau

Définition A.1.14 *On appelle **anneau**, tout ensemble A muni de deux lois de composition internes $\star$ et $\bullet$, noté $(A, \star, \bullet)$ telle que :*

1. *$(A, \star)$ est un groupe abélien (on note 0_A l'élément neutre pour cette loi),*
2. *la loi $\bullet$ est associative,*
3. *la loi $\bullet$ est distributive par rapport à $\star$, c.a.d :*
   - $\forall x, y, z \in A :\ x \bullet (y \star z) = (x \bullet y) \star (x \bullet z)$,
   - $\forall x, y, z \in A :\ (y \star z) \bullet x = (y \bullet x) \star (z \bullet x)$.

*Si de plus A est commutative pour la loi $\bullet$, on dit que $(A, \star, \bullet)$ est un **anneau commutatif** ou **abélien**.*

*Si A admet un élément neutre pour la loi $\bullet$, on dit que $(A, \star, \bullet)$ est un **anneau unitaire** ou **unifère**, on note 1_A l'élément neutre pour cette loi.*

Remarque A.1.2 .

- *Si il n'y a pas de confusion, on utilise souvent les signes $+$ et . les deux lois de l'anneau.*
- *Et on note 0 pour l'élément neutre de la loi $+$ et 1 pour l'autre.*

- *On note $-x$ pour l'inverse de x pour la loi $+$ et x^{-1} pour l'autre.*
- *On note $A^\star = A/\{0\}$.*
- *Pour tout $x \in A^\star$ et $n \in \mathbb{N}$, on note*

$$n.x = nx = \underbrace{x + x + \cdots + x}_{n\ fois} \qquad et \qquad x^n = \underbrace{x.x.\cdots.x}_{n\ fois}$$

Proposition A.1.2 *Soit $(A, +, \bullet)$ un anneau, pour tous $x, y, z \in A$, on a les règles suivantes :*

1. $0_A \bullet x = x \bullet 0_A = 0_A$.
2. $x \bullet (-y) = (-x) \bullet y = -(x \bullet y)$.
3. $x \bullet (y - z) = (x \bullet y) - (x \bullet z)$.
4. $(y - z) \bullet x = (y \bullet x) - (z \bullet x)$.

A.1.6 Corps

Définition A.1.15 *On dit qu'anneau $(\mathbb{K}, +, \bullet)$ est un **corps** si tout élément non nul de $\mathbb{K}$ est inversible.*

*Si de plus $\bullet$ est commutatif on dit que $\mathbb{K}$ est un **corps commutatif**.*

Proposition A.1.3 *Tout corps est un anneau intègre.*

Définition A.1.16 *On appelle **sous-corps** d'un corps $(\mathbb{K}, +, \bullet)$, tout sous-ensemble $\boldsymbol{K}$ de $\mathbb{K}$ tel que $\boldsymbol{K}$ muni de la restrictions des deux lois $+$ et $\bullet$ est lui même un corps.*

A.2 Rappels d'algèbre linéaire

Dans cette section $\mathbb{K}$ est corps commutatif, en général c'est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et E un ensemble non vide.

A.2.1 Espaces vectoriels

Définition A.2.1 *On muni E d'une loi interne noté " $+$ " et d'une loi externe sur $\mathbb{K}$ noté ".",*

*on dit que E est un **espace vectoriel sur** $\mathbb{K}$, ou encore un $\mathbb{K}$**-espace vectoriel** si : Pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $u, v \in E$*

1. $(E,\ +)$ *est un groupe commutatif.*
2. $1.u = u$.
3. $(\lambda + \mu).u = \lambda.u + \mu u$. *(Distributivité par rapport à l'addition des scalaires)*
4. $\lambda.(u + v) = \lambda.u + \lambda.v$. *(Distributivité par rapport à l'addition des vecteurs)*
5. $\lambda(\mu.u) = (\lambda\mu).u$.

On note le $\mathbb{K}$-espace vectoriel : $(E,\ +\ ,\ .\ )$. Ou un $\mathbb{K}$-ev.
*On appel les éléments de E des **vecteurs** et les éléments de $\mathbb{K}$ des **scalaires**.*

Proposition A.2.1 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et soient $u \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a :*

1. $0.u = 0_E$.
2. $\lambda.0_E = 0_E$.
3. $(-1).u = -u$.
4. $\lambda.u = 0_E \iff \lambda = 0$ *ou* $u = 0_E$.

Définition A.2.2 (Sous espace vectoriel) *Soient $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et A un sous ensemble de E.*
A est un ***sous espace vectoriel*** *de E si*

- $0_E \in A$.
- $u + v \in A, \quad \forall u, v \in A$.
- $\lambda.u \in A, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall u \in A$.

Proposition A.2.2 *Soit A un sous ensemble de E alors*

- *A est un sous-ev de $E \iff \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \ \forall u, v \in A : \ \lambda.u + \mu.v \in A$.*
- *A est sous-e.v de E alors $(A, +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*

Proposition A.2.3 *Soient A et B des sous espaces vectoriels de E alors :*

1. *$A \cap B$ est un sous espace vectoriel.*
2. *Toute intersection fini de sous espaces vectoriels est un sous espace vectoriel.*
3. *La somme $A + B$ définit par $A + B = \{u + v \ / \ u \in A, \ v \in B\}$, est un sous espace vectoriel.*
4. *$A + B$ est le plus petit sous-espace vectoriel contenant à la fois A et B.*

Définition A.2.3 *Soient A et B des sous-espaces vectoriels de E, On dit que A et B sont en* ***somme directe*** *dans E si :*

- $E = A + B$.
- $A \cap B = \{0_E\}$.

On note alors $E = A \oplus B$.
On dit aussi que A et B sont des ***sous-espaces vectoriels supplémentaires*** *dans E.*

Proposition A.2.4 *Soient A et B des sous-espaces vectoriels de E, alors*

$$A \oplus B = E \quad \iff \quad \forall x \in E, \ \exists! \ a \in A, \ \exists! \ b \in B : \ x = a + b.$$

Définition A.2.4 *Soient $u_1, ..., u_n$ des vecteur de E, on appel* ***combinaison linéaire*** *de ces vecteurs par les* ***coefficients*** *$\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$, le vecteur*

$$u = \lambda_1 u_1 + ... + \lambda_n u_n.$$

Définition A.2.5 *Soit $B = \{u_1, ..., u_n\}$ une famille d'éléments de E*

1. *B est dite **famille génératrice** de E si tout élément de E est une combinaison des éléments de B, c.a.d.*
$$\forall u \in E, \exists \lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{K} \ : \ u = \lambda_1 u_1 + ... + \lambda_n u_n.$$
2. *B est dite une famille **libre** ou **linéairement indépendante** si*
$$\lambda_1 u_1 + ... + \lambda_n u_n = 0 \ \Rightarrow \ \lambda_1 = ... = \lambda_n = 0.$$
3. *La famille B est dite une **base** de E si B est simultanément libre et génératrice.*
4. *Si B est une base de E et de cardinale fini, on appel **dimension** de E le nombre d'élément de B, noté*
$$Dim\, E := Card\, B.$$
5. *Une famille d'éléments de E qui n'est pas libre est dite **liée** ou **linéairement dépendante**.*

Théorème A.2.1 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, alors*

1. *une famille A d'éléments de E est liée si est seulement si au moins un des vecteurs de A est combinaison linéaire des autres vecteurs de A.*
2. *Si E admet une base de dimension fini, alors toutes les bases de E ont le même nombre d'éléments. c.a.d.*

   La dimension d'un espace vectoriel est une constante*.*
3. *Si B est une basse de E alors pour tous u élément de E, u s'écrit d'une magnanière unique comme combinaison d'éléments de B.*
4. *Si E admet une famille finie de générateurs A alors il admet toujours une base finie $B \subset A$.*

Théorème A.2.2 (& définition : Sous-espace engendré) *Soit $\{u_1, ..., u_n\}$ un ensemble fini de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Alors :*

- *L'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $\{u_1, ..., u_n\}$ est un sous-espace vectoriel de E.*
- *C'est le plus petit sous-espace vectoriel de E (au sens de l'inclusion) contenant les vecteurs $u_1, ..., u_n$.*

*Ce sous-espace vectoriel est appelé **sous-espace engendré** par $u_1, ..., u_n$ et est noté $Vect(u_1, ..., u_n)$, et on a aussi :*
$$u \in Vect(u_1, ..., u_n) \iff \exists \lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{K} \text{ tels que } u = \lambda_1 u_1 + ... + \lambda_n u_n.$$

Théorème A.2.3 *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension fini, et A un sous-espace vectoriel de E, alors on a*

1. *$Dim\, A \leq Dim\, E$.*
2. *$Dim\, A = Dim\, E \iff A = E$.*
3. *Si $A = \{0\}$ alors $Dim\, A = 0$.*

Théorème A.2.4 *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension fini, A, B et D des sous espace vectoriel de E, alors*
$$Dim\,(A + B) = Dim\, A + Dim\, B - Dim\,(A \cap B).$$
Si $D = A \oplus B$ alors :
$$Dim\, D = Dim\, A + Dim\, B.$$

A.2.2 Applications linéaires

Pour cette section, E et F sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

Définition A.2.6 *Une application de E dans F est dite une* ***application linéaire*** *si pour tous $u, v \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$*

1. $f(u+v) = f(u) + f(v)$.
2. $f(\lambda u) = \lambda f(u)$.

- L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathcal{L}(E,F)$.
*- L'**application nulle**, notée $0_{\mathcal{L}(E,F)} : E \to F, \quad u \mapsto 0_{\mathcal{L}(E,F)}(u) = 0$.*
*- L'**application identité**, notée $Id_E : E \to E, \quad u \mapsto Id_E(u) = u$.*

Proposition A.2.5

$$f \in \mathcal{L}(E,F) \iff \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K},\ \forall u, v \in E :\ f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v)$$

Proposition A.2.6 *Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$, alors*

- $f(0_E) = 0_F$.
- $f(-u) = -f(u), \quad \forall u \in E$.

Définition A.2.7 *Soient $f \in \mathcal{L}(E,F)$, et A un sous ensemble de E, on appelle* ***image directe*** *de A le sous ensemble de F définit par :*

$$f(A) := \{f(u),\ u \in A\}.$$

*$f(E)$ s'appelle l'**image** de l'application linéaire f et est noté $Im\, f$.*

Définition A.2.8 *Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$, on appel* ***noyau*** *de f l'ensemble noté*

$$Ker\, f := \{u \in E,\ f(u) = 0_F\}.$$

Proposition A.2.7 *Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$, et A un sous ensemble de E*

- *Si A est un sous espace vectoriel de E, alors $f(A)$ est sous espace vectoriel de F.*
- *$Im\, f$ est sous espace vectoriel de F.*
- *$Ker\, f$ est un sous espace vectoriel de E.*
- *f est injective $\iff Ker\, f = \{0_E\} \iff Dim\, Ker\, f = 0$.*
- *f est surjective $\iff Im\, f = F \iff Dim\, Im\, f = Dim\, F$.*
- *$Dim\, E = Dim\, Ker\, f + Dim\, Im\, f$.*

Proposition A.2.8 *L'ensemble $\mathcal{L}(E,F)$ muni de :*

- *la loi interne "$+$" somme des fonctions définit par $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$,*
- *la loi externe "." multiplication par un scalaire définit par $(\lambda.f)(x) := \lambda.f(x)$,*

est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

A.2.3 Matrices

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne un corps. On peut penser à $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition A.2.9 *Une **matrice** A est un tableau rectangulaire d'éléments de $\mathbb{K}$.*
*– Elle est dite de **taille** $n \times p$ si le tableau possède n lignes et p colonnes.*
*– Les nombres du tableau sont appelés les **coefficients** de A.*
– Le coefficient situé à la i-ème ligne et à la j-ème colonne est noté a_{ij}.
*– Deux matrices sont **égales** lorsqu'elles ont la même taille et que les coefficients correspondants sont égaux.*
*– **L'ensemble des matrices** à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $M_{np}(\mathbb{K})$.*

La matrice A est représenté sous la forme suivante :

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \quad ou \quad A := (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}$$

Définition A.2.10 (Matrices particuliers) *Soit A une matrice $n \times p$,*

1. *A est une matrice **carrée** si $n = p$, c.a.d : $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$.*
   *Dans ce cas $\{a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}\}$ sont dite la **diagonale** de A.*
2. *Une matrice qui n'a qu'une seule ligne ($n = 1$) est appelée **matrice ligne** ou **vecteur ligne**. On la note $A = (a_{11}, ..., a_{1p})$.*
3. *une matrice qui n'a qu'une seule colonne ($p = 1$) est appelée **matrice colonne** ou **vecteur colonne**. On la note $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq n} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$.*
4. *La matrice dont tous les coefficients sont des zéros est appelée la **matrice nulle**. Notée 0_{np} ou 0.*
5. ***La matrice identité** est une matrice carrée dont tous les coefficients sont des zéros sauf des 1 dans la diagonale, ou que*
   $$a_{ij} = \delta_{ij},\ avec\ \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & Si\ i = j, \\ 0 & Si\ 1 \neq j. \end{cases} \qquad notée : Id_n := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
6. ***La matrice triangulaire supérieur** est matrice carrée dont tous les coefficients en-dessous de la diagonale sont des zéros,*

ou encore que $a_{ij} = 0$ *pour tout* $i > j$.

Notée : $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$

7. ***La matrice triangulaire inférieur*** *est matrice carrée dont tous les coefficients en-dessus de la diagonale sont des zéros,*
   ou encore que $a_{ij} = 0$ *pour tout* $i < j$.

Définition A.2.11 (Somme de matrices)

1. ***La somme de deux matrices*** A *et* B *ayant la même taille* $n \times p$ *est une matrice de même taille. Leur somme* $C = A + B$ *définie par*

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n, \\ 1 \le j \le p}}, \ B = (b_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}} \text{ alors } C = (c_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}} \text{ avec } c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

2. ***Le produit d'une matrice par un scalaire*** :$\lambda \in \mathbb{K}$ *et* $A \in M_{np}(\mathbb{K})$ *est une matrice de même taille, définit par :* $\lambda A := (\lambda a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}$.
3. ***La Matrice opposée*** *de* A *est la matrice notée* $-A := (-1)A$.
4. ***La différence*** *de matrices* A *et* B *est* $A - B := A + (-1)B$.

Proposition A.2.9 $(M_{np}(\mathbb{K}), \ + \ , \ . \ )$ *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension n.p.*

Définition A.2.12 (Produit de matrices) *Soient deux matrices* $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}} \in M_{np}(\mathbb{K})$ *et* $B = (b_{jk})_{\substack{1 \le j \le p \\ 1 \le k \le q}} \in M_{pq}(\mathbb{K})$, ***le produit*** *de* A *et* B *noté* $A.B$ *ou* AB, *est la matrice* $C = (c_{ik})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le k \le q}} \in M_{nq}(\mathbb{K})$ *définit par :*

$$c_{ik} = \sum_{m=1}^{p} a_{im}.b_{mk} = a_{i1}.b_{1k} + a_{i2}.b_{2k} + ... + a_{ip}.b_{pk}.$$

Remarque A.2.1

1. *Le produit* AB *de deux matrices* A *et* B *est défini si et seulement si le nombre de colonnes de* A *est égal au nombre de lignes de* B.
2. *Le produit de matrices n'est pas commutatif en général* $AB \neq BA$.
3. $AB = 0 \ \not\Rightarrow \ A = 0$ *ou* $B = 0$.
   On peut avoir $A \neq 0$ *et* $B \neq 0$ *mais* $AB = 0$.
4. $AB = AC \ \not\Rightarrow \ B = C$.

Proposition A.2.10 *Soient* A, B *et* C *trois matrices* <u>*convenables*</u> *alors :*

1. $A(B.C) = (A.B)C = ABC$.
2. $A(B + C) = AB + AC$ *et* $(A + B)C = AC + BC$.
3. $A.0_M = 0_M$ *et* $0_M.A = 0_M$.

4. *Si $A \in M_{np}(\mathbb{K})$ alors $A.Id_p = A$ et $Id_n.A = A$.*

Définition A.2.13 (Matrice inverse) *Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, On dit que A est* ***inversible*** *ou elle admet une* ***matrice inverse****, s'il existe une matrice $B \in M_n(\mathbb{K})$ telle que :*

$$AB = BA = Id_n$$

On note la matrice inverse de A : A^{-1}.
et on note $GL_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices inversibles.

Proposition A.2.11

1. *La matrice inverse n'existe que pour les matrice carrée.*
2. *La matrice inverse si elle existe, elle est unique.*
3. *$\forall A \in GL_n(\mathbb{K}) : \ (A^{-1})^{-1} = A$.*
4. *$\forall A, B \in GL_n(\mathbb{K}) : \ (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.*
5. *$\forall A, B \in M_n(\mathbb{K}), \ \forall C \in GL_n(\mathbb{K}) : \ AC = BC \Rightarrow A = B$.*
6. *$Id_n^{-1} = Id_n$.*

Méthode de Gauss pour inverser les matrices

La méthode pour inverser une matrice $A \in GL_n(\mathbb{K})$ consiste à faire des opérations élémentaires sur les lignes de la matrice A jusqu'à la transformer en la matrice identité Id_n.
On fait simultanément les mêmes opérations élémentaires en partant de la matrice Id_n, on aboutit alors à une matrice qui est $B = A^{-1}$.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{array}\right)$$

Les **opérations élémentaires** sur les lignes sont :

- $L_i \longleftarrow \lambda L_i$ avec $\lambda \in \mathbb{K}^*$
- $L_i \longleftarrow L_i + \lambda L_j$
- $L_i \longleftrightarrow L_j$

A.2.3.1 Système linéaire et matrice

Proposition A.2.12 *Tous système linéaire S de n-équations et p-variables est une equation matriciel sous la forme $AX = B$.*
avec $A \in M_{np}(\mathbb{K})$.

$$S = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}$$

Théorème A.2.5 *Un système d'équations linéaires n'a soit aucune solution, soit une seule solution, soit une infinité de solutions.*

Proposition A.2.13 *Si la matrice A est inversible, alors le système $AX = B$ admet une unique Solution et c'est :*

$$X = A^{-1}B$$

A.3 Rappels de topologie

Soit E un ensemble quelconque.

Définition A.3.1
On appelle ***partie*** *de E un sous-ensemble de E.*
l'ensemble de toutes les parties de E est dite ***l'ensemble des parties*** *de E est noté $\mathcal{P}(E)$.*

Définition A.3.2 (Topologie, Ouvert) *Une* ***topologie*** *sur un ensemble E est une partie $\mathcal{T}$ de $\mathcal{P}(E)$ qui vérifie les propriétés suivantes :*

- $\varnothing \in \mathcal{T}, \quad E \in \mathcal{T}.$
- *L'intersection de deux éléments de $\mathcal{T}$ est un élément de $\mathcal{T}$, c.a.d*

$$\forall A, B \in \mathcal{T},\ A \cap B \in \mathcal{T}.$$

- *La réunion (finie ou infinie) d'une famille d'éléments de $\mathcal{T}$ est un élément de $\mathcal{T}$, c.a.d*

$$\forall A_1, A_2, ... \in \mathcal{T},\ \bigcup_i A_i \in \mathcal{T}.$$

Un ***espace topologique*** *est un couple $(E, \mathcal{T})$ où E est un ensemble et $\mathcal{T}$ une topologie sur E.*

Les éléments de $\mathcal{T}$ sont appelés ***les ouverts****, ou les* ***parties ouvertes****, de E.*

Proposition A.3.1 *(**& définition**) Tout ensemble E, admet au moins deux topologies :*

- *la topologie dite* ***topologie discrète*** *$\mathcal{T}_d = \mathcal{P}(E)$.*
  $(E, \mathcal{T})$ est dit ***espace topologique discret****.*
- *la topologie dite* ***topologie grossière*** *$\mathcal{T}_g = \{\varnothing, E\}$.*
  $(E, \mathcal{T})$ est dit ***espace topologique grossie****.*

Example A.3.1

1. *Sur $\mathbb{R}$, l'ensemble formé de $\varnothing, \mathbb{R}$ et des intervalles de la forme $]a, b[$, n'est pas une topologie, car la troisième propriété n'est pas vérifiée.*
2. *En revanche, l'ensemble formé de $\varnothing, \mathbb{R}$ et des réunions quelconques d'intervalles de la forme $]a, b[$ est bien une topologie sur $\mathbb{R}$. Sauf mention contraire, $\mathbb{R}$ sera toujours muni de cette topologie $\mathcal{T}_u$ appelée* ***topologie usuelle****.*

Définition A.3.3 *Soit E un ensemble et $\mathcal{O}_1$, $\mathcal{O}_2$ deux topologies sur E.*
*On dit que $\mathcal{O}_1$ est **plus fine** que $\mathcal{O}_2$ ou $\mathcal{O}_2$ est **plus grosse** que $\mathcal{O}_1$ si $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$.*

Lemme A.3.1 *Soit $(\mathcal{O})_{i\in I}$ une famille de topologies sur E,*
alors $\bigcap_{i\in I} \mathcal{O}_i$ est une topologie sur E.

Définition A.3.4 *Soit A un sous-ensemble de E,*
*l'intersection de toutes les topologies de E contenant A est une topologie sur E contenant A, on l'appelle la **topologie engendrée** par A, et on la note $\mathcal{O}_A$.*

Définition A.3.5 (Fermé) *, Un **fermé** (ou une **partie fermée**) de l'espace topologique $(E, \mathcal{T})$ est une partie de E dont le complémentaire dans E est un ouvert.*

Example A.3.2

1. *Pour la topologie grossière, les fermés sont $\varnothing$ et E.*
2. *Pour la topologie discrète, toute partie de E sont à la fois ouverte et fermée.*
3. *Sur $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$, les fermés sont $\varnothing, \mathbb{R}$ et des réunions quelconques d'intervalles de la forme $[a, b]$. En particulier, les singletons sont fermés.*

Théorème A.3.1 *Une topologie peut aussi être définie par l'intermédiaire de ses fermés.*
Pour qu'une partie $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(E)$ soit l'ensemble des fermés d'une topologie, il faut et il suffit qu'elle vérifie les conditions suivantes :

- $\varnothing \in \mathcal{F}, \quad E \in \mathcal{F}$.
- *L'intersection (finie ou infinie) d'une famille d'éléments de $\mathcal{F}$ est un élément de $\mathcal{F}$, c.a.d*
$$\forall A_1, A_2, ... \in \mathcal{F}, \ \bigcap_i A_i \in \mathcal{F}.$$
- *La réunion de deux éléments de $\mathcal{F}$ est un élément de $\mathcal{F}$, c.a.d*
$$\forall A, B \in \mathcal{F}, \ A \cup B \in \mathcal{F}.$$

Définition A.3.6 (Topologie induite) *Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique et $\mathcal{A}$ une partie de E, On vérifie immédiatement que l'ensemble :*

$$\mathcal{T}_{\mathcal{A}} = \{O \cap \mathcal{A} \mid O \in \mathcal{T}\}$$

*est une topologie sur $\mathcal{A}$. On l'appelle **topologie induite** sur $\mathcal{A}$ par $\mathcal{T}$.*

Lorsque aucune précision n'est donnée, on considère toujours qu'une partie d'un espace topologique $(E, \mathcal{T})$ est munie de la topologie induite par $\mathcal{T}$.

Définition A.3.7 (Espace métrique, distance) *Soit E un espace topologique non vide,*
*une **distance** sur E est une application d de $E \times E$ dans $\mathbb{R}^+$ qui vérifie,*
pour tous $x, y, z \in E$:

1. $d(x, y) = d(y, x)$.

2. $d(x, y) = 0$ *si et seulement si* $x = y$.
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Si d est une distance sur E, le couple (E, d) est appelé ***espace métrique****.*

Définition A.3.8 (Boules et sphère) *Soient (E, d) un espace métrique, $a \in E$ et $r \in \mathbb{R}^+$.*

- *La* ***boule ouverte*** *de centre a et de rayon r est l'ensemble noté $B(a, r)$ définit par :*
$$B(a, r) = \{x \in E \mid d(x, a) < r\}.$$
- *La* ***boule fermée*** *de centre a et de rayon r est l'ensemble noté $B_f(a, r)$ ou $\bar{B}(a, r)$ définit par :*
$$\bar{B}(a, r) = \{x \in E \mid d(x, a) \leq r\}.$$
- *La* ***sphère*** *de centre a et de rayon r est l'ensemble*
$$S(a, r) = \{x \in E \mid d(x, a) = r\}.$$

Définition A.3.9 (Intérieur, adhérence, frontière d'une partie) *Soient $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique et A est une partie de E.*

- *Pour toute partie A de E, on note* ***le complémentaire*** *de A dans E :*
$$\mathcal{C}_E(A) = \{x \in E,\ x \notin A\}$$
- ***L'intérieur*** *de A est le plus grand ouvert (pour l'inclusion) contenu dans A, on le note $\mathring{A}$.*
- ***L'adhérence*** *de A est le plus petit fermé (pour l'intersection) contenant A, on le note $\overline{A}$. Un point x est dite adhérent à A lorsque $x \in \overline{A}$.*
- ***La frontière*** *de A est le complémentaire de l'intérieur de A dans l'adhérence de A, noté $Fr\,A$:*
$$Fr\,A = \overline{A} \backslash \mathring{A} = \mathcal{C}_{\overline{A}}(\mathring{A}).$$
Un point x est dite frontière à A lorsque $x \in Fr\,A$.

Proposition A.3.2 *Soient $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique et A est une partie de E, On a :*

- *A ouvert de $E \iff \mathring{A} = A$.*
- *A fermé de $E \iff \overline{A} = A$.*
- $\mathcal{C}_E(\overline{A}) = \overset{\circ}{\widehat{\mathcal{C}_E(A)}}$.
- $\mathcal{C}_E(\mathring{A}) = \overline{\mathcal{C}_E(A)}$.
- $Fr\,A = Fr\,(\mathcal{C}_E(A))$.

Proposition A.3.3 *Soient A une partie de E et $x \in A$.*

- $x \in \mathring{A} \quad \iff \quad \exists\, O \subset E$ *ouvert* $, x \in O \subset A$.
- $x \in \overline{A} \quad \iff \quad \forall\, O \subset E$ *ouvert* $, x \in O, \Rightarrow\ O \cap A \neq \emptyset$.

- $x \in Fr\,A \iff \forall\, O \subset E$ *ouvert* $, x \in O, \Rightarrow\ O \cap A \neq \emptyset$ *and* $O \cap \mathcal{C}_E(A) \neq \emptyset$.

Corrolaire A.3.1 *Soient (E, d) un espace métrique et A une partie de E.*

- $x \in \mathring{A} \iff \exists\, r > 0, ; B(x, r) \subset A.$
- $x \in \overline{A} \iff \forall\, r > 0, ; B(x, r) \cap A \neq \emptyset.$

Définition A.3.10 (Voisinage.) *Soient $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique et A, B deux partie de E.*
On dit que B est ***un voisinage de*** *A lorsqu'il existe un ouvert O de E tel que*

$$A \subset O \subset B.$$

On note $\mathcal{V}(A)$ l'ensemble des voisinage de A.

Si $A = \{x\}$, on dit que B est ***un voisinage de*** *x, on note $\mathcal{V}(x)$* ***l'ensemble des des voisinage de x.***

Définition A.3.11 (Système fondamental de voisinages.) *Soient $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique et A une partie de E. Un* ***système fondamentale de voisinages de*** *A est un sous-ensemble $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}(A)$ tel que*

$$\forall V \in \mathcal{V}(A),\ \exists U \in \mathcal{U} \subset \mathcal{V}(A)\ :\ U \subset V.$$

Théorème A.3.2 *Soit (E, τ) un espace topologique. O est un ouvert de E si et seulement si O est un voisinage de chacun de ses points.*

Définition A.3.12 *Soient (E, τ) un espace topologique, et $A \subset E$, $x \in E$:*

- *On dit que x est* ***adhérent*** *à A si et seulement si pour tout $V \in \mathcal{V}(x)$, on $V \cap A \neq \emptyset$.*
- *On dit que x est un* ***point isolé*** *de A si et seulement s'il existe $V \in \mathcal{V}(x)$, on $V \cap A \neq \{x\}$.*
- *On dit que x est un* ***point d'accumulation*** *de A si et seulement si pour tout $V \in \mathcal{V}(x)$, l'ensemble $V/\{x\} \cap A$ est infini.*

Définition A.3.13 (Densité.) *Soient (E, τ) un espace topologique, et A, B des parties de E, tel que $A \subset B \subset E$.*

On dit que A est ***dense*** *dans B lorsque $B \subset \overline{A}$, ou, ce qui est équivalent, lorsque tout ouvert de E contenant un point de B rencontre A.*

On dit qu'une partie $D \subset E$ est ***dense*** *dans E si et seulement si $\overline{D} = E$.*

Définition A.3.14 (Espace séparés)
Un espace topologique $(E, \mathcal{T})$ est dit ***espace séparé*** *ou* ***espace de Hausdorff*** *lorsque, pour tous points distincts x et y de E, il existe des voisinages distincts V_x et V_y de x et y respectivement. c.a.d :*

$$\forall x, y \in E,\ x \neq y \implies \exists V_x \in \mathcal{V}(x), \exists V_y \in \mathcal{V}(y)\ :\ V_x \cap V_y = \emptyset.$$

Exemples :

1. Un espace discret est toujours séparé, un espace grossier à au moins deux éléments n'est jamais séparé.
2. Soit $E = \{0, 1, 2\}$, la topologie $\{\emptyset, \{0\}, E\}$ est non séparée puisque le seul ouvert contenant 1 est E et que $0 \in E$.
3. Tout espace métrique est séparé.

Proposition A.3.4 *soit (E, τ) est un espace topologique séparé alors pour tout $l \in E$,*

$$\bigcap_{V \in \mathcal{V}(l)} V = \{l\}.$$

Proposition A.3.5 *Soit (E, τ) un espace topologique séparé, et A une partie de E, alors la topologie induite sur A par la topologie de E est séparée.*

Proposition A.3.6 (& définition : Topologie produit)
soient (E_1, τ_1) et (E_2, τ_2) deux espace topologiques,

On appel ***ouvert élémentaire*** *de $E_1 \times E_2$ toute sous-ensemble $O \subset E_1 \times E_2$ de la forme $O = O_1 \times O_2$ ou $O_1 \in \tau_1$ et $O_2 \in \tau_2$.*

La famille formée de l'ensemble vide et des réunions quelconques d'ouverts élémentaires définit une topologie sur $E_1 \times E_2$ appelée ***topologie produit****.*

Proposition A.3.7 *Si E_1 et E_2 sont séparés alors $E_1 \times E_2$ est aussi séparé.*

Bibliographie

[1] M. Audin. On the topology of Lagrangian submanifolds examples and counter-example. *Portugaliae Mathematica*, 62(4) :375–419, 2005.

[2] C. Baikoussis and D.E. Blair. Integral surface of Sasakian space forms. *Journal of Geometry*, 43 :30–40, 1992.

[3] M. Belkhalfa and A. Chikh Salah. Surface in the nearly Sasakian 5-sphere. *Bull. math. Soc. Sci. Math. Roumanie*, 59(4) :317–330, 2016.

[4] M. Berger and B. Gostiaux. *Differential geometry, Manifolds, Curves, and Surfaces.* Springer-Verlag, 1988.

[5] D.E. Blair. *Contact manifolds in Riemannian geometry*, volume 509. Lecture notes in nathematics, Springer-Verlag, 1976.

[6] D.E. Blair. *Riemannian geometry of contact and symplectic manifolds*, volume 203. Progress in Mathematics, Springer Burkhäuser, 2010.

[7] A. Chikh Salah and L. Vrancken. Four-dimensional locally strongly convex homogeneous affine hypersurfaces. *Journal of geometry*, pages 1–29, 2016.

[8] F. Dillen and L. Vrancken. Totally real submanifolds in $S^6(1)$ satisfying Chen's equality. *Transactions of the American mathematical society*, 348(4) :1633–1646, 1996.

[9] M.P. Do Carmo. *Differential geometry of curves and surfaces.* Burkhäuser Bosten. Basel. Berlin, 1992.

[10] W. Ebeling, K. Hulek, and K. Smoczyk. *Complex and differential geometry.* Springer, 2011.

[11] J. Frédéric. Géométrie différentielle et application au controle géométrique, cours AOT13.

[12] S. Gallot, D. Hulin, and J. Lafontaine. *Riemannian geometry.* Springer, 1980.

[13] R.E. Greene, K.T. Kim, and S.G. Krantz. *The geometry of complex domains.* Burkhäuser, 2011.

[14] H.W. Guggenheimer. *Differential geometry.* Dover publications, Inc., New York, 1977. Corrected reprint of the 1963 edition, Dover books on advanced mathematics.

[15] D. Hubrechts. *Complex geometry, an introduction.* Universitext, 2005.

[16] S. Kobayashi and K. Nomizu. *Foundations of differential geometry.* Interscience Publishers, 1969.

[17] J. Lafontaine. *Introduction aux variétés différentielles.* Presses Universitaires de Grenoble, 1996.

[18] D. Laugwitz. *Differential and Riemannian geometry.* Translated by Fritz Steinhardt. Academic Press, New York-London, 1965.

[19] H. Liu, M. Magid, Ch. Scharlach, and U. Simon. Recent developments in affine differential geometry. In *Geometry and topology of submanifolds, VIII (Brussels, 1995/Nordfjordeid, 1995)*, pages 1–15. World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1996.

[20] K. Yano and M. Kon. *Structures on manifolds.* World Scientific, 1984.