الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

جامعة غرداية

Université de Ghardaïa

كلية العلوم والتكنولوجيا

Faculté des Sciences et de la Technologie

قسم الرياضيات والاعلام الآلي

Département de Mathématique et Informatique

N° d'enregistrement

/…../…../…../…../…..

Mémoire

Pour l'obtention du diplôme de master

Domaine: Mathématique et Informatique
Filière: Mathématiques
Spécialité: Analyse Fonctionnelle Et Applications

Thème
Solutions réelles et imaginaires de l'équation matricielle AX B = C

Par

RABIA GUERBOUZ

Devant le jury composé de:

Dr. Chick Salah Abdelouahab	**M.C.B**	**Univ.Ghardaia**	**Examinateur**
Dr. Guerarra Siham	**M.C.A**	**Univ. Oum el Bouaghi**	**Encadreur**
Dr. Kellaf Yasmina	**M.A.A**	**Univ.Ghardaia**	**Examinateur**

Année universitaire : 2020/2021

DÉDICACES

Je dédie ce travail :

À mon cher **fréres**, qui m'a encouragé tout au long de ma vie et qui est crédité de ma carrière et de ma diligence et qui m'a fourni toutes les raisons du succès.

À mon cher **père**, qui m'a soutenu et a planté la volonté et la continuité malgré les difficultés et m'a appris toutes les significations de respect et de dignité.

À mes sœurs, mes frères, mes oncles et toute ma famille, jeunes et vieux.

A vous **mes amis et collègues**, qui m'avez prouvés que les frères ne sont pas seulement dans l'utérus.

A vous **mes professeurs**, guident de la connaissance et du progrès et éleveurs de générations.

R. Guerbouz

REMERCIEMENT

Au nom ***Allah*** Clément et Miséricordieux !

Je tiens, en premier lieu, remercier ***Allah*** de m'avoir guidé tout au long de ce chemin et de m'avoir donné la force, le courage et la volonté pour accomplir ce travail.

Mes remerciements vont également à tous les membres du Jury, pour l'honneur qu'ils me font en acceptant d'être dans le Jury de ce memoire et à tous les enseignants de l'université.

Il m'est particulièrement agréable de remercier ma aimable promotrice Madame **Guerrara Sihem**, pour m'avoir propose ce sujet, pour ses orientations qui m'ont permis de mener mon travail à bien.

Mon respect et mes remerciements vont ensuite, aux deux personnes les plus chères pour moi, et mon père, pour leurs amour, leurs conseils ainsi que leurs soutien inconditionnel, qui m'a permis de réaliser les études que je voulais faire et par conséquent ce mémoire.

Enfin, j'exprime mes remerciements à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

R. Guerbouz

ملخص

لتكن المعادلة المصفوفاتية $AXB = C$ حيث A, B, C مصفوفات معطاة من الحقل C، نقدم علاقات حول رتبة الحل X لهده المعادلة وايضا علاقات حول رتبة المصفوفتين X_0 و X_1 في الحل $X = X_0 + iX_1$ ومن هده العلاقات نستطيع صياغة الشروط الازمة والكافية لكي تقبل المعادلة $AXB = C$ حل حقيقي، حل تخيلي؛ فقط حلول حقيقية صرفة ، فقط حلول تخيلية بحثة

وكتطبيق استطعنا صياغة الشروط اللازمة والكافية لكي تقبل المصفوفة $A + iB$ عكوس معمم حقيقي صرف او عكوس معمم تخيلي بحت.

الكلمات المفتاحية:معادلة مصفوفاتية ، رتبة ، عكوس معمم.

Résumé

Étant donné une équation matricielle $AXB = C$, tels que A, B et C sont des matrices complexes, nous présentons des formules explicites pour les rangs extrèmes d'une solution X de l'équation $AXB = C$, ainsi que les rangs extrèmes des matrices réelles X_0 et X_1 dans une solution $X = X_0 + iX_1$. Et d'aprés ces formules on a conclut les conditions necessaires et suffisantes pour que l'équation $AXB = C$ admet une solution réelle, seulement des solutions reélles, une solution imaginaire pure, seulement des solutions imaginaires pures.

Et comme applications, nous avons calculons les rangs extrèmes des parties réelles et imaginaires C et D respectivement dans l'inverse généralisé d'une matrice complexe, c-à-d : $(A+iB)^{(1)} = C+iD$ afin de déduire les conditions necessaires et suffisantes pour que la matrice $A+iB$ admet un inverse généralisé rèel ou un inverse généralisé imaginaire pure.

Mots clés :

Équation matricielle, Inverse généralisé, Rang.

Abstract

Given a matrix equation $AXB = C$, such that A, B and C are complex matrices, we present explicit formulas for the ranks extremes of a solutions X of the equation $AXB = C$, as well as the extreme ranks of the real matrices X_0 and X_1 in a solution $X = X_0 + iX_1$. And according to these formulas we have concluded the necessary and sufficient conditions for the equation $AXB = C$ to have a real solution, only real solutions, pure imaginary solution, only pure imaginary solutions.

As applications, we have calculated the extreme ranks of the real and imaginary parts C and D respectively in the generalized inverse of a complex matrix, i.e.: $(A + iB)^{(1)} = C + iD$ in order to deduce the necessary and sufficient conditions for the matrix $A + iB$ to have a real generalized inverse or a pure imaginary generalized inverse.

Keywords :

Matrix equation, Generalized inverse, Rank.

TABLE DES MATIÈRES

Notation **viii**

1 Préliminaires **1**

1.1 Notions de bases 1

1.1.1 Applications linéaires 1

1.1.2 Matrices associées à une application linéaire 1

1.1.3 Matrices partitionnées 2

1.2 Matrices complexes 2

1.2.1 Matrice conjuguée 2

1.2.2 Matrice adjointe 3

1.2.3 Norme de Frobinius 3

1.2.4 Rang d'une matrice 4

1.2.5 Idempotent 5

1.2.6 Les opérations élémentaires sur une matrice en blocs (EBMO) 5

1.3 Les inverses généralisés des matrices 5

1.3.1 Quelque propriétés des inverses généralisés 6

1.4 L'inverse généralisé de Moore-Penrose 9

1.4.1 Unicité et existence 10

1.4.2 Propriétés principales de l'inverse de Moore-Penrose 11

1.4.3 Les inverses généralisés et les équations linéaires 12

1.5 L'équation matricielle AXB=C 13

1.5.1 Quelques résultats concernant l'équation matricielle particulière $AXA^* = B$ 13

2 Rang maximal et minimal d'une solution de l'équation matricielle AXB=C **17**

2.1 Introduction 17

2.2 Rang de la solution de l'equation AXB=C 21

3 Applications aux inverses généralisés **26**

3.1 Introduction 26

3.2 Rang maximal et minimal des matrices C et D dans $(A+iB)^{(1)} = C + iD$ 26
3.3 Examples 28

Bibliographie **35**

INTRODUCTION

En mathématiques, et plus précisément en algèbre linéaire, la notion de l'inverse généralisé (ou pseudo-inverse) généralise celle d'inverse d'une application linéaire ou d'une matrice aux cas non inversibles en lui supprimant certaines des propriétés demandées aux inverses, ou en l'étendant aux espaces non algébriques plus larges.

Le concept d'inverse d'une matrice singulière ou rectangulaire a été introduit pour la première fois par. E. H. Moore en 1920. Mais aucune étude systématique du sujet n'a été faite jusqu'en 1955 lorsque M. Penrose, a donné un outil très puissant pour la résolution d'un système d'équations linéaires.

La notion d'inversibilité est une notion très importante dans tous les domaines mathématiques. L'équation $Ax = b$ possède une solution unique lorsque la transformation linéaire A est inversible, malheureusement, on ne se trouve pas toujours dans ce cas. En pratique, on obtient souvent des données sous forme d'une matrice rectangulaire qui est une transformation non inversible, ou bien dans le cas général on se trouve avec une transformation non surjective ou non injective. Dans ce cas on essaie de trouver une transformation qui possède des propriétés très proches de celle de l'inverse, ce qui a été énoncé par M. Penrose en introduisant une matrice $X = A^+$ vérifiant les quatre équations suivantes :

$$AXA = A \tag{1}$$

$$XAX = X \tag{2}$$

$$(AX)^* = AX \tag{3}$$

$$(XA)^* = XA \tag{4}$$

L'inverse généralisé et l'inverse de Moore Penrose ont été traités par plusieurs chercheurs, voir [1], [2], [4], [14] et [15].

On va utiliser en particulier l'inverses généralisé de Moore-Penrose car il est notamment utile dans le calcul de régressions (méthode des moindres carrés) pour un système d'équations linéaires.

Les équations matricielles les plus connues dans la théorie des matrices sont les équations :

$$AXB = C$$

$$AXA^* = B$$

Où A, B et C sont des matrices connues et X est inconnue, de telle sorte que la deuxième équation est une cas particulière de la première.

Résoudre des équations matricielles est l'un des problèmes principaux du calcul matriciel. De nombreuses techniques ont été proposées et développées pour étudier plusieurs types d'équations matricielles. Par exemple, si l'équation matricielle $AXB = C$ n'est pas consistente, les chercheurs essaient souvent de trouver des solutions approchées qui satisfont certains critères optimaux. L'une des solution approchées la plus utilisée est la solution à moindres carrées, qui est définie comme étant une matrice X qui minimise la norme de la différence $AXB-C$, voir [5], [6]. Une autre solution approximées moins utilisée par rapport à celle des moindres carrées, est la solution à rang minimal qui est définie comme étant une matrice X qui minimise le rang de la différence $AXB - C$, le concept de la solution à rang minimal d'équations matricielles a été proposé dans [22], par Yongge Tian dans l'étude du rang minimal de la fonction matricielle linéaire $AXB - C$. De toute évidence, la solution à moindres carrées, la solution à rang minimal et la solution ordinaire de $AXB = C$ toutes coïncident si cette équation est consistente. Dans la littérature on rencontre l'étude de cette équation et ses applications, par exemple dans [11], [10], [12], S. K. Mitra, A. Navarra, P. L. Odell, D. M. Yong, ont étudié la solution commune de la paires d'équations $A_1X_1B_1 = C_1$ et $A_2X_2B_2 = C_2$, et ils ont donné la représentation de cette solution commune, dans le cas particulièr, dans [25] et [24], les auteurs, ont donné le rang de la solutions hermitiennes définies-positives et definie non négative de l'équation matricielle $AXA^* = B$, dans [7] et [8] les auteurs ont donné les rangs extrémaux des sous-matrices dans la solution hermitienne à l'équation matricielle $AXA^* = B$ et les rangs de solutions hermitiennes et anti-hermitiennes de cette équation.

Le mémoire se compose de trois chapitres, dans le premier chapitre nous avons donné des notions préliminaires, et vu que l'inverse de Moore-Penrose est l'outil le plus important tout au long de ce travail, on a tenu de rappeler ses propriétés algébriques et son rôle dans la résolution d'équations linéaires.

Dans le deuxième chapitre, nous donnons des formules pour les rangs maximaux et minimaux de la solution de l'équation matricielle linéaire $AXB = C$. A partir de ces formules, comme des applications nous conduisons des conditions nécessaires et suffisantes pour que l'équation $AXB = C$ admet une solution réelle, admet seulement des solution réelles, admet une solution imaginaire pure, admet seulement des solutions imaginaire pure.

Dans le troisiéme chapitre, on s'interesse par des applications liées par le chapitre précédent où on étudie les rangs maximaux et minimaux des parties réelles et imaginaires C et D respectivement dans l'inverse généralisé d'une matrice c-à-d : $(A + iB)^{(1)} = C + iD$.

NOTATIONS

Notation	Définition
$\mathbb{k}$	le corps des nombres réels ou complexe,
$M_{m\times n}(\mathbb{k})$	l'espace des matrices de type $m \times n$ sur $\mathbb{k}$,
$\mathbb{R}^{m\times n}$	l'espace des matrices de type $m \times n$ sur $\mathbb{R}$,
$\mathbb{C}^{m\times n}$	l'espace des matrices de type $m \times n$ sur $\mathbb{C}$,
$\mathbb{C}_r^{m\times n}$	l'espace des matrices de type $m \times n$ sur $\mathbb{C}$ de rang r,
A^{-1}	l'inverse ordinaire de A,
$A^{(1)}$	l'inverse généralisé de A,
A^{+}	l'inverse de Moore-Penrose de A,
A^{T}	la matrice transposée de A,
A^{*}	la matrice adjointe de A,
$r\,(A)$	le rang de A,
$N(A)$ ou $\ker(A)$	le noyau de la matrice A,
$R(A)$ ou $Im(A)$	l'image de la matrice A,
$tr(A)$	la trace de la matrice A,
$\|\|A\|\|_F$	la norme de Frobinius,
$F_A = (I - A^{-}A)$ et $E_A = I - AA^{-}$	sont des projecteurs orthogonaux induits par A.
$Re(z)$	La partie réelle de z, $z \in \mathbb{C}$.
$Im(z)$	La partie imaginaire de z, $z \in \mathbb{C}$.
i_{+}	le nombre de valeurs propres positives de A
i_{-}	le nombre de valeurs propres négatives de A

CHAPITRE 1

PRÉLIMINAIRES

Dans ce chapitre, nous introduisions des définitions, des théorèmes et des propositions qui seront utilisées dans le reste de ce mémoire.

1.1 Notions de bases

1.1.1 Applications linéaires

Définition 1.1.1 *Soient E et F deux $\mathbb{k}$-espaces vectoriels. Une application f de E dans F est une* ***application linéaire*** *si elle satisfait les deux conditions suivantes :*

1. $f(u+v) = f(u) + f(v)$, *pour tous* $u, v \in E$,
2. $f(\lambda u) = \lambda f(u)$, *pour tout* $u, \in E$ *et tout* $\lambda \in \mathbb{k}$.

Autrement dit : une application est linéaire si elle « respecte » les deux lois d'un espace vectoriel.

notation 1 *l'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\pounds(E,F)$.*

Définition 1.1.2 *Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire.*
Le noyau de *f, noté $N(f)$, est par définition l'ensemble des $u \in E$ tels que*

$$f(u) = 0.$$

L'image de *f, notée $R(f)$, est par définition l'ensemble des $w \in F$ tel qu'il existe $u \in E$ avec*

$$f(u) = w.$$

1.1.2 Matrices associées à une application linéaire

Définition 1.1.3 *[3] Soient E et F deux $\mathbb{k}$-espaces vectoriels de dimensions finies ($E = \mathbb{k}^n$ et $F = \mathbb{k}^m$), $\{e_1, ..., e_n\}$ une base de E et $\{f_1, ..., f_m\}$ une base de F. Soit enfin g une application linéaire de E dans F (on dira $g \in \pounds(E,F)$), telle que $x \mapsto y = g(x)$.*

On appelle matrice de g relativement aux deux bases, la matrice $A = [a_{ij}]$ de dimensions $m \times n$ définie par colonnes

$$g(e_1)...g(e_n)$$

$$A = [A^1...A^n]$$

La $j^{ième}$ colonne A^j contient les coordonnées de $g(e_j)$ exprimées dans la base $\{f_1, ..., f_n\}$. Plus précisément, $g(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} f_i$. Alors, la matrice colonne $X = [x_j]$ des coordonnées de X dans la base $\{e_j\}$, grâce au produit matriciel $Y = AX$ où $y_i = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_j$.

En autre, Soit A une matrice de $M_{m\times n}(\mathbb{k})$. Alors A est la matrice d'une unique application linéaire g_A de $\mathbb{k}^n$ dans $\mathbb{k}^m$ relativement aux bases canoniques de ces espaces. On dit que g_A est l'application linéaire canoniquement associée à A.

1.1.3 Matrices partitionnées

Définition 1.1.4 *Une notation souvent utilisée à écrire une matrice $A(n, p)$ comme une juxtaposition de sous-matrices ou blocs. On dit alors que A est partitionnée. Il faut bien entendu que les dimensions des blocs soient compatibles.*

Example 1.1.1 *A matrice à n lignes et p colonnes peut s'écrire*

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1l} & a_{1(l+1)} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kl} & a_{k(l+1)} & \cdots & a_{kp} \\ a_{(k+1)1} & \cdots & a_{(k+1)l} & a_{(k+1)(l+1)} & \cdots & a_{(k+1)p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nl} & a_{n(l+1)} & \cdots & a_{np} \end{bmatrix}$$

Où A_{11} et A_{12} ont k lignes, A_{21} et A_{22} $n-k$ lignes, A_{11} et A_{21} l colonnes, A_{12} et A_{22} $p-l$ colonnes.

1.2 Matrices complexes

1.2.1 Matrice conjuguée

Définition 1.2.1 *Soit A une matrice complexe, la matrice* ***conjuguée*** *d'une matrice A à coefficients complexes est la matrice $\overline{A}$ constituée des éléments de A conjugués.plus précisément, si on note a_{ij} et b_{ij} les coefficients respectifs de A et de $\overline{A}$ alors, $b_{ij} = \overline{a_{ij}}$*

Par Exemple, si
$A = \begin{bmatrix} 2+i & 1-i \\ 4 & 4+3i \end{bmatrix}$, alors $\overline{A} = \begin{bmatrix} 2-i & 1+i \\ 4 & 4-3i \end{bmatrix}$.

Proposition 1.2.1 *On note A et B deux matrices quelconques de $M_{m\times n}(\mathbb{C})$ et $\alpha \in \mathbb{C}$ un scalaire.*

1. $\overline{A+B} = \overline{A} + \overline{B}$,
2. $\overline{AB} = \overline{A} \cdot \overline{B}$,
3. $\overline{\alpha A} = \overline{\alpha}\overline{A}$,
4. $\overline{\overline{A}} = A$,
5. *Si A est une matrice carrée inversible :* $\overline{(A^{-1})} = \left(\overline{A}\right)^{-1}$.

1.2.2 Matrice adjointe

Définition 1.2.2 *Une matrice adjointe (aussi appelée matrice transconjuguée) d'une matrice $A \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$ est la matrice transposée de la matrice conjuguée de A, et on la note par A^*.*
Dans le cas particulier où $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, sa matrice adjointe est donc simplement sa matrice transposée.
On a donc :

$$A^* = \left(\overline{A}\right)^T = \overline{(A^T)}$$

Example 1.2.1 $\begin{bmatrix} 1-i & 2 \\ 5+i & 4+i \\ -i & 3+i \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} 1+i & 5-i & i \\ 2 & 4-i & 3-i \end{bmatrix}$.

Proposition 1.2.2 *Soient A, $B \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$, et $C \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Alors,*

1. $(A^*)^* = A$,
2. $(AB)^* = B^*A^*$,
3. $\det A^* = \overline{\det A}$,
4. *Si $A = A^*$, la matrice A est dite Hermitienne ou auto-adjoint,*
5. *Si $C = C^T$, la matrice C est dite symétrique,*
6. *Si $A = -A^*$, la matrice A est dite anti-Hermitienne,*
7. *Si $C = -C^T$, la matrice C est dite anti-symétrique,*
8. *Si $AA^* = A^*A$, la matrice A est dite normale,*
9. *Si $AA^* = A^*A = I$, la matrice A est dite unitaire,*
10. *Si $CC^T = C^TC = I$, la matrice C est dite orthogonale.*

1.2.3 Norme de Frobinius

Définition 1.2.3 *(Trace d'une matrice carrée) La trace de $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n\times n}$ est définie par la somme des éléments diagonaux*

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

1. $tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$
2. $tr(cA) = c\ tr(A)$

Définition 1.2.4 *Soit $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, on définit la norme matricielle de Frobinius notée par $||A||_F$ telle que*

$$||A||_F = \sqrt{tr(A^*A)} = \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

1.2.4 Rang d'une matrice

Définition 1.2.5 *Le rang de $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, noté $rang(A)$ ou $r(A)$, correspond est le nombre de colonnes (ou de lignes) de A linéairement indépendantes,*

$$rang(A) = \dim R(A)$$

c-à-d le rang de ses vecteurs colonnes.

Example 1.2.2 *Le rang de la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 4}$$

est par définition le rang de la famille de vecteurs de
$\mathbb{k}^2 : \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$
Tous ces vecteurs sont colinéaires à v_1, donc le rang de la famille $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ est 1 et ainsi $r(A) = 1$.

Factorisation à rang complet

Proposition 1.2.3 *Soit $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ de rang r, $r \neq 0$. Alors, il existe des matrices $B \in \mathbb{C}^{m\times r}$, $C \in \mathbb{C}^{r\times n}$ telles que $r(B) = r(C) = r$ et $A = BC$.*

Cette décomposition est appelée une factorisation à rang complet de la matrice A.

Preuve 1.2.1 *Soit $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ de rang r et soit $B = \{b_1, b_2, ..., b_r\}$, une matrice formée par r vecteurs linéairement indépendants. Les n colonnes de A sont donc des combinaisons linéaires uniques des vecteurs $b_1, ..., b_r$ donc $r(B) = r$. Chacune de ces combinaisons linéaires formant une colonne de $C \in \mathbb{C}^{r\times n}$, d'où on peut écrire $A = BC$ pour une matrice $C \in \mathbb{C}^{r\times n}$, donc $r(C) \leq r$. Celle-ci est alors déterminée comme :*

$$r = rang(BC) \leq \min\{r(B), r(C)\}$$

On a $r = r(A) \leq r(C)$, Par conséquent $r(C) = r$.

Proposition 1.2.4 *Soient $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{C}^{n\times q}$*

1. $r(A) = r(A^*) = r(A^*A) = r(AA^*)$.
2. $r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$.
3. *Si A, $B \in \mathbb{C}^{m\times n}$*, $r(A + B) \leq r(A) + r(B)$.

1.2.5 Idempotent

Définition 1.2.6 *On dit que* $A \in \Bbbk^{n\times n}$ *est un idempotent(projecteur) si* $A^2 = A$ *si ,en plus* $A = A^*$ *alors* A *est dit projecteur orthogonal.*

Proposition 1.2.5 *[1]*

1. *Tout matrices idempotent*$\neq$ *la matrice unité est non inversible.*
2. *Soit* $E \in \mathbb{C}^{n\times n}$*,les affirmations suivantes sont équivalentes.*
   a) E^* *est un idempotent,*
   b) $I - E$ *est un idempotent,*
   c) $N(E) = R(I - E)$*,*
   d) *si* $x \in R(E)$*,alors* $Ex = x$*,*
   e) *rank* $E =$ *trace* E*,*
   f) $E(I - E) = (I - E)E = 0$

1.2.6 Les opérations élémentaires sur une matrice en blocs (EBMO)

Afin de conduire des formules explicites pour le rang de matrices en blocs, nous utilisons les trois types d'opérations élémentaires sur les matrices en blocs (abrégée par EBMO) :

I) Interchange deux blocs lignes (colonnes) dans une matrice partitionnée,

II) Multiplier un bloc ligne (colonne) par une matrice non singulière à gauche (à droite) dans une matrice partitionnée,

III) Ajouter à un bloc ligne (colonne) multiplié par une matrice appropriée à gauche (droite) à un autre bloc ligne (colonne).

1.3 Les inverses généralisés des matrices

Définition 1.3.1 *[1] soit* A *de matrice non singuliére ,alors il existe unique inverse noté* A^{-1} *comme*

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

Cet inverse verifier les propriétes suivantes :

1. $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$
2. $\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$
3. $(A^*) = \left(A^{-1}\right)^*$
4. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Considérons le système linéaire

$$Ax = b$$

Si A est une matrice carrée d'ordre n, et si A est non singulière, donc $N(A) = \{0\}$, alors il existe une solution unique pour x donnée par $x = A^{-1}b$.

Lorsque $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, l'équation $Ax = b$ a une solution si et seulement si $b \in R(A)$, et si $b \notin R(A)$, il n'y a pas de solution à l'équation $Ax = b$, alors on pose un problème où la solution peut être trouvée
à l'aide de la dé finition suivante on à:

Définition 1.3.2 *1 Soit $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, une matrice $X \in \mathbb{C}^{n\times m}$ est dite inverse généralisés ou (g-inverse de la matrice A, est notée par $A^{(1)}$ dans le cas*

$$AXA = A \tag{1.1}$$

1.3.1 Quelque propriétés des inverses généralisés

Soit matrice $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$: Citons quelques propriétés de $A^{(1)}$.

Théorème 1.3.1 *1. $r(A^{(1)}) \geq r(A) = r(A^{(1)}A) = r(AA^{(1)})$.*

2. Si A est carrée et non singuliére, alors $A^{(1)} = A^{-1}$ est unique.

3. $AA^{(1)}$ et $A^{(1)}A$ sont idempotentes.

Preuve 1.3.1 *1. Pour deux matrices B et C, on a $r(BC) \leq \min\{r(A), r(B)\}$, alors*

$$r(A) \geq r(AA^{(1)}) \geq r(AA^{(1)}A) = r(A) \Longrightarrow r(A) = r(AA^{(1)})$$

$$r(A) \geq r(A^{(1)}A) \geq r(AA^{(1)}A) = r(A) \Longrightarrow r(A) = r(A^{(1)}A)$$

D'où

$$r(A) = r(A^{(1)}A) = r(AA^{(1)})$$

D'autre part

$$r(A^{(1)}) \geq r(AA^{(1)}) \geq r(AA^{(1)}A) = r(A)$$

2. On a $AA^{(1)}A = A$

Si A est non singuliére, alors la multiplication par A^{-1} à la fois à gauche et à droite donnerait

$$A^{(1)} = A^{-1}$$

3.

$$\begin{aligned} (AA^{(1)})^2 &= (AA^{(1)}A)A^{(1)} = AA^{(1)} \\ (A^{(1)}A)^2 &= (A^{(1)}AA^{(1)})A = A^{(1)}A \end{aligned}$$

Lemme 1.3.1 *[1] Soit $A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$. Alors on à*

1. $A^{(1)}A = I_n$ SSi $r = n$.

2. $AA^{(1)} = I_m$ SSi $r = m$.

Example 1.3.1 *Déterminer un inverse généralisé de* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$.

soit $A^{(1)} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, *de* $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$,

il faut avoir $a + 2b + 2c + 4d = 1$, *donc* $A^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 - 2b - 2c - 4d & b \\ c & d \end{bmatrix}$,

où a, b et c sont arbitraires

par exemple si on choisie : $d = -2$, $b = 2$, $c = 0$, *on va trouver :* $A^{(1)} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

En particulier la deuxiemme méthode pour calculer l'inverse généralisé, construction de $\{1\}$ −inverse pour n'importe quelle matrice $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ est simplifier par transformation de A à la forme normal Hermitienne comme indique en théorème suivante :

Théorème 1.3.2 *Soient* $A \in \mathbb{C}_r^{m \times n}$ *et soientE* $\in \mathbb{C}_m^{m \times m}$ *et* $P \in \mathbb{C}_n^{n \times n}$ *comme*

$$EAP = \begin{bmatrix} I_r & K \\ O & O \end{bmatrix} \tag{1.2}$$

pour tout $L \in \mathbb{C}^{(n-r)\times(m-r)}$ *des matrices* $n \times m$

$$X = P \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & L \end{bmatrix} E \tag{1.3}$$

est un $\{1\}$*-inverse de* A.

Example 1.3.2 *Soient* $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ *,et soit* $T_0 = \begin{bmatrix} A & I_m \end{bmatrix} E$ *tronsformation A à la forme normal Hermitienne note EA,on utilise Elimination de Gausses ,qui*

$$ET_0 = \begin{bmatrix} EA & A \end{bmatrix}$$

Soit

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2i & i & 0 & 4+2i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -6 & -3-3i \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 4-4i & 1 \end{bmatrix}, \text{avec } r(A) = 2 \tag{1.4}$$

Alors

$$\begin{bmatrix} EA & E \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cccccc:ccc} 0 & \boxed{2i} & i & 0 & 4+2i & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -6 & -3-3i & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 4-4i & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] : \begin{cases} L_1 \mapsto \left(\frac{1}{2i}\right) L_1 \\ L_3 \mapsto 2L_1 - L_3 \end{cases}$$

$$= \left[\begin{array}{cccccc:ccc} 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 1-2i & -\frac{1}{2}i & -\frac{1}{2}i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-3} & -6 & -3-3i & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1+i & i & 0 & 1 \end{array}\right] : L_2 \mapsto \left(-\frac{1}{3}\right) L_2$$

$$= \left[\begin{array}{cccccc:ccc} 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 1-2i & -\frac{1}{2}i & -\frac{1}{2}i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1+i & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & \frac{1}{3} & 1 \end{array}\right] : L_3 \mapsto L_3 - L_2$$

Alors

$$EA = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 1-2i & -\frac{1}{2}i \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1+i \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.5}$$

et

$$E = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}i & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ i & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

pour tout $L \in \mathbb{C}^{(n-r)\times(m-r)}$,on choisie la matrice de permitation P comme

$$P = \left[\begin{array}{cc:cccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

alors

$$EAP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \vdots & 0 & \frac{1}{2} & 1-2i & -\frac{1}{2}i \\ 0 & 1 & \vdots & 0 & 0 & 2 & 1+i \\ \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

, *On choisé* $L = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{bmatrix} = \in \mathbb{C}^{4\times 1}$

Alors

$$X = P \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & L \end{bmatrix} E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & \vdots & \alpha \\ 0 & 0 & \vdots & \beta \\ 0 & 0 & \vdots & \gamma \\ 0 & 0 & \vdots & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}i & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ i & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} i\alpha & \frac{1}{3}\alpha & \alpha \\ -\frac{1}{2}i & 0 & 0 \\ i\beta & \frac{1}{3}\beta & \beta \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ i\gamma & \frac{1}{3}\gamma & \gamma \\ i\delta & \frac{1}{3}\delta & \delta \end{bmatrix}$$

Par exemple si on choisie : $\alpha = -1, \beta = i, \gamma = 3i, \delta = -6$. *on va trouve un invese généralisé vérifier*

$$X = \begin{bmatrix} -i & -\frac{1}{3} & -1 \\ -\frac{1}{2}i & 0 & 0 \\ -1 & \frac{1}{3}i & i \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ -3 & i & 3i \\ -6i & -2 & -6 \end{bmatrix}$$

1.4 L'inverse généralisé de Moore-Penrose

En 1955 Penrose à démontré que, pour toute matrice A (carrée ou rectangulaire) à éléments réels ou complexes, il existe une matrice unique X satisfaisant les quatre équations,

$$AXA = A \quad (1.6)$$

$$XAX = X \quad (1.7)$$

$$(AX)^* = AX \quad (1.8)$$

$$(XA)^* = XA \quad (1.9)$$

Cet unique inverse généralisé, est communément connu sous le nom l'inverse de Moore Penrose et est souvent désigné par A^+.

Si A est non singulière, la matrice $X = A^{-1}$ satisfait trivialement les quatre équations, alors l'inverse de Moore-Penrose d'une matrice non singulière est le même que l'inverse ordinaire.

AA^+ et A^+A sont des matrices Hermitiennes idempotentes. Ce sont les projecteurs orthogonaux sur $R(A)$ et $R(A^*)$ respectivement.

1.4.1 Unicité et existence

1. Existence

Théorème 1.4.1 *[2] Si $A = BC$ où $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{C}^{m\times r}$, $C \in \mathbb{C}^{r\times n}$, et $r = r(A) = r(B) = r(C)$, alors*

$$A^+ = C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*.$$

Preuve 1.4.1 *On conclut que (B^*B) et (CC^*) sont des matrices de rang r, car d'après les propriétés de rang on a :*

$$r(B) = r(B^*B) = r(CC^*) = r(C) = r$$

On prend

$$X = C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*$$

Alors on a :

$AX = BCC^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^* = B(B^*B)^{-1}B^*$ donc $(AX)^* = AX$.

Aussi $XA = C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*BC = C^*(CC^*)^{-1}C$ donc $(XA)^* = XA$. Pour vérifier (1.6) et (1.7) On utilise $XA = C^*(CC^*)^{-1}C$, on obtient $A(XA) = BC(C^*(CC^*)^{-1}C) = BC = A$ et $(XA)X = C^*(CC^*)^{-1}CC^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^* = C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^* = X$ On remarque que la matrice X satisfait les quatre équations de Moore-Penrose. Ainsi $X = A^+$ par définition.

2. Unicité

Soient A_1^+ et A_2^+, deux inverses de Moore-Penrose de A. Alors d'après (1.7) et (1.8) on a :

$$A_1^+ = A_1^+AA_1^+ = A_1^+(AA_1^+)^*$$

Donc $A_1^+ = A_1^+(A_1^+)^*A^* = A_1^+(A_1^+)^*(AA_2^+A)^*$ par (1.6)

Alors $A_1^+ = A_1^+(A_1^+)^*A^*(AA_2^+)^* = A_1^+(A_1^+)^*A^*AA_2^+ = A_1^+(AA_1^+)^*AA_2^+ = A_1^+AA_1^+AA_2^+$ par (1.8)

D'où

$$A_1^+ = A_1^+ A A_2^+ \text{ par } (1.6)$$

De même

$$A_2^+ = A_2^+ A A_2^+ = (A_2^+ A)^* A_2^+ \text{ par } (1.7) \text{ et } (1.9)$$

Donc $A_2^+ = (A_2^+ A A_1^+ A)^* A_2^+ = (A_1^+ A)^* (A_2^+ A)^* A_2^+ = A_1^+ A A_2^+ A A_2^+$ par (1.9)

D'où

$$A_2^+ = A_1^+ A A_2^+ \text{ par } (1.6)$$

L'inverse de Moore-Penrose est donc unique.

Example 1.4.1 *Soit* $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$, $r(A) = 1$ *et* $A = BC$
Où $B \in \mathbb{C}^{2\times 1}$ *et* $C \in \mathbb{C}^{1\times 3}$ *. On peux prendre :*

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Puis ,

$$B^* B = [5] \, , C^* C = [6] \, .$$

Ainsi ,

$$A^+ = \frac{1}{30} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{30} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Cas particulier , si $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ et $r(A) = 1$. Alors ,

$$A^+ = \left(\frac{1}{\alpha}\right) A^*$$

Où $\alpha = trace(A^* A) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2$.

1.4.2 Propriétés principales de l'inverse de Moore-Penrose

Lorsque l'inverse généralisé n'a pas tous les propriétés de l'inverse ordinaire, il devient important de savoir quelles propriétés il a et quelles identités il satisfait, il ya bien sûr un nombre arbitrairement grand d'affirmations véritables sur les inverses généralisées. Le théorème suivant représent certaines des propriétés les plus élémentaires.

Théorème 1.4.2 *[2] Soit* $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$*. Alors on a*

1. $(A^+)^+ = A$.
2. $(A^+)^* = (A^*)^+$.

3. *Si* $\lambda \in \mathbb{C}$, $(\lambda A)^+ = \lambda^+ A^+$ *où* $\lambda^+ = \frac{1}{\lambda}$ *si* $\lambda \neq 0$ *et* $\lambda^+ = 0$ *si* $\lambda = 0$.
4. $A^* = A^* A A^+ = A^+ A A^*$.
5. $(A^* A)^+ = A^+ A^{*+}$.
6. $A^+ = (A^* A)^+ A^* = A^*(AA^*)^+$.
7. $r(A) = r(AA^+) = r(A^+ A)$.
8. $(UAV)^+ = V^* A^+ U^*$ *ou* U, V *sont des matrices unitaires.*

Théorème 1.4.3 *[2] Si* $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, *alors a*

1. $R(A) = R(AA^+) = R(AA^*)$.
2. $R(A^+) = R(A^*) = R(A^+ A) = R(A^* A)$.
3. $R(I - AA^+) = N(AA^+) = N(A^*) = N(A^+) = R(A)^{\perp}$.
4. $R(I - A^+ A) = N(A^+ A) = N(A) = R(A^*)^{\perp}$.

Définition 1.4.1 *[1] Pour toute* $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $A\{i, j, ..., k\}$ *désigne l'ensemble des matrices* $X \in \mathbb{C}^{n\times m}$ *qui satisfont les équations* $(i), (j), ..., (k)$ *parmi les quatre équations de Penrose.*

Une matrice $X \in A\{i, j, ..., k\}$ *est appelée* $\{i, j, ..., k\}$*-inverse de* A *et aussi notée par* $A^{(i,j,\dots,k)}$.

1.4.3 Les inverses généralisés et les équations linéaires

L'application principale de l'inverse généralisé est la résolution des systèmes linéaires, où ils sont utilisés de la même manière que les inverses ordinaires dans le cas où la matrice est non singulière.

Théorème 1.4.4 *[1] Soient* $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{C}^{p\times q}$, $C \in \mathbb{C}^{m\times q}$. *Alors l'équation matricielle* $AXB = C$ *est consistente si et seulement si* $AA^{(1)}CB^{(1)}B = C$,
dans ce cas la solution générale est :

$$X = A^{(1)}CB^{(1)} + Y - A^{(1)}AYBB^{(1)}.$$

où $Y \in \mathbb{C}^{n\times p}$ *est arbitraire.*

Corollaire 1.4.1 *[1] Soit* $A \in \mathbb{C}^{m\times n}, b \in \mathbb{C}^m$. *Alors l'équation* $Ax = b$ *est consistente si et seulement si* $AA^{(1)}b = b$, *dans ce cas la solution générale est :*

$$x = A^{(1)}b + (I - A^{(1)}A)y \tag{1.10}$$

Où $y \in \mathbb{C}^n$ *arbitraire.*

Le corollaire suivant exprime la caractérisation de l'ensemble $A\{1\}$, en termes d'un élément arbitraire $A^{(1)}$ de cette ensemble,

Corollaire 1.4.2 *[1] Soit* $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $A^{(1)} \in A\{1\}$. *Alors*

$$A\{1\} = \{A^{(1)} + Z - A^{(1)}AZAA^{(1)},\ Z \in \mathbb{C}^{n\times m}\}$$

1.5 L'équation matricielle AXB=C

Considérons l'équation matricielle linéaire

$$AXB = C$$

où A, B et C sont des matrices connues de types appropriés, et X est inconnue.
L'équation $AXB = C$ est l'une des équations matricielles les plus connues dans la théorie des matrices.

Les conditions de la consistence et la solution générale de l'équation $AXB = C$ ont été calculées de manière analytique à l'aide de l'inverse généralisé et le résultat classique suivant a été obtenu

Lemme 1.5.1 *[6] L'équation $AXB = C$ est consistente si et seulement si $R(C) \subseteq R(A)$ et $R(C^*) \subseteq R(B^*)$, ou d'une manière équivalente, $AA^{(1)}CB^{(1)}B = C$. Dans ce cas, la solution générale est donnée sous la forme paramétrique suivante*

$$X = A^{(1)}CB^{(1)} + F_A U_1 + U_2 E_B \tag{1.11}$$

où U_1, $U_2 \in \mathbb{C}^{n\times p}$ sont arbitraires.
En particulier, l'unique solution de l'équation $AXB = C$ ayant la Fnorme minimale est exprimée comme suit $X = A^{(1)}CB^{(1)}$ où Fnorme désigne la norme de Frobinious .

Preuve 1.5.1 *1. La condition suffisante : on pose $X = A^{(1)}CB^{(1)}$ dans $AXB = C$, alors $AA^{(1)}CB^{(1)}B = C$.*

2. La condition nécessaire :

on multiple $AXB = C$ par $AA^{(1)}$ et $B^{(1)}B$ on obtient $AA^{(1)}AXBB^{(1)}B = AXB = AA^{(1)}CB^{(1)}B$.

Remarque 1 *Dans le cas particulier dans l'équation matricielle Hermitienne $AXA^* = B$ la consistence est indiqué comme dans le lemme suivant :*

Lemme 1.5.2 *[19] L'équation $AXA^* = B$ est consistente si et seulement si $R(B) \subseteq R(A)$, ou d'une manière équivalente, $AA^{(1)}B = B$. Dans ce cas, la solution générale hermitienne est donnée sous la forme paramétrique suivante*

$$X = A^{(1)}B\left(A^{(1)}\right)^* + F_A U + U^* F_A. \tag{1.12}$$

où $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ est arbitraire.
En particulier, l'unique solution de l'équation $AXA^* = B$ est $X = A^{(1)}B\left(A^{(1)}\right)^*$.

Remarquons que les équations (1.11) et (1.12) sont données sous la forme paramétrique, nous pouvons facilement en tirer des propriétés diverses de la solution à moindres carrées, comme l'unicité, rang maximal et minimal, la norme de la solution à moindres carrées...etc, à titre d'exemple dans [6], Y. H. Liu étudie le rang maximal et minimal de la solution à moindres carrées de l'équation $AXB = C$, dans [20] Y. Tian et S. Cheng, ont étudié le rang maximal et minimal de l'expression matricielle $A - BXC$.

1.5.1 Quelques résultats concernant l'équation matricielle particulière $AXA^* = B$

l'équation $AXA^* = B$ est un cas particulier de l'équation matricielle $AXB = C$, où dans ce cas les solutions seront symétriques ou hermitiennes, cet équation a été étudié par de nombreuses auteurs, alors pour cet importance, on va annoncer quelques résultats obtenus par les chercheurs.

Relations entre les solutions à moindres carrés et les solutions à rang minimal de $AXA^* = B$

Nous écrivons les ensembles de tous les solutions hermitiennes à moindres carrés et à rang minimale de l'équation matricielle $AXA^* = B$ comme :

$$S_1 = \{X \in \mathbb{C}_H^{n\times n} \mid X \text{ minimise la norme de la difference } B - AXA^*\} \tag{1.13}$$

$$S_2 = \{X \in \mathbb{C}_H^{n\times n} \mid X \text{ minimise le rang de la difference } B - AXA^*\} \tag{1.14}$$

tel que la norme indiqué dans (1.13) est la norme de Frobinius.

Théorème 1.5.1 *[20] Soient S_1et S_2 indiqués dans (1.13) et (1.14). Alors les proprietés suivantes sont équivalentes*

a) $S_1 \cap S_2 \neq \varnothing$, *i.e, les solutions hermitiennes à moindres carrés coincident avec les solutions hermitiennes à rang minimal.*

b) $S_1 \subseteq S_2$, *i.e, toutes les solutions hermitiennes à moindres carrés sont des solutions hermitiennes à rang minimal de l'équation matricielle $AXA^* = B$.*

c)
$$r\begin{bmatrix} B & BA & A \\ A^*B & 0 & 0 \\ A^* & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2(A) + 2r\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} - r\begin{bmatrix} B & A \\ A^* & 0 \end{bmatrix}.$$

d)
$$r\begin{bmatrix} E_ABE_A & E_ABA \\ A^*BE_A & 0 \end{bmatrix} = 2r\begin{bmatrix} E_ABE_A & E_ABA \end{bmatrix} - r(E_ABE_A).$$

Théorème 1.5.2 *[20]*

Soient S_1et S_2 indiqués dans (1.13) et (1.14). Alors les proprietés suivantes sont équivalentes

a) $S_1 \supseteq S_2$, *i.e, toutes les solutions hermitiennes à rang minimal sont des solutions hermitiennes à moindres carrés de l'équation matricielle $AXA^* = B$.*

b)
$$r\begin{bmatrix} A & BA & A \\ A^*B & 0 & 0 \\ A^* & 0 & 0 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} B & A \\ A^* & 0 \end{bmatrix}.$$

c)
$$r\begin{bmatrix} E_ABE_A & E_ABA \\ A^*BE_A & 0 \end{bmatrix} = r(E_ABE_A).$$

Relations entre les solutions de deux équations matricielles hermitiennes

Considérons la paire d'équations matricielles suivantes :

$$A_1X_1A_1^* = C_1. \quad \text{et} \quad A_2X_2A_2^* = C_2. \tag{1.15}$$

Où $A_j \in \mathbb{C}^{m_j \times n}$ et $C_j \in \mathbb{C}_H^{m_j \times m_j}$ sont donnés , $j = 1, 2$.

Théorème 1.5.3 *([13] , [18]) Supposons qu'il existe deux matrices hermitiennes X_1 et X_2 telles que (1.15) est satisfaite, et soit*

$$S_j = \left\{ X_j \in \mathbb{C}_H^{n \times n} | \ A_j X_j A_j^* = C_{j.} \right\}, j = 1, 2.$$

Et

$$M = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & A_1 \\ 0 & -C_2 & A_2 \\ A_1^* & A_1^* & 0 \end{bmatrix}$$

Alors ,

a) $\max\limits_{X_1 \in S_1, X_2 \in S_2} r(X - X_2) = \{n, r(M) + 2n - 2r(A_1) - 2r(A_2)\}$.

b) $\min\limits_{X_1 \in S_1, X_2 \in S_2} r(X - X_2) = r(M) - 2r \begin{bmatrix} A_1^* & A_2^* \end{bmatrix}$.

c) $\max\limits_{X_1 \in S_1, X_2 \in S_2} i_\pm(X_1 - X_2) = i \pm (M) + n - r(A_1) - r(A_2)$.

d) $\min\limits_{X_1 \in S_1, X_2 \in S_2} i_\pm(X_1 - X_2) = i \pm (M) - r \begin{bmatrix} A_1^* & A_2^* \end{bmatrix}$.

Par concequence,

a) Il existe deux solutions hermitiennes X_1 et X_2 de (1.15) telle que $X_1 - X_2$ est non singulière si et seulement si

$$r(M) \geq 2r(A_1) + 2r(A_2) - n.$$

b) $X_1 - X_2$ est non singulière pour tout deux matrices X_1 et X_2 de (1.15) si et seleument si

$$r(M) = 2r \begin{bmatrix} A_1^* & A_2^* \end{bmatrix} + n.$$

c) L'équation (1.15) a une solution hermitienne commune si et seulement si

$$R(C_j) \subseteq R(A_j).,j = 1, 2.$$

Et

$$r(M) = 2r \begin{bmatrix} A_1^* & A_2^* \end{bmatrix}$$

d) Il existe deux solutions hermitiennes X_1 et X_2 de (1.15) telles que $X_1 > X_2$ ($X_1 < X_2$) si t seulement si

$$i_+(M) = r(A_1) + r(A_2).$$
$$i_-(M) = r(A_1) + r(A_2).$$

e) $X_1 > X_2$ ($X_1 < X_2$) pour tout deux matrices X_1 et X_2 de (1.15) si t seulement si

$$i_+(M) = r \begin{bmatrix} A_1^* & A_2^* \end{bmatrix} + n.$$
$$i_-(M) = r \begin{bmatrix} A_1^* & A_2^* \end{bmatrix} + n.$$

f) Il existe deux solutions hermitiennes X_1 et X_2 de (1.15) telles que $X_1 \geq X_2$ $(X_1 \leq X_2)$ si t seulement si

$$i_-(M) = r \begin{bmatrix} A_1^* & A_2^* \end{bmatrix}.$$
$$i_+(M) = r \begin{bmatrix} A_1^* & A_2^* \end{bmatrix}.$$

g) $X_1 \geq X_2$ $(X_1 \leq X_2)$ pour tout deux matrices X_1 et X_2 de (1.15) si t seulement si

$$i_-(M) = r(A_1) + r(A_2) - n.$$
$$i_+(M) = r(A_1) + r(A_2) - n.$$

h) $i_+(X_1 - X_2)$ est invariant (non singulière) pour les deux matrices X_1 et X_2 de (1.15) si t seulement si ,$i_-(X_1 - X_2)$ est invariant pour les deux matrices X_1 et X_2 de (1.15) si et seulement si

$$r(A_1) = r(A_2) = n.$$

CHAPITRE 2

RANG MAXIMAL ET MINIMAL D'UNE SOLUTION DE L'ÉQUATION MATRICIELLE AXB=C

2.1 Introduction

Tout au long de ce chapitre, $\mathbb{C}^{m\times n}$ désigne l'ensemble de toutes les $m\times n$ matrices complexes. Pour toute $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, les symboles $A^*, A^T, r\left(A\right), A^{(1)}$ et $R\left(A\right)$ représentent l'adjoint, le transposé, le rang, l'inverse généralisé et l'image de A, respectivement , E_A et F_A représentent les deux projecteurs orthogonaux $E_A = I_m - AA^{(1)}$ et $F_A = I_n - A^{(1)}A$ induits par A.

Considérons l'équation matricielle linéaire

$$AXB = C, \tag{2.1}$$

où $A \in \mathbb{C}^{m\times p}$, $B \in \mathbb{C}^{q\times n}$, $C \in \mathbb{C}^{m\times n}$ sont données et $X \in \mathbb{C}^{p\times q}$ est une matrice inconnue.

L'équation (2.1) est l'une des équations matricielles les plus connues dans la théorie des matrices et ses applications. Beaucoup de résultats ont été obtenus sur la résolution des problèmes de minimisation de rang, associés aux équations matricielles et de leurs solutions.

Dans ce chapitre Nous allons donner des formules pour les rangs minimaux et maximaux des sous-matrices dans une solution X de (2.1) par la méthode de rang d'une matrice. Particulièrement nous conduisons des conditions nécessaires et suffisantes pour que l'équation $AXB = C$ admet une solution rèelle, admet seulement des solution rèelles, admet une solution imaginaire pure, admet seulement des solutions imaginaire pure.

Pour plus de commodité, nous avons besoin de ces lemmes.

Lemme 2.1.1 *[9] soient $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$,$B \in \mathbb{C}^{m\times k}$ et $C \in \mathbb{C}^{l\times n}$. Alors,*

a) $r\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} = r(A) + r(E_A B) = r(B) + r(E_B A)$

b) $r\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} = r(A) + r(CF_A) = r(C) + r(AF_C)$

c) $r\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = r(B) + r(C) + r(E_B A F_C)$

d) $r\begin{bmatrix} A & BF_P \\ E_Q C & 0 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} A & B & 0 \\ C & 0 & Q \\ 0 & P & 0 \end{bmatrix} - r(P) - r(Q),$

Lemme 2.1.2 *[17] Soient $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$,$B \in \mathbb{C}^{m\times p}$ et $C \in \mathbb{C}^{q\times n}$ sont données, $X \in \mathbb{C}^{p\times q}$,$Y \in \mathbb{C}^{p\times n}$,$Z \in \mathbb{C}^{m\times q}$ sont des matrices inconnues. Alors*

$$\max_X r(A - BXC) = \min\left\{ r\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}, r\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} \right\}. \tag{2.2}$$

$$\min_X r(A - BXC) = r\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} - r\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.3}$$

$$\max_{Y,Z} r(A - BY - ZC) = \min\left\{ m, n, r\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} \right\}. \tag{2.4}$$

$$\min_{Y,Z} r(A - BY - ZC) = r\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} - r(B) - r(C). \tag{2.5}$$

les équations (2.3) *et* (2.2) sont démontrés dans [23], les équations (2.5) *et* (2.4) sont démontrés dans [16] ;[21]

Lemme 2.1.3 *[16] soient $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$,$B_1 \in \mathbb{C}^{m\times p_1}$,$B_2 \in C^{m\times p_2}$,$C_1 \in \mathbb{C}^{q_1\times n}$ et $C_2 \in \mathbb{C}^{q_2\times n}$ sont données, tels que $R(B_1) \subseteq R(B_2)$ et $R(C_2^*) \subseteq R(C_1^*)$. si*

$$\max_{X_1,X_2} r(A - B_1X_1C_1 - B_2X_2C_2) = \min\left\{ r\begin{bmatrix} A & B_2 \end{bmatrix}, r\begin{bmatrix} A \\ C_1 \end{bmatrix}, r\begin{bmatrix} A & B_1 \\ C_2 & 0 \end{bmatrix} \right\} \tag{2.6}$$

$$\min_{X_1,X_2} r(A - B_1X_1C_1 - B_2X_2C_2)$$

$$= r\begin{bmatrix} A & B_2 \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} A \\ C_1 \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} A & B_1 \\ C_2 & 0 \end{bmatrix} - r\begin{bmatrix} A & B_1 \\ C_1 & 0 \end{bmatrix} - r\begin{bmatrix} A & B_2 \\ C_2 & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.7}$$

Lemme 2.1.4 *[17] L'équation matriciélle (2.1) consistente dans $\mathbb{C}$ si et seulement si l'équation matrciélle*

$$\begin{bmatrix} A_0 & -A_1 \\ A_1 & A_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_3 & Y_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_0 & -B_1 \\ B_1 & B_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_0 & -C_1 \\ C_1 & C_0 \end{bmatrix} \tag{2.8}$$

est consistente sur $\mathbb{R}$, la solution générale de (2.1) est ecris sous la forme

$$X = X_0 + iX_1 = \frac{1}{2}(Y_1 + Y_4) + \frac{1}{2}(Y_3 - Y_2) \tag{2.9}$$

où $Y_1, ..., Y_4$ sont des solutions génerals de (2.8) sur $\mathbb{R}$.

X_0 et X_1 dans (2.9) sont :

$$X_0 = \frac{1}{2}P_1\phi^{(1)}(A)\phi(C)\phi^{(1)}(B)Q_1 + \frac{1}{2}P_2\phi^{(1)}(A)\phi(C)\phi^{(1)}(B)Q_2 + \begin{bmatrix} P_1F_\phi(A) & P_2F_\phi(A) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_\phi(B)Q_2 \\ E\phi(B)Q_2 \end{bmatrix}. \tag{2.10}$$

$$X_1 = \frac{1}{2}P_2\phi^{(1)}(A)\phi(C)\phi^{(1)}(B)Q_1 - \frac{1}{2}P_1\phi^{(1)}(A)\phi(C)\phi^{(1)}(B)Q_2 + \begin{bmatrix} P_2F_\phi(A)1 - P_1F_\phi(A) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -E_\phi(B)Q_2 \\ E_\phi(B)Q_1 \end{bmatrix} \tag{2.11}$$

Oú :

$$\phi(M) = \phi(M_0 + iM_1) = \begin{bmatrix} M_0 & -M_1 \\ M_1 & M_0 \end{bmatrix}, M = A, B, C$$

tel que $\phi(M)$ est la representation réelle de M

$$P_1 = \begin{bmatrix} I_p & 0 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 0 & I_p \end{bmatrix}, Q_1 = \begin{bmatrix} I_q \\ 0 \end{bmatrix}, Q_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ I_q \end{bmatrix}$$

. V_1,V_2,W_1 et W_2 sont arbitraires.

Preuve 2.1.1 *On vérifier pour une matrice complexe $M = M_0 + iM_1 \in \mathbb{C}^{m\times n}$*

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} I_m & iI_m \\ -iI_m & -I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0 + iM_1 & 0 \\ 0 & M_0 - iM_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & iI_n \\ -iI_n & -I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_0 & -M_1 \\ M_1 & M_0 \end{bmatrix} = \phi(M) \tag{2.12}$$

oú $\phi(.)$ satisfie les proprietés suivantes :

I . $M = N \Longleftrightarrow \phi(M) = \phi(N)$

II . $\phi(M+N) = \phi(M) + \phi(N), \phi(MN) + \phi(M)\phi(N), \phi(kM) = K\phi(M), k \in \mathbb{R}$

III .$\phi(M) = K_{2m}\phi(M)K_{2n}^{-1}$, *si et seulement si* $K_2t = \begin{bmatrix} 0 & I_t \\ -I_t & 0 \end{bmatrix}, t = m, n.$

IV . $r[\phi(M)] = 2r(M)$

on suppose que l'équation (2.1) a solution X dans $\mathbb{C}$. on applique les proprietés (II) (I) à l'equation (2.1) alors

$$\phi(A)\phi(X)\phi(B) = \phi(C)$$

ce qui implique que $\phi(X)$ est une solution de (2.8).

Inversement, on suppose que l'équation (2.9) a une solution

$$\hat{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_3 & Y_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2p\times 2q}, ssi\ \phi(A)\hat{Y}\phi(B) = \phi(C).$$

donc on applique la proprieté (III) on trouve

$$K_{2m}\phi(A)K_{2p}^{-1}\hat{Y}K_{2p}\phi(B)K_{2n}^{-1} = K_{2m}\phi(C)K_{2n}^{-1}$$

donc

$$\phi(A)(K_{2p}^{-1}\hat{Y}K_{2p})\phi(B) = \phi(C)$$

ce qui implique que $K_{2p}^{-1}\hat{Y}K_{2p}$ est une solution de l'équation (2.8), donc $(\frac{1}{2})(\hat{Y} + K_{2p}\hat{Y}K_{2q})$ est une solution de (2.8), où

$$\hat{Y} + K_{2p}^{-1}\hat{Y}K_{2q} = \begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_3 & Y_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y_4 & -Y_3 \\ -Y_2 & Y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_1 + Y_4 & -(Y_3 - Y_2) \\ Y_3 - Y_2 & Y_1 + Y_4 \end{bmatrix}.$$

soit $\hat{X} = \frac{1}{2}(Y_1 + Y_4) + (\frac{i}{2}(Y_3 - Y_2)$ alors $\phi(\hat{X}) = (\frac{1}{2})(\hat{Y} + K_{2q}^{-1}\hat{Y}K_{2q})$ est une solution de l'équation (2.8) ,donc par la proprieté (I) on a $\hat{X}$ est une solution de l'équation (2.1) d'aprés ci-dessus les équations (2.1) et (2.8) ont les même conditions de consistence et ses solutions satisfaisont l'équation (2.9) nous observons que $Y_1, .., Y_4$ dans l'équation (2.8) pouvent écrit saus la forme

$$Y_1 = P_1YQ_1, Y_2 = P_1YQ_2, Y_3 = P_2YQ_1, Y_4 = P_2YQ_2$$

Oú $Y = \begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_3 & Y_4 \end{bmatrix}$, et la solution général de l'équation (2.8) est écrit saus la forme

$$Y = \phi^{(1)}(A)\phi(C)\phi^{(1)}(B) + 2F_\phi(A)\begin{bmatrix} V_1 & V_2 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \end{bmatrix} E_\phi(B)$$

Oú V_1,$V_2 \in \mathbb{C}^{2p\times q}$ et W_1,$W_2 \in \mathbb{C}^{p\times 2q}$ sont arbitraire donc :

$$Y_1 = P_1YQ_1 = P_1\phi^{(1)}(A)\phi(C)\phi^{(1)}(B)Q_1 + 2P_1F_\phi(A)V_1 + 2W_1E_\phi(B)Q_1,$$
$$Y_2 = P_1YQ_2 = P_1\phi^{(1)}(A)\phi(C)\phi^{(1)}(B)Q_2 + 2P_1F_\phi(A)V_2 + 2W_1E_\phi(B)Q_2,$$
$$Y_3 = P_2YQ_1 = P_2\phi^{(1)}(A)\phi(C)\phi^{(1)}(B)Q_1 + 2P_2F_\phi(A)V_1 + 2W_2E_\phi(B)Q_1,$$
$$Y_4 = P_2YQ_2 = P_2\phi^{(1)}(A)\phi(C)\phi^{(1)}(B)Q_2 + 2P_2F_\phi(A)V_2 + 2W_2E_\phi(B)Q_2,$$

Par la substitutions dans l'équation (2.9) on obtient les deux matrices X_0 et X_1 dans les l'équations (2.10) et (2.11)

2.2 Rang de la solution de l'equation AXB=C

Théorème 2.2.1 *[17] On suppose que l'equation matricielle (2.1) est consistente. alors le rang maximale et le rang minimale de la solution X de l'équation (2.1) sont :*

$$\max_{AXB=C} r(X) = \min\{p, q, p+q+r(C)-r(A)-r(B)\} \tag{2.13}$$

$$\min_{AXB=C} r(X) = r(C) \tag{2.14}$$

Preuve 2.2.1 *On applique les équations (2.4) et (2.5) à la solution génerale*
$X = A^{(1)}CB^{(1)} + (I_p - A^{(1)}A)V + W(I_q - BB^{(1)})$ *de l'équation (2.1) on obtient :*

$$\begin{aligned}\max_{AXB=C} r(X) &= \max_{V,W} r(A^{(1)}CB^{(1)} + F_AV + WE_B) \\ &= \min\left\{p, q, r\begin{bmatrix} A^{(1)}CB^{(1)} & F_A \\ E_B & 0 \end{bmatrix}\right\}\end{aligned} \tag{2.15}$$

$$\begin{aligned}\min_{AXB=C} r(X) &= \min_{V,W} r(A^{(1)}CB^{(1)} + F_AV + WE_B) \\ &= r\begin{bmatrix} A^{(1)}CB^{(1)} & F_A \\ E_B & 0 \end{bmatrix} - r(F_A) - r(E_B)\end{aligned} \tag{2.16}$$

Par le lemme (2.1.1) particulièrement par (a), (b) on a $r(F_A) = p - r(A)$,$r(E_B) = q - r(B)$,et $AA^{(1)}C = C$ est $CB^{(1)}B = C$ lorsque l'equation (2.1) est consistente ,par le lemme (2.1.1 (c)) et les opérations élémentaires sur les matrices en blocs (EBMO) on obtient

$$\begin{aligned} r\begin{bmatrix} A^{(1)}CB^{(1)} & F_A \\ E_B & 0 \end{bmatrix} &= r\begin{bmatrix} A^{(1)}CB^{(1)} & I_p & 0 \\ I_q & 0 & B \\ 0 & A & 0 \end{bmatrix} - r(A) - r(B) \\ &= r\begin{bmatrix} 0 & I_p & 0 \\ I_q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix} - r(A) - r(B) \\ &= p + q + r(C) - r(A) - r(B). \end{aligned}$$

par la substitution dans (2.15) et (2.16) on trouve (2.13) et (2.14).

Théorème 2.2.2 *[17] On suppose que l'equation matricielle (2.1) est consistente ,on note*

$$S_0 = \left\{X_0 \in \mathrm{R}^{p\times q} \mid A(X_0 + iX_1)B = C\right\}, \tag{2.17}$$

$$S_1 = \left\{X_1 \in \mathrm{R}^{p\times q} \mid A(X_0 + iX_1)B = C\right\} \tag{2.18}$$

a) le rang maximale et le rang minimale de la matrice réelle X_0 dans la solution $X = X_0 + iX_1$ de l'équation

(2.1) sont donnés par :

$$\max_{X_0 \in S_0} r(X_0) = \min \left\{ p, q, p+q+r \begin{bmatrix} C_0 & -C_1 & A_0 \\ C_1 & C_0 & A_1 \\ B_0 & -B_1 & 0 \end{bmatrix} - 2r(A) - 2r(B) \right\} \tag{2.19}$$

$$\min_{X_0 \in S_0} r(X_0) = r \begin{bmatrix} C_0 & -C_1 & A_0 \\ C_1 & C_0 & A_1 \\ B_0 & -B_1 & 0 \end{bmatrix} - r \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \end{bmatrix} - r \begin{bmatrix} B_0 & B_1 \end{bmatrix} \tag{2.20}$$

b) le rang maximale et le rang minimale de la matrice réelle X_1 dans la solution $X = X_0 + iX_1$ de l'equation (2.1) sont donnés par :

$$\max_{X_1 \in S_1} r(X_1) = \min \left\{ p, q, p+q+r \begin{bmatrix} C_0 & -C_1 & A_0 \\ C_1 & C_0 & A_1 \\ B_0 & B_1 & 0 \end{bmatrix} - 2r(A) - 2r(B) \right\} \tag{2.21}$$

$$\min_{X_1 \in S_1} r(X_1) = r \begin{bmatrix} C_0 & -C_1 & A_0 \\ C_1 & C_0 & A_1 \\ B_0 & B_1 & 0 \end{bmatrix} - r \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \end{bmatrix} - r \begin{bmatrix} B_0 & B_1 \end{bmatrix} \tag{2.22}$$

Preuve 2.2.2 *on applique les deux equations (2.4) et (2.5) a X_0 dans l'équation (2.10) on obtient,*

$$\max_{X_0 \in S_0} r(X_0) = \min \{p, q, r(M)\},$$

$$\min_{X_0 \in S_0} r(X_0) = r(M) - r \begin{bmatrix} P_1 F_\phi(A) & P_2 F_\phi(A) \end{bmatrix} - r \begin{bmatrix} E_\phi(B) Q_1 \\ E_\phi(B) Q_2 \end{bmatrix}$$

où

$$M = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} P_1 \phi^{(1)}(A) \phi(C) \phi^{(1)}(B) Q_1 & P_1 F_\phi(A) & P_2 F_\phi(A) \\ E_\phi(B) Q_1 & 0 & 0 \\ E_\phi(B) Q_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

notons que $\phi(A)\phi^{(1)}(A)\phi(C) = \phi(C)$ et $\phi(C)\phi^{(1)}(B)\phi(B) = \phi(C)$,par le lemme (2.1.1) ,et les opérations *élémentaires sur les matrices en blocs on a :*

$$r(M) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}P_1\phi^{(1)}(A)\phi(C)\phi^{(1)}(B)Q_1 & P_1 & P_2 & 0 & 0 \\ Q_1 & 0 & 0 & \phi(B) & 0 \\ Q_2 & 0 & 0 & 0 & \phi(B) \\ 0 & \phi(A) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \phi(A) & 0 & 0 \end{bmatrix} - 2r\left[\phi(A)\right] - 2r\left[\phi(B)\right]$$

$$= r\begin{bmatrix} 0 & P_1 & P_2 & 0 & 0 \\ Q_1 & 0 & 0 & \phi(B) & 0 \\ Q_2 & 0 & 0 & 0 & \phi(B) \\ 0 & \phi(A) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \phi(A) & 0 & \phi(C) \end{bmatrix} - 2r\left[\phi(A)\right] - 2r\left[\phi(B)\right]$$

$$= r\begin{bmatrix} 0 & B_0 & -B_1 \\ A_0 & C_0 & -C_1 \\ A_1 & C_1 & C_0 \end{bmatrix} - r\left[\phi(A)\right] - r\left[\phi(B)\right] + p + q$$

$$= r\begin{bmatrix} C_0 & -C_1 & A_0 \\ C_1 & C_0 & A_1 \\ B_0 & -B_1 & 0 \end{bmatrix} - 2r(A) - 2r(B) + p + q,$$

$$
\begin{aligned}
r\begin{bmatrix} P_1F_\phi(A) & P_2F_\phi(A)\end{bmatrix} &= r\begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ \phi(A) & 0 \\ 0 & \phi(A)\end{bmatrix} - 2r\left[\phi(A)\right] \\
&= r\begin{bmatrix} -A_1 & 0 & -A_0 \\ A_0 & 0 & -A_1 \\ 0 & A_0 & -A_1 \\ 0 & A_1 & A_0 \end{bmatrix} - 2r\left[\phi(A)\right] + P \\
&= r\begin{bmatrix} -A_1 & -A_1 & -A_0 \\ A_0 & A_0 & -A_1 \\ 0 & A_0 & -A_1 \\ 0 & A_1 & A_0 \end{bmatrix} - 2r\left[\phi(A)\right] + p \\
&= r\begin{bmatrix} -A_1 & 0 & 0 \\ A_0 & 0 & 0 \\ 0 & A_0 & -A_1 \\ 0 & A_1 & A_0 \end{bmatrix} - 2r\left[\phi(A)\right] + p \\
&= r\begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \end{bmatrix} - r\left[\phi(A)\right] + p = r\begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \end{bmatrix} - 2r(A) + p, \\
r\begin{bmatrix} E_\phi(B)Q_1 \\ E_\phi(B)Q_2 \end{bmatrix} &= r\begin{bmatrix} \phi(B) & 0 & Q_1 \\ 0 & \phi(B) & Q_2 \end{bmatrix} - 2r\left[\phi(B)\right] \\
&= r\begin{bmatrix} B_1 & B_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_0 & -B_1 \\ -B_0 & B_1 & B_1 & B_0 \end{bmatrix} - 2r\left[\phi(B)\right] + q \\
&= r\begin{bmatrix} B_1 & B_0 & 0 & 0 \\ B_1 & B_0 & B_0 & -B_1 \\ -B_0 & B_1 & B_1 & B_0 \end{bmatrix} - 2r\left[\phi(B)\right] + q \\
&= r\begin{bmatrix} B_1 & B_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_0 & -B_1 \\ 0 & 0 & B_1 & B_0 \end{bmatrix} - 2r\left[\phi(B)\right] + q \\
&= r\begin{bmatrix} B_0 & B_1 \end{bmatrix} - r\left[\phi(B)\right] + q = r\begin{bmatrix} B_0 & B_1 \end{bmatrix} - 2r(B) + q.
\end{aligned}
$$

par la substitution on trouve (2.19) et (2.20). de meme on applique (2.4)et (2.5) dans l'expression générale de X_1 *de l'éqautions (2.11) on obtient les éqautions (2.21)et (2.22).*

Corollaire 2.2.1 *[17] On suppose que l'équation matricielle (2.1) est consistente, alors* *a) L'équation $AXB = C$ (2.1) admet une solution réelle , si et suelement si*

$$r\begin{bmatrix} C_0 & -C_1 & A_0 \\ C_1 & C_0 & A_1 \\ B_0 & B_1 & 0 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} B_0 & B_1 \end{bmatrix} \tag{2.23}$$

b) Toutes les solution de l'équation (2.1) sont réelles, si et suelement si

$$r\begin{bmatrix} C_0 & -C_1 & A_0 \\ C_1 & C_0 & A_1 \\ B_0 & B_1 & 0 \end{bmatrix} = 2r(A) + 2r(B) - p - q \tag{2.24}$$

ou équivalentes à

$$r(A) = p, r(B) = q \ et \ r\begin{bmatrix} C_0 & -C_1 & A_0 \\ C_1 & C_0 & A_1 \\ B_0 & B_1 & 0 \end{bmatrix} = p + q \tag{2.25}$$

c) L'équation (2.1) admet une solution imaginaire pure $X = iX$, où $X_1 \in$ R, si et suelement si

$$r\begin{bmatrix} C_0 & -C_1 & A_0 \\ C_1 & C_0 & A_1 \\ B_0 & -B_1 & 0 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} B_0 & B_1 \end{bmatrix}. \tag{2.26}$$

d) Toutes les solution de l'équation (2.1) sont imaginaires pures, si et suelement si

$$r\begin{bmatrix} C_0 & -C_1 & A_0 \\ C_1 & C_0 & A_1 \\ B_0 & -B_1 & 0 \end{bmatrix} = 2r(A) + 2r(B) - p - q \tag{2.27}$$

ou équivalentes à

$$r(A) = p, r(B) = q, et \ r\begin{bmatrix} C_0 & -C_1 & A_0 \\ C_1 & C_0 & A_1 \\ B_0 & -B_1 & 0 \end{bmatrix} = p + q \tag{2.28}$$

CHAPITRE 3

APPLICATIONS AUX INVERSES GÉNÉRALISÉS

3.1 Introduction

Rappelons que l'inverse généralisé d'une matrice quelconque $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, est toute matrice $X \in \mathbb{C}^{n\times m}$ vérifie

$$AXA = A$$

Cette matrice X est noté par $A^{(1)}$

Soient $N = A + iB \in \mathbb{C}^{m\times n}$, où $A,\ B \in \mathbb{R}^{m\times n}$, et on note son inverse généralisé par

$$(A + iB)^{(1)} = C + iD \tag{3.1}$$

où $C,\ D \in \mathbb{R}^{n\times m}$

Vue à l'interet des inverses généralisés dans la résolution des systèmes linéaires inconsistentes, et pour les matrices rectangulaires ou singulières. Dans ce chapitre on va pratiquer les résultats obtenues dans le chapitre précédent afin d'obtenir les conditions nécéssaires et suffisantes pour n'importe quelle matrice complexe N admet un inverse généralisé réel, un inverse généralisé imaginaire pure. pour cela on va calculer le rang maximal et minimal des deux matrices réelles C et D, pour connaitre la relation entre $A^{(1)}$ et C, entre $B^{(1)}$ et D.

3.2 Rang maximal et minimal des matrices C et D dans $(A + iB)^{(1)} = C + iD$

Théorème 3.2.1 *[17] Soit $N = A + iB \in \mathbb{C}^{m\times n}$, on note par*

$$T_1 = \left\{C \in \mathbb{R}^{n\times m} \mid C + iD \in \left\{N^{(1)}\right\}\right\} \tag{3.2}$$

$$T_2 = \left\{D \in \mathbb{R}^{n\times m} \mid C + iD \in \left\{N^{(1)}\right\}\right\} \tag{3.3}$$

a) le rang maximale et minimale de C dans l'équations (3.1) sont :

$$\max_{C\in T_1} r(C) = \min\left\{m, n, m+n+r(A) - r\begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix}\right\}$$

$$\min_{C\in T_1} r(C) = r\begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix} - r\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} - r\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} + r(A)$$

b) le rang maximale et minimale de D dans l'équation (3.1) sont :

$$\max_{D\in T_2} r(D) = \min\left\{m, n, m+n+r(B) - r\begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix}\right\}$$

$$\min_{D\in T_2} r(D) = r\begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix} - r\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} - r\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} + r(B)$$

c) si $A = 0$

$$\max_{C\in T_1} r(C) = \min\{m, n, m+n-2r(B)\}$$

d) si $B = 0$

$$\max_{D\in T_2} r(D) = \min\{m, n, m+n-2r(A)\}$$

e) si $\mathrm{R}(A) \subseteq \mathrm{R}(N)$ et $\mathrm{R}(A^*) \subseteq \mathrm{R}(N^*)$ alors

$$\min_{C\in T_1} r(C) = r(A), \min_{D\in T_2} r(D) = r(B)$$

Preuve 3.2.1 *On remplace les matrices A, B, C par la matrice $N = A+iB$ dans le théoréme (2.2.2), donc on trouve l'équation matricielle $NXN = N$, alors X est l'inverse généralisé de la matrice N donc on applique les formulles (2.19) et (2.20) ,(2.21) et (2.22) respectivement, pour obtenir $r(X_0)$, $r(X_1)$. Mais ici $r(X_0) = r(C)$ $r(X_1) = r(D)$ car $N^{(1)} = (A+iB)$ alors d'aprés (2.19) et (2.20) on a :*

$$\max r(C) = \min\left\{m, n, m+n+r\begin{bmatrix} A & -B & A \\ B & A & B \\ A & -B & 0 \end{bmatrix} - 4r(N)\right\}$$

$$\min r(C) = r\begin{bmatrix} A & -B & A \\ B & A & B \\ A & -B & 0 \end{bmatrix} - r\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} - r\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}$$

on simplifie :

$$r\begin{bmatrix} A & -B & A \\ B & A & B \\ A & -B & 0 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} A & -B & 0 \\ B & A & 0 \\ A & -B & A \end{bmatrix}_{c_3\longrightarrow c_1-c_3} = r\begin{bmatrix} A & -B & 0 \\ B & A & 0 \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix}_{l_3\longrightarrow l_3-l_1} = r\begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix} + r(A)$$

et on a :

$4r(N) = 2r[\phi(N)] = 2r \begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix}$

donc par la substitution dans $\max r(C)$ *et* $\min r(C)$ *on trouve :*

$$\max_{C\in T_1} r(C) = \min \left\{ m, n, m+n+r(A) - r \begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix} \right\}$$

$$\min_{C\in T_1} r(C) = r \begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix} + r(A) - r \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} - r \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}$$

de mème on applique (2.21)et (2.22) pour obtenir $\max(D)$ *et* $\min(D)$

Corollaire 3.2.1 *[17] Soit* $N = A + iB \in \mathbb{C}^{m\times n}$ *,*T_1 *et* T_2*, sont dèfinis par (3.2) et (3.3)*

a) N admet un inverse généralisé réel si et seulement si

$$r \begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} + r \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} - r\,(B)$$

b) N admet un inverse généralisé imaginaire pure si et seulement si

$$r \begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} + r \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} - r\,(A)$$

Preuve 3.2.2 *C'est un résultat direct du Théorème (3.2.1)*

3.3 Examples

Example 3.3.1 *On considère l'equation matricielle suivante* $AXB = C$

Oú $A = \begin{bmatrix} i & 2i & -3 \\ 1 & 2 & 3i \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2i \\ -i & 2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} -5+4i & -8-10i \\ 4+5i & -10+8i \end{bmatrix}$

avec $r(A) = 1$, $r(B) = 1$, $r(C) = 1$

Pour déterminer l'inverse généralisé de A on va resoudre le système:

$$\begin{bmatrix} i & 2i & -3 \\ 1 & 2 & 3i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & \theta \\ \alpha & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & 2i & -3 \\ 1 & 2 & 3i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i & 2i & -3 \\ 1 & 2 & 3i \end{bmatrix}$$

alors on trouve: $\begin{cases} x = -2z - 3\beta \\ y = 1 + 3\alpha - 2\theta \end{cases}$

Si on choisie $\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = i \\ z = -i \\ \theta = 0 \end{cases}$

on trouve un inverse généralisé de A :

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} -i & 4 \\ -i & 0 \\ 1 & i \end{bmatrix}$$

$$F_A = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -i & 4 \\ -i & 0 \\ 1 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & 2i & -3 \\ 1 & 2 & 3i \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -4 & -10 & -15i \\ -1 & -1 & -3i \\ -2i & -4i & 7 \end{bmatrix}$$

On choisie $U = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, *d'oú* $F_A U = \begin{bmatrix} -4 & -10 & -15i \\ -1 & -1 & -3i \\ -2i & -4i & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14 & -4-15i \\ -2 & -1-3i \\ -6i & 7-2i \end{bmatrix}$

Mème pour la matrice $B = \begin{bmatrix} 1 & 2i \\ -i & 2 \end{bmatrix}$, *on resoudre le système ci dessous pour déterminne* $B^{(1)}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2i \\ -i & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2i \\ -i & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2i \\ -i & 2 \end{bmatrix}$$

donc on prend $B^{(1)} = \begin{bmatrix} 1-2i & 2 \\ 1 & i \end{bmatrix}$

$$E_B = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2i \\ -i & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-2i & 2 \\ 1 & i \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ i & 1 \end{bmatrix}$$

On choisie $W = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ *d'ou* $WE_B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ i & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i & 1 \\ i & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} X &= A^{(1)} C B^{(1)} + F_A U + W E_B \\ &= \begin{bmatrix} -i & 4 \\ -i & 0 \\ 1 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5+4i & -8-10i \\ 4+5i & -10+8i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-2i & 2 \\ 1 & i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -14 & -4-15i \\ -2 & -1-3i \\ -6i & 7-2i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i & 1 \\ i & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 6+26i & -3-15i \\ 2+6i & -3i \\ -10+2i & 7-2i \end{bmatrix} \end{aligned}$$

On remarque que la solution est complexe.

D'apres le corollaire (2.2.1)

a) L'équation matricielle $AXB = C$ admet une solution réelle seulement ssi :

$$r = \begin{bmatrix} C_0 & -C_1 & A_0 \\ C_1 & C_0 & A_1 \\ B_0 & B_1 & 0 \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_0 & B_1 \end{bmatrix}$$

$$\textit{dans notre exemple on a : } r = \begin{bmatrix} C_0 & -C_1 & A_0 \\ C_1 & C_0 & A_1 \\ B_0 & B_1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -8 & -4 & 10 & 0 & 0 & -3 & \\ 4 & -10 & -5 & -8 & 1 & 2 & 0 & \\ 4 & -10 & -5 & -8 & 1 & 2 & 0 & \\ 5 & 8 & 4 & -10 & 0 & 0 & 3 & \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 4$$

$$\textit{D'autre coté } r \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \end{bmatrix} + r \begin{bmatrix} B_0 & B_1 \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} + r \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} = 2 + 2 = 4$$

D'ou la condition est satisfaite ,donc l'équation $AXB = C$ admet des solution réelles seulement.

b) Toutes les solutions de l'équation $AXB = C$ sont réelles seulement ssi :

$$r \begin{bmatrix} C_0 & -C_1 & A_0 \\ C_1 & C_0 & A_1 \\ B_0 & B_1 & 0 \end{bmatrix} = 2r\,[A] + 2r\,[B] - p - q$$

$$\textit{On a } 2r\,[A] + 2r\,[B] - p - q = 2 + 2 - 3 - 2 = -1 \neq 4 = r \begin{bmatrix} C_0 & -C_1 & A_0 \\ C_1 & C_0 & A_1 \\ B_0 & B_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Donc les solutions de l'équation $AXB = C$ ne sont pas en tous, des réelles.

c) l'équation $AXB = C$ admet une solution imaginaire pure ssi :

$$r \begin{bmatrix} C_0 & -C_1 & A_0 \\ C_1 & C_0 & A_1 \\ B_0 & -B_1 & 0 \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \end{bmatrix} + r \begin{bmatrix} B_0 & B_1 \end{bmatrix}$$

On à :

$$r \begin{bmatrix} C_0 & -C_1 & A_0 \\ C_1 & C_0 & A_1 \\ B_0 & -B_1 & 0 \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} -5 & -8 & -4 & 10 & 0 & 0 & -3 \\ 4 & -10 & -5 & -8 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & -10 & -5 & -8 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & 8 & 4 & -10 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 4 = r \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \end{bmatrix} + r \begin{bmatrix} B_0 & B_1 \end{bmatrix}$$

alors l'équation $AXB = C$ admet des solutions imaginaires pures.

d) Toutes les solutions de l'équation $AXB = C$ sont imaginaires pures si

$$r\begin{bmatrix} C_0 & -C_1 & A_0 \\ C_1 & C_0 & A_1 \\ B_0 & -B_1 & A_0 \end{bmatrix} = 2r\,[A] + 2r\,[B] - p - q$$

On a :

$$r\begin{bmatrix} C_0 & -C_1 & A_0 \\ C_1 & C_0 & A_1 \\ B_0 & -B_1 & A_0 \end{bmatrix} = 4 \neq 2 + 2 - 3 - 3 = -1$$

Alors les solutions de l'équation $AXB = C$ ne sont pas en tous, imaginaires pures.

Conclusions : dans cet exemple l'équation $AXB = C$ admet des solutions complexes et des solutions réelles seulement est des solutions imaginaires pures.

Example 3.3.2 *dans cet exemple on va déterminer l'inverse généralisé des matrices réels C et$D$ dans $N^{(1)} = C + iD$*

soit la matrice

$$\begin{aligned} N &= \begin{bmatrix} i & 2i & -3 \\ 1 & 2 & 3i \end{bmatrix} = A + iB \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

on a calculé un inverse généralisé de cette matrice on a trouvé

$$\begin{aligned} N^{(1)} &= \begin{bmatrix} -i & 4 \\ -i & 0 \\ 1 & i \end{bmatrix} = C + iD \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

D'apres le corollaire (3.2.1)

a) N admet un inverse généralisé réel suelement ssi

$$r\begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} - r\,(B)$$

$$On\ a : r\begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = 2$$

$$r\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} - r(B) = r\begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} - r\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = 2+2-2 = 2$$

Donc la condition est satisfaite alors N admet un inverse généralisé réel suelement

b) N admet un inverse généralisé imaginaire pure ssi :

$$r\begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} - r(A)$$

$$On\ a\ r\begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix} = 2$$

D'autre coté on a :

$$r\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} - r(A) = r\begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} - r\begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = 2+2-2 = 2$$

D'où la matrice N admet un inverse généralisé imaginaire pure.

CONCLUSION

L'équation $AXB = C$ est l'une des équations matricielles la plus connues dans la théorie des matrices et ses applications. Pour cette importance, nous avons intéressé à calculer le rang maximal et minimal de les deux matrices réelles X_0 et X_1 dans une solution de cette équation. D'aprés ces formules de rang on conclut des propriétés sur ces deux matrices pour que l'équation $AXB = C$ admet une solution réelle, seulement des solutions reélles, solution imaginaire pure, seulement des solutions imaginaires hpures. D'autre coté cette étude nous permet de conduire les conditions nécéssaires et suffisantes pour les quelles un inverse généralisé d'une matrice complexe soit réel seulement ou imaginaire pure.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Ben-Israel and T. Greville. *Generalized inverses : theory and applications*, volume 15. Springer Science & Business Media, 2003.

[2] S.L.Campbell and C.D.Meyer. Generalized inverses of linear transformations (society for industrial and applied mathematics, 2009).

[3] J.François Durand. Éléments de calcul matriciel et d'analyse factorielle de données. *Cours polycopié, Département de Mathématiques, Université Montpellier II*, 2002.

[4] S. Karanasios and D. Pappas. Generalized inverses and special type operator algebras. *Facta Universitatis (NIS), Series Mathematics and Informatics*, 21 :2006,41–48.

[5] X. Liu and H.Yang. An expression of the general common least-squares solution to a pair of matrix equations with applications. *Computers & Mathematics with Applications*, 61(10) :2011,3071–3078.

[6] Y. Liu. Ranks of least squares solutions of the matrix equation $AXB = C$. *Computers & Mathematics with Applications*, 55(6) :2008,1270–1278.

[7] Y. Liu and Y. Tian. Extremal ranks of submatrices in an hermitian solution to the matrix equation $AXA^* = B$ with applications. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 32(2) :2010,289–301.

[8] Y. Liu, Y. Tian, and Y. Takane. Ranks of hermitian and skew-hermitian solutions to the matrix equation $AXA^* = B$. *Linear Algebra and its Applications*, 431(12) :2009,2359–2372.

[9] G. Matsaglia and G. PH Styan. Equalities and inequalities for ranks of matrices. *Linear and multilinear Algebra*, 2(3) :1974,269–292.

[10] S.Kumar Mitra. Common solutions to a pair of linear matrix equations $A_1XB_1 = C_1$ and $A_2XB_2 = C_2$. In *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, volume 74,1973, pages 213–216. Cambridge University Press.

[11] S.Kumar Mitra. A pair of simultaneous linear matrix equations $A_1XB_1 = C_1$, $A_2XB_2 = C_2$ and a matrix programming problem. *Linear Algebra and its Applications*, 131 :1990,107–123.

[12] A.Navarra, P.L.Odell, and D.Young. A representation of the general common solution to the matrix equations $A_1XB_1 = C_1$ and $A_2XB_2 = C_2$ with applications. *Computers & Mathematics with Applications*, 41(7-8) :2001,929–935.

[13] A.Bülent Özgüler and N. Akar. A common solution to a pair of linear matrix equations over a principal ideal domain. *Linear Algebra and its Applications*, 144 :85–99, 1991.

[14] R. Penrose. A generalized inverse for matrices. In *Mathematical proceedings of the Cambridge philosophical society*, volume 51,1955, pages 406–413. Cambridge University Press.

[15] P. Stanimirovic. G-inverses and canonical forms. *Facta universitatis (Niš). Ser. Math. Inform*, 15 :2000,1–14.

[16] Y. Tian. Upper and lower bounds for ranks of matrix expressions using generalized inverses. *Linear Algebra and its Applications*, 355(1-3) :2002,187–214.

[17] Y. Tian. Ranks of solutions of the matrix equation $AXB = C$. *Linear and multilinear Algebra*, 51(2) :2003,111–125.

[18] Y.Tian Maximization and minimization of the rank and inertia of the hermitian matrix expression $A - BX - (BX)^*$ with applications. *Linear algebra and its applications*, 434(10) :2109–2139, 2011.

[19] Y.Tian. Least-squares solutions and least-rank solutions of the matrix equation $AXA^* = B$ and their relations. *Numerical Linear Algebra with Applications*, 20(5) :2013,713–722.

[20] Y. Tian and S. Cheng. The maximal and minimal ranks of $A - BXC$ with applications. *New York J. Math*, 9 :2003,345–362.

[21] Y. Tian et al. The minimal rank of the matrix expression $A - BX - YC$. *Missouri Journal of Mathematical Sciences*, 14(1) :2002,40–48.

[22] Y. Tian and H. Wang. Relations between least-squares and least-rank solutions of the matrix equation $AXB = C$. *Applied Mathematics and Computation*, 219(20) :2013,10293–10301.

[23] F. Uhlig. On the matrix equation $AX = B$ with applications to the generators of a controllability matrix. *Linear Algebra and its Applications*, 85 :1987,203–209.

[24] M. Wei and Q. Wang. On rank-constrained hermitian nonnegative-definite least squares solutions to the matrix equation $AXA^* = B$. *International Journal of Computer Mathematics*, 84(6) :2007,945–952.

[25] X.Zhang and M. Cheng. The rank-constrained hermitian nonnegative-definite and positive-definite solutions to the matrix equation $AXA^* = B$. *Linear algebra and its applications*, 370 :2003,163–174.