الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
جامعة غرداية
Université de Ghardaïa
كلية العلوم والتكنولوجيا
Faculté des Sciences et de la Technologie
قسم: الرياضيات والإعلام الآلي
Département de Mathématiques et Informatiques

N° d'enregistrement
/…../…../…../…../…..

Mémoire

Pour l'obtention du diplôme de master

Domaine : Mathématiques et Informatiques
Filière : Mathématiques
Spécialité : Analyse Fonctionnelle et application

Thème : Explosion en temps fini de solutions d'une classe d'équations de la chaleur impliquant $p(x)$-Laplacien avec non-linéarité logarithmique

Par
Hadj smail GUEDDOUH

Examiner par le jury composé de :

Abdellatif Lalmi	M. A. A	Université de Ghardaïa	Encadreur
Abdelkrim Kina	M. C. B	Université de Ghardaïa	Examinateur 1
Yacine Hadj Moussa	M. A. A	Université de Ghardaïa	Examinateur 2

Année universitaire : 2020 / 2021

Dédicace

Je dédie ce travail
À Défunt Dr.Abdenour Lani
À mes parents.
À mes sœurs
À mes grand-parents
À toute ma famille.
À tous ceux qui m'ont enseigné
À tous mes amis.

Gueddouh Hadj Smail
Ghardaia 2021

Remerciement

Je remercier en premier lieu mon dieu **Allah** qui m'a donné la volonté et le courage pour la réalisation de ce travail.

Après je remercie mon encadreur Monsieur **Abdellatif Lalmi** , maitre assistant "A" à l'université de Ghardaia de m'avoir proposé ce sujet de recherche et de m'avoir guidé durant son suivi de ce travail tout au long de la préparation de ce mémoire.

Je tiens à remercier les membres de jury, Monsieur **Abdelkrim Kina** maître de conférences "B" à l'université de Ghardaia de m'avoir fait l'honneur de présider ce jury. Et Monsieur **Yacine Hadj Moussa** maître assistant "A" à l'université de Ghardaia de m'avoir fait l'honneur d'accepter de faire partie de ce jury. Qu'ils trouvent tous ici mon profond respect.

J'adresse mes vifs remerciements à Monsieur **Dr :Abdelouahab Chikh Salah**, pour l'intérêt qu'il m'a porté et sa disponibilité et ses encouragements.

Merci à tous ceux qui m'ont enseigné en primaire, collège, lycée, université et aussi ailleurs. Leurs critiques et leurs conseils m'ont été très précieux. Merci à tous les mathématiciens...

Merci mes amis, merci à tous ceux qui ont contribué de prés ou de loin dans ce travail

Enfin dois-je dire quel point mes parents sont aujourd'hui dans mes pensées ! Mes parents qui m'ont toujours soutenu dans mes épreuves aussi bien au niveau moral, que matériel. Je leur adresse aujourd'hui un témoignage d'amour, et de reconnaissance.

Gueddouh Hadj Smail
Ghardaia 2021

ملخص

في هذه المذكرة نهتم بالحلول الضعيفية (الغير كلاسيكية) لمعادلة الحرارة الغير خطية مقترنة بمؤثر لابلاصي في فضاء لوبيغ ذو الأس المتغير وذلك بإستخدام معادلات الطاقة و متراجحات سوبولاف اللوغاريتمية
وبذلك نتحصل على الزمن المحدود لإنفجار الحلول الضعيفة والشروط الكافية لحدوثه في هذا الزمن المحدود.

الكلمات المفتاحية: الزمن المحدود للإنفجار, اللوغاريتمات الغير خطية, معادلات الطاقة, الأس المتغير, الحلول الضعيفة.

Résumé

Dans ce travail, nous étudions un problème à valeur initiale de l'équation de la chaleur, impliquant $p(x)-$Laplacien avec une non-linéarité logarithmique. En utilisant la méthode du puits potentiel et l'inégalité logarithmique de Sobolev , nous obtenons le résultat d'explosion des solutions faibles et fournissons des conditions suffisantes pour le temps fini d'explosion des solutions faibles.

Mots clés: Explosion en temps fini, Logarithmique non linéarité, Puits potentielle, Exposant variable, Solution faible.

Abstract

In this work, we study an initial value problem of the heat equation involving $p(x)-$Laplacian with logarithmic nonlinearity. Using the potential well method and the logarithmic Sobolev inequality, we obtain the explosion result of weak solutions and provide sufficient conditions for the finite time explosion of weak solutions.

Keywords: Blow-up, Logarithmic non-linearity, Petential well, Variable exponent, Weak solution.

Table des matières

Notation

$\mathbb{R}^N$	$\{x = (x_1, x_2, \cdots, x_N), x_i \in \mathbb{R}\}$
$\Omega \subset \mathbb{R}^n$	Un ouvert
$\|\Omega\|$	Mesure de l'ensemble Ω
$\partial\Omega$	Frontière de Ω
$C^k(\Omega)$	Ensemble des fonctions k fois continument différentiable sur Ω (k entier ≥ 0)
$C(\bar{\Omega})$	Ensemble des fonctions continues sur $\bar{\Omega}$
$C_c(\Omega)$	Ensemble des fonctions continue à support compact sur Ω
E	Espace de Banach
E$'$	Espace dual de E
$\mathbf{B}(x_0; r) = x; \parallel x - x_0 \parallel < r$	Boule ouvert de centre x_0 et de rayon r
u_t	Dérivée partielle de u par rapport à t
u_x	Dérivée partielle de u par rapport à x
$\mathrm{D}^\alpha\varphi$	$\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_\mathrm{N}}}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\ldots\partial x_\mathrm{N}^{\alpha_\mathrm{N}}}\varphi$
$\mathcal{D}$	Ensemble des fonctions indéfiniment dérivables à support borné (fonctions tests)
$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_N}\right)$	$\operatorname{grad} u$
$\Delta u = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$	Laplacien de u
q	L'exposant conjugué de p
p_+	$p_+(\Omega)$: $\operatorname{esssup}_{x\in\Omega} p(x)$
p_-	$p_-(\Omega)$: $\operatorname{essinf}_{x\in\Omega} p(x)$
$\Omega_\infty^{p(\cdot)}$	$\{x \in \Omega : p(x) = \infty\}$
$\Omega_1^{p(\cdot)}$	$\{x \in \Omega : p(x) = 1\}$
$\Omega_*^{p(\cdot)}$	$\{x \in \Omega : 1 < p(x) < \infty\}$

Introduction

L'étude théorique et numérique des équations aux dérivés partielles (EDP) non linéaires du type évolution trouve son chemin prometteur et significatif parmi les branches des Mathématiques Appliquées.
Les applications de ce type d'équations sont diverses, dans beaucoup de domaines aussi bien des mathématiques, de la physique, que des sciences et de la technologie...
D'autre coté, l'étude des solutions non bornées, autrement dit celles qui ont une particularité ou singularité temporelle déterminée et finie ; occupe une place spéciale et importante.
Au début, on considérait ces solutions comme " typiques" (caractéristique) et qui nous permettent d'étudier leurs optimalité à partir des données initiales en vue d'arriver à une solvabilité générale. Tandis que, plus loin, et afin de résoudre des problèmes rencontrés, beaucoup d'importance a été accordé à toutes les solutions qui ont ce comportement puisque ces dernières sont étroitement liées à de nombreux phénomènes physiques comme " Le contrôle thermique " ou " la propagation des ondes ".
Le phénomène d'explosion en temps fini serait tout simplement le cas dans lequel la solution n'est plus limitée ou bornée à un certain ensemble.
dans ce mémoire on s'intéresse à l'explosion en temps fini des solutions faibles d'un classe d'équations de la chaleur impliquant $p(x)$-Laplacien avec non-linéarité logarithmique.
Cong Nhan Le et **Xuan Truong Le**, ont étudié le même problème dans le cadre des espaces de Lebesgue et de Sobolev classiques, dans l'espace de Lebesgue L^p et Sobolev $W^{1,p}$ et ont également obtenu des résultat d'existence globale et d'explosion en temps fini des solution faibles (voir [4])
Dans ce travail, nous allons étendre les résultats de la partie d'explosion en temps fini de **Cong Nhan Le** et **Xuan Truong Le** [4] dans le cadre des espaces de Lebesgue et de Sobolev à exposants variable $p(x)$.
Nous obtenons des résultats d'explosion en temps fini des solutions faibles et des conditions sur le temps fini d'explosion et la décroissance polynomiale d'énergie.
À propos de cela, il est nécessaire d'introduire des outils mathématiques : des défi-

nitions, des propriétés, ... sur les espaces de Lebesgue et Sobolev classiques (voir : [1, 7, 10, 17]), et cels des exposantes variables, voir ([5, 16, 20]).
Ensuite, nous définissons les équations de puits potentiel, qui nous aident à étudier le problème principal.

$$\begin{cases} u_t - \Delta_{p(x)} u = |u|^{p(x)-2} u \log |u|, & x \in \Omega, t > 0 \\ u(x,t) = 0, & x \in \partial\Omega, t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega \end{cases} \tag{1}$$

où $p(x)$ est une fonction continue sur $\bar{\Omega}$ telle que :

$$2 < p_- \leq p(x) \leq p_+ < \infty$$

la condition initiale $u_0 \in W_0^{1,p(x)}(\Omega) \backslash \{0\}$ et $\nabla_{p(x)} u = div(|\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u)$

Chapitre 1

Préliminaire

Définition 1.1 *[1] Une partie K de E est dite compacte si, de toute suite (u_n) d'éléments de K, on peut extraire une sous-suite convergente vers un élément de K.*

Définition 1.2 *[1](Espace métrique complet) : (E, d) désigne un espace métrique. Soit (u_n) une suite d'éléments de E. On dit que (u_n) est une suite de Cauchy si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall p \geq p_1 \geq n_0, d(u_p; u_{p_1}) < \varepsilon$$

On dit que E est un espace métrique complet si toute suite de Cauchy de E converge.

Thèoreme 1.1 *[1] $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont des espaces métriques complets.*

Définition 1.3 *[1] Un espace vectoriel normé E est appelé espace de Banach s'il est complet.*

Définition 1.4 *[1] Soit E un espace de Banach et soit J l'injection canonique de E dans E''. On dit que E est réflexif si $\mathrm{J(E)} = \mathrm{E}''$. Lorsque $\mathbf{E}$ est réflexif on identifie implicitement $\mathbf{E}$ et $\mathbf{E}''$ (à l'aide de l'isomorphisme J).*

Thèoreme 1.2 *[1](Kakutani) Soit E un espace de Banach. Alors $\mathbf{E}$ est réflexif si et seulement si*

$$\mathbf{B}_{\mathrm{E}} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{E}; \quad \|\boldsymbol{x}\| \leqslant 1\}$$

est compact pour la topologie $\sigma(\mathbf{E}, \mathbf{E}')$

Définition 1.5 *[1](espace séparable) On dit qu'un espace métrique est séparable s'il existe un sous-ensemble $\mathrm{D} \subset \mathrm{E}$ dénombrable et dense.*

Proposition 1.1 *[1] Soit* **E** *un espace métrique séparable et soit* **F** *un sous-ensemble de* **E**. *Alors F est séparable.*

Thèoreme 1.3 *Soit* **E** *un espace de Banach tel que* **E**$'$ *son dual, soit séparable. Alors* **E** *est séparable.*

Définition 1.6 *[10](inégalité de Young) Supposons que $a, b \geq 0$ et $1 < p, q < \infty$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, l'inégalité de Young s'exprime par :*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

1.1 Espaces de lebesgue

Définition 1.7 *(Espace L^p)[1] Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leqslant p < \infty$*

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R}; f \text{ mesurable et } |f|^p \in \mathrm{L}^1(\Omega) \right\}$$

On note par

$$\|f\|_{L^p} = \left[\int_\Omega |f(x)|^p \, \mathrm{d}x \right]^{1/p}$$

la norme de f dans l'espace Lp

Thèoreme 1.4 *[1](La convergence dominée de Lebesgue) Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables sur l'espace mesuré $(X \mathscr{M}, \mu)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, qui converge simplement p.p. vers une fonction f. Supposons qu'il existe une fonction intégrable positive $g : X \to \overline{\mathbb{R}}_+$, dite dominante, telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, |f_n| \leq g$ -p.p. Alors :*

1. *f et f_n sont intégrables (pour tout $n \in \mathbb{N}$).*
2. *$\lim_n \int |f_n - f| \, \mathrm{d}\mu = 0$ (autrement dit $\|f - f_n\|_1 \to 0$ lorsque $n \to +\infty$)*
3. *$\lim_n \int f_n \, \mathrm{d}\mu = \int f \, \mathrm{d}\mu$.*

Définition 1.8 *[1] $L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}; f$ mesurable et $\exists$ une constante C telle que $|f(x)| \leqslant C$ p.p. $\mathrm{sur}\, \Omega\}$*
On définie la norme de cet espace par :

$$\|f\|_{L^\infty} = \inf\{C; |f(x)| \leqslant C \text{ p.p. sur } \Omega\}$$

Thèoreme 1.5 *[1]* $\mathbf{L}^p$ *est un espace vectoriel et $\|.\|_{L^p}$ est une norme pour tout $1 \leqslant p \leqslant \infty$*

Thèoreme 1.6 *[1] L^p est un espace de Banach pour tout $1 \leqslant p \leqslant \infty$*

Propriété 1.1 *[1] On définie les deux propriétés suivent de l'espace L^p :*

1. *$\mathbf{L}^p$ est réflexif pour $1 < p < \infty$*
2. *$\mathbf{L}^p(\Omega)$ est séparable pour $1 \leqslant p < \infty$*

Notation 1.1 *[1] Soit $1 \leqslant p \leqslant \infty$; on désigne par q l'exposant conjugué de p c'est à dire : $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.*

Thèoreme 1.7 *[1](Inégalité de Hölder) Soient $f \in \mathbf{L}^p$ et $g \in \mathbf{L}^q$ avec $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Alors $fg \in \mathbf{L}^1$ et*

$$\int |\boldsymbol{fg}| \leqslant \|\boldsymbol{f}\|_{\mathrm{L}^p} \|\boldsymbol{g}\|_{\mathrm{L}^q}$$

Définition 1.9 *[1] Soit $1 \leqslant p \leqslant \infty$; on dit qu'une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$ appartient à $L^p_{loc}(\Omega)$ si $f 1_{\mathrm{K}} \in \mathrm{L}^p(\Omega)$ pour tout compact $\mathrm{K} \subset \Omega$*

Lemme 1.1 *[1] Soit $f \in \mathbf{L}^1_{loc}(\Omega)$ tel que $\int \boldsymbol{fu} = \mathbf{0} \quad \forall \boldsymbol{u} \in \mathbf{C_c}(\Omega)$ Alors $f = 0$ p.p. sur Ω.*

Définition 1.10 *[17] On définit le support d'une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}($ ou $\mathbb{C})$ par*

$$suppf = adh \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}$$

c'est à dire l'adhérence de l'ensemble des x tels que $f(x)$ est non identiquement nulle. Autrement dit, c'est le plus petit ensemble fermé en dehors duquel f est identiquement nulle.

Définition 1.11 *[17] On désigne par $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, ou tout simplement, $\mathcal{D}$ l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables à support compact borné*

$$\mathcal{D} = \{\varphi \in \mathcal{C}^\infty : \text{ suppf borné } \}.$$

Cet ensemble s'appelle espace de base et ses éléments fonctions de base (ou fonctions tests).

1.2 Équation du p -laplacien

Définition 1.12 *[7](Énoncé du problème du p -laplacien) Le problème envisagé maintenant consiste à remplacer l'opérateur de Laplace*
$\Delta = \operatorname{div}(\nabla)$ par l'opérateur non linéaire p-Laplacien, noté Δ_p, défini par :

$$\Delta_p u = \operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p-2} \nabla u\right).$$

Cet opérateur généralise les problèmes de Dirichlet proprement dits. Soient $p > 1$ un réel, dont le conjugué est noté q, et Ω un domaine borné de classe $\mathcal{C}^1$.
On veut résoudre, pour $\lambda \geqslant 0$ et f dans $L^q(\Omega)$, le problème, noté $[\mathcal{L}ap]^p_\lambda$:

$$\begin{cases} \lambda |u|^{p-2}u - \operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right) = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

On cherche u dans $W_0^{1,p}(\Omega)$. Notons que $|\nabla u|^{p-2}\nabla u$ est la fonction vectorielle appartenant à $L^q(\Omega)$ qui est colinéaire à ∇u et a pour module $|\nabla u|^{p-1}$. Cela définit bien une distribution et on peut donc parler de sa divergence.

Remarque 1.1 *[7] Ce même problème peut également être envisagé lorsque f appartient à un autre espace que L^q. Nous détaillerons ces différents cas dans ce qui suit.*

1.2.1 Résultat d'existence

Proposition 1.2 *[7] La fonction u est solution du problème $[\mathcal{L}ap]^p_\lambda$ si et seulement si u soit le minimum de la fonctionnelle définie sur $W_0^{1,p}(\Omega)$ par :*

$$J(u) = \frac{1}{p}\left(\int_\Omega |\nabla u|^p(x)dx + \lambda \int_\Omega |u|^p(x)dx\right) - \int_\Omega f(x)u(x)dx$$

Proposition 1.3 *[7] On se donne $1 < p < \infty$ et Ω un domaine bornée de classe $\mathcal{C}^1$ de R^N. Soit $\mathcal{N}$ une semi-norme continue sur $W^{1,p}(\Omega)$. Alors il existe une constante $C > 0$ telle que :*

$$\forall u \in W^{1,p}(\Omega), \quad \|\nabla u\|_p + \mathcal{N}(u) \geqslant C\left(\|u\|_p + \|\nabla u\|_p\right)$$

1.2.2 Résultat d'unicité

Thèoreme 1.8 *[7] Il y a unicité de la solution du problème $[\mathcal{L}ap]^p_\lambda$*

Preuve 1.1 *[7] Soient u_1 et u_2 deux solutions.*
Pour simplifier, on utilise la notation $\sigma_i = \left(|\nabla u_i|^{p-2}\nabla u_i\right), (i = 1, 2)$ En faisant la différence des deux équations associées, en multipliant par $(u_1 - u_2)$ et en intégrant sur Ω, on obtient :

$$\int_\Omega -\operatorname{div}(\sigma_1 - \sigma_2)\cdot(u_1 - u_2)\,dx + \lambda \int_\Omega \left(|u_1|^{p-2}u_1 - |u_2|^{p-2}u_2\right)(u_1 - u_2)\,dx = 0$$

On considère les signes des fonctions intégrées.
Soit X et Y des vecteurs de R^N.

Développons, pour $p > 1$, le produit scalaire $U(X,Y) = (|X|^{p-2}X - |Y|^{p-2}Y) \cdot (X - Y)$. En utilisant $X \cdot Y \leqslant |X||Y|$, on a :

$$U(X,Y) \geqslant |X|^p + |Y|^p - \left(|X|^{p-2} + |Y|^{p-2}\right)|X||Y|$$

c'est-à-dire :

$$U(X,Y) \geqslant \left(|X|^{p-1} - |Y|^{p-1}\right)(|X| - |Y|) \geqslant 0$$

Ce résultat est aussi valable pour les scalaires $X = u_1(x)$ et $Y = u_2(x)$ où $x \in \Omega$, donc :

$$\left(|u_1(x)|^{p-2}\, u_1(x) - |u_2(x)|^{p-2}\, u_2(x)\right)(u_1(x) - u_2(x)) \geqslant 0$$

ce qui signifie que la seconde intégrale de (1.1) est positive. Quant à la première intégrale, en la transformant par la formule de Green généralisée et en tenant compte de $\gamma_0\,(u_1 - u_2) = 0$, elle s'écrit :

$$\int_\Omega \left(|\nabla u_1|^{p-2}\, \nabla u_1 - |\nabla u_2|^{|p-2}\, \nabla u_2\right) \cdot (\nabla u_1 - \nabla u_2)\, dx$$

Alors, la relation $U\,(\nabla u_1(x), \nabla u_2(x)) \geqslant 0$ entraine, si $\lambda \neq 0$, les égalités, presque partout sur Ω :

$$u_1(x) = u_2(x) \text{ et } \nabla u_1(x) = \nabla u_2(x)$$

Si $\lambda = 0$, la seule conclusion $\nabla u_1 = \nabla u_2$, suffit aussi à conclure à $u_1 = u_2$ sur Ω, puisque $u_1 = u_2 = 0$ sur le bord $\partial\Omega$. D'où le résultat d'unicité.

1.3 Espaces de Sobolev

Définition 1.13 *[1](Espace de Sobolev $W^{1,p}$) Soit $I =]a,b[$ un intervalle borné ou non et soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leqslant p \leqslant \infty$*

$$W^{1,p}(\mathbf{I}) = \{u \in \mathbf{L}^p(\mathbf{I}); \exists g \in \mathrm{L}^p(\mathrm{I}) \text{ tel que } \int_I u\varphi' = -\int_I g\varphi \quad \forall \varphi \in \mathrm{C}^1_\mathrm{c}(\mathrm{I})\right\}$$

Définition 1.14 *[1] Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert et soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leqslant p \leqslant \infty$ L'espace de Sobolev $\mathrm{W}^{1,p}(\Omega)$ est défini par :*

$$\mathbf{W}^{1,p}(\Omega) = \left\{u \in \mathrm{L}^p(\Omega) \mid \int_\Omega u\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega g_i\varphi \quad \forall\varphi \in \mathrm{C}^\infty_\mathrm{c}(\Omega) \quad \forall i = 1, 2, \ldots, \mathrm{N}\right\}$$

Proposition 1.4 *[1]Nous avons définie quelque propriétés de l'espace $W^{1,p}$*

- *L'espace $\mathbf{W}^{1,p}$ est un espace de Banach pour $1 \leqslant \boldsymbol{p} \leqslant \infty$*
- *$\mathbf{W}^{1,p}$ est réflexif pour $1 < p < \infty$ et séparable pour $1 \leqslant p < \infty$.*

— $H^1(\Omega) = \mathbf{W}^{1,2}(\Omega)$
— *L'espace* H^1 *est un espace de Hilbert séparable.*
— *L'espace* $\mathbf{W}^{1,p}(\Omega)$ *est muni de la norme*

$$\|u\|_{\mathrm{W}^{1,p}} = \|u\|_{\mathrm{L}^p} + \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p}$$

ou parfois de la norme équivalente

$$\left(\|u\|_{L^p}^p + \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p}^p \right)^{1/p} \quad (si\ 1 \leqslant p < \infty)$$

— *L'espace* $\mathrm{H}^1(\Omega)$ *est muni du produit scalaire*

$$(u, v)_{\mathrm{H}^1} = (u, v)_{\mathrm{L}^2} + \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{\mathrm{L}^2}$$

la norme associée

$$\|u\|_{H^1} = \left(\|u\|_{L^2}^2 + \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2}^2 \right)^{1/2}$$

est équivalente à la norme de $\mathrm{W}^{1,2}$.

Définition 1.15 *[1](Espaces* $\mathbf{W}^{m,p}(\Omega)$*) Soient* $m \geqslant 2$ *un entier et soit* p *un réel avec* $1 \leqslant p \leqslant \infty$. *On définit par récurrence*

$$\mathbf{W}^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in \mathrm{W}^{m-1,p}(\Omega); \quad \frac{\partial u}{\partial x_i} \in \mathrm{W}^{m-1,p}(\Omega) \quad \forall i = 1, 2, \ldots, \mathrm{N} \right\}$$

Il revient au même d'introduire

$$\mathrm{W}^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in \mathrm{L}^p(\Omega) \mid \begin{array}{l} \forall \alpha \text{ avec } |\alpha| \leqslant m \quad \exists g_\alpha \in \mathrm{L}^p(\Omega) \text{ tel que} \\ \int_\Omega u \mathrm{D}^\alpha \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g_\alpha \varphi \quad \forall \varphi \in \mathrm{C}_{\mathrm{c}}^\infty(\Omega) \end{array} \right\}$$

avec $|\alpha| = \sum_{i=1}^N \alpha_i$
On note $\mathrm{D}^\alpha u = g_\alpha$ *L'espace* $\mathrm{W}^{m,p}(\Omega)$ *muni de la norme*

$$\|u\|_{\mathrm{w}^{m,p}} = \sum_{0 \leqslant |x| \leqslant m} \|\mathrm{D}u\|_{L^p}$$

est un espace de Banach.

Proposition 1.5 *[1] On définie quelque propriétés de l'espace* $W^{1,p}$

— $\mathrm{H}^m(\Omega) = \mathrm{W}^{m,2}(\Omega)$

— $\mathrm{H}^m(\Omega)$ *muni du produit scalaire*

$$(u,v)_{\mathrm{H}^m} = \sum_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant m} (\mathrm{D}^\alpha u, \mathrm{D}^\alpha v)_{\mathrm{L}^2}$$

est un espace de Hilbert.

Thèoreme 1.9 *[3](Inégalités de Gagliardo-Nirenberg) Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^n$ et soient $1 \leq p < \infty$ et $p\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq q$. On fixe r par la condition :*

$$r = n(q/p - 1) \tag{1.1}$$

Alors, si $\nabla f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et $f \in L^r(\mathbb{R}^n)$ on a l'inégalité :

$$\|f\|_q \leq C \|\nabla f\|_p^{p/q} \|f\|_r^{1-(p/q)} \tag{1.2}$$

Thèoreme 1.10 *[3] Si $1 \leq p, q, r < \infty, 0 \leq j \leq m, \frac{j}{m} \leq \sigma \leq 1$ et*

$$\frac{1}{p} - \frac{j}{n} = \sigma\left(\frac{1}{r} - \frac{m}{n}\right) + (1-\sigma)\frac{1}{q},$$

alors on a l'estimation

$$\left\|D^j f\right\|_p \leq C \left\|D^m f\right\|_r^\sigma \|f\|_q^{1-\sigma}$$

où $\left\|D^k f\right\|_p = \sup_{|\alpha|=k} \|\partial^\alpha f\|_p$

1.4 Espaces $L^{p(x)}$ et $W^{p(x)}$

Définition 1.16 *[5] Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions mesurables $p(\cdot) : \Omega \to]1, \infty[$. Les éléments de $\mathcal{P}(\Omega)$ sont dit fonctions exponents ou (simplement exponents).*

Définition 1.17 *[16] Pour tout exposant mesurable $p(x)$ avec*

$$1 < p_- \leqslant p(x) \leqslant p_+ < +\infty$$

— $L^{p(\cdot)}$ *et* $W^{1,p(\cdot)}$ *sont réflexifs.*

— $L^{p(\cdot)}$ *et* $W^{1,p(\cdot)}$ *sont uniformément convexes.*

— *le dual de $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ est $L^{q(\cdot)}(\Omega)$ si $p \in L^\infty(\Omega)$.*

Thèoreme 1.11 *[20] soient $0 < |\Omega| < \infty$ et $p, q \in \mathcal{P}(\Omega)$.*

$$L^{q(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{p(x)}(\Omega)$$

si et seulement si $\quad p(x) \leqq q(x), \qquad x \in \Omega.$

$$\Omega_\infty^p \subset \Omega_\infty^q$$

Définition 1.18 *[5] $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$ et soit $E \subset \Omega$, on définie $p_-(E)$ et $p_+(E)$ par*

$$p_-(E) = \operatorname{essinf}_{x\in E} p(x), \quad p_+(E) = \operatorname{esssup}_{x\in E} p(x)$$

Notation 1.2 *[5] On définie les ensembles suivante :*

1. $\Omega_\infty^{p(\cdot)} = \{x \in \Omega : p(x) = \infty\}$
2. $\Omega_1^{p(\cdot)} = \{x \in \Omega : p(x) = 1\}$
3. $\Omega_*^{p(\cdot)} = \{x \in \Omega : 1 < p(x) < \infty\}$

Définition 1.19 *[5] Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $q(x)$ le conjugué de $p(x)$*

$$\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{q(x)} = 1, \quad x \in \Omega$$

Notation 1.3 *[5]*

$$q_+(.) = \overline{p_-(.)} \quad \text{et} \quad q_-(.) = \overline{p_+(.)}$$

avec $q(.)$ le conjugué de $p(.)$

Définition 1.20 *[5] Soient $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$, et $L^{p(x)}(\Omega)$ espace de Lebesgue. f fonction mesurable*

$$\int_\Omega |f(x)|^{p(x)} dx < \infty$$

Définition 1.21 *[5] Soit $\lambda > 0$ la norme de $L^{p(.)}(\Omega)$est définie par*

$$\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} = \inf\left\{\lambda > 0 : \rho_{p(\cdot)}(f/\lambda) \leq 1\right\}$$

avec

$$\rho_{p(\cdot)}(f) = \int_{\Omega\backslash\Omega_\infty} |f(x)|^{p(x)} dx + \|f\|_{L^\infty(\Omega_\infty)} < \infty.$$

Définition 1.22 *[20] On définit le modulaire de $p(.)$ par*

$$\varrho_p(f) = \int_{\Omega/\Omega_\infty} |f(x)|^{p(x)} \mathrm{d}x + \operatorname*{ess\,sup}_{\Omega_\infty} |f(x)|$$

Thèoreme 1.12 *[5] (Inégalité de Hölder généralisée) Ω et $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$, pour toute $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ et $g \in L^{q(\cdot)}(\Omega)$, alors $fg \in L^1(\Omega)$ et*

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|dx \leq K_{p(\cdot)}\|f\|_{p(\cdot)}\|g\|_{q(\cdot)}$$

avec

$$K_{p(\cdot)} = \left(\frac{1}{p_-} - \frac{1}{p_+} + 1\right)\|\chi_{\Omega_*}\|_\infty + \|\chi_{\Omega_\infty}\|_\infty + \|\chi_{\Omega_1}\|_\infty .$$

Lemme 1.2 *[4]*

1. *Pour toute fonction $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ on a l'inégalité*

$$\|u\|_q \leq B_{q,p}\|\nabla u\|_p$$

Pour tout $q \in [1, \infty[$ si $n \leq p$, et $1 \leq q \leq \frac{np}{n-p}$ si $n > p$. la meilleur constante $B_{q,p}$ dépend uniquement en Ω, n, p et q. On notera la constante $B_{p,p}$ par B_p.

2. *soit $2 \leq p < q < p^*$. pour tout $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ on a*

$$\|u\|_q \leq C\|\nabla u\|_p^\alpha \|u\|_2^{1-\alpha}$$

où C est une constante positive et

$$\alpha = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{p} + \frac{1}{2}\right)^{-1}$$

Lemme 1.3 *[4] Soit $p > 1, \mu > 0$, et $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}$. Alors on a*

$$p\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^p \log\left(\frac{|u(x)|}{\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}}\right)dx + \frac{n}{p}\log\left(\frac{p\mu e}{n\mathscr{L}_p}\right)\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^p dx \leq \mu\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x)|^p dx$$

où

$$\mathscr{L}_p = \frac{p}{n}\left(\frac{p-1}{e}\right)^{p-1}\pi^{-\frac{p}{2}}\left[\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}{\Gamma\left(n\frac{p-1}{p}+1\right)}\right]^{\frac{p}{n}}$$

Définition 1.23 *[8](La fonction Gamma) Pour z un complexe de partie réelle strictement positive $Re(z) > 0$, on définit la fonction Gamma par*

$$\Gamma : z \mapsto \int_0^{+\infty} t^{z-1}\mathrm{e}^{-t}dt$$

Remarque 1.2 *Si* $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ *et* $\Omega = \Omega_+ \cup \Omega_-$ *avec*

$$\Omega_+ = \{x \in \Omega, |u| \geq 1\}, \Omega_- = \{x \in \Omega, |u| < 1\} \tag{1.3}$$

alors, en définissant $u(x) = 0$ *pour* $x \in \mathbb{R}^n \backslash \Omega$. *l'inégalité de Sobolev devient*

$$p_- \int_{\Omega_-} |u(x)|^{p_-} \log\left(\frac{|u(x)|}{\|u\|_{L^{p_-}(\Omega_-)}}\right) dx + \frac{n}{p_-} \log\left(\frac{p_-\mu e}{n\mathscr{L}_{p_-}}\right) \int_{\Omega_-} |u(x)|^{p_-} dx$$
$$\leq \mu \int_{\Omega_-} |\nabla u(x)|^{p_-} dx \tag{1.4}$$

et

$$p_+ \int_{\Omega_+} |u(x)|^{p_+} \log\left(\frac{|u(x)|}{\|u\|_{L^{p_+}(\Omega_+)}}\right) dx + \frac{n}{p_+} \log\left(\frac{p_+\mu e}{n\mathscr{L}_{p_+}}\right) \int_{\Omega_+} |u(x)|^{p_+} dx$$
$$\leq \mu \int_{\Omega_+} |\nabla u(x)|^{p_+} dx \tag{1.5}$$

où

$$\mathscr{L}_{p-} = \frac{p-}{n}\left(\frac{p_- - 1}{e}\right)^{p_- - 1} \pi^{-\frac{p_-}{2}} \left[\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}{\Gamma\left(n\frac{p_- - 1}{p_-}+1\right)}\right]^{\frac{p_-}{n}}$$

et

$$\mathscr{L}_{p+} = \frac{p+}{n}\left(\frac{p_+ - 1}{e}\right)^{p_+ - 1} \pi^{-\frac{p_+}{2}} \left[\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}{\Gamma\left(n\frac{p_+ - 1}{p_+}+1\right)}\right]^{\frac{p_+}{n}}$$

Lemme 1.4 *[4] soit* ϱ *un nombre réel positive. Alors :*

$$\log s \leq \frac{e^{-1}}{\varrho} s^{\varrho} \tag{1.6}$$

Pour toute $s \in [1, +\infty[$

Preuve 1.2 *On définit la fonction* $f(s) = \log s - \frac{e^{-1}}{\varrho} s^{\varrho}$
f *est une fonction dérivable pour tout* $s \in]1, +\infty[$

$$f'(s) = \frac{1}{s} - e^{-1} s^{\varrho - 1}$$
$$= \frac{1 - e^{-1} s^{\varrho}}{s}$$

$f(x) \leq 0 \Longrightarrow 1 \leq s < e^{\frac{1}{\varrho}}$ *alors* f *est croissante sur* $[1; e^{\frac{1}{\varrho}}[$
$f(x) \geq 0 \Longrightarrow s > e^{\frac{1}{\varrho}}$ *alors* f *est décroissante sur* $]e^{\frac{1}{\varrho}}; +\infty[$
$f'(e^{\frac{1}{\varrho}}) = 0 \Longrightarrow f$ *possède un maximum local en* $s = e^{\frac{1}{\varrho}}$ *et* $f(e^{\frac{1}{\varrho}}) = 0$
c'est à dire :
$\forall s \in]1; +\infty[$ *on a toujours :* $f(x) \leq 0$
d'où :

$$\log s \leq \frac{e^{-1}}{\varrho} s^{\varrho}$$

Remarque 1.3 *[4] d'après (1.6) il s'ensuite que :*

$$s^p \log s \leq \frac{e^{-1}}{\varrho} s^{\varrho+p}$$

pour tout $\varrho > 0$ *et* $s \in [1; +\infty[$

Maintenant on introduit la définition de la solution faible du problème (1)
on a d'après le problème (1)

$$u_t = div(|\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u) + |u|^{p(x)-2} u \log |u|$$

multiplions les deux côtés par ω et on intègre sur Ω :

$$\int_{\Omega} u_t \omega dx = \int_{\Omega} div(|\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u) \omega dx + \int_{\Omega} |u|^{p(x)-2} u \log |u| \omega dx$$

On considère une intégration par parties pour la première intégrale du côté droit, on trouve

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} div(|\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u) \omega dx &= \left[|\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u) \omega dx \right]_{\Omega} \ - \int_{\Omega} |\nabla|^{p(x)-2} \nabla u \nabla \omega dx \\ &= - \int_{\Omega} |\nabla|^{p(x)-2} \nabla u \nabla \omega dx \end{aligned}$$

on obtient donc la définition suivante.

Définition 1.24 *[4](Solution faible) une fonction* $u \in L^{\infty}\left(0, T; X_0\right)$ *avec*

$$u_t \in L^{q(x)}\left(0, T; W^{-1,q(x)}(\Omega)\right) \cap L^2\left(0, T; L^2(\Omega)\right)$$

est appelée solution faible du problème (1) sur $\Omega \times [0, T[$ *si elle satisfait la condition initiale*

$$u(\cdot, 0) = u_0(\cdot) \in X_0 = W_0^{1,p(x)}$$

et

$$\int_{\Omega} u_t w dx + \int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla w dx = \int_{\Omega} |u|^{p(x)-2} u \log |u| w dx \tag{1.7}$$

pour tout $w \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$, *et pour tout* $t \in]0, T[$. *presque par tout*

Définition 1.25 *[4](Puits de potentiel)*

$$J(u) = \frac{1}{p} \|\nabla u\|_p^p - \frac{1}{p} \int_{\Omega} |u|^p \log |u| dx + \frac{1}{p^2} \int_{\Omega} |u|^p dx \tag{1.8}$$

$$I(u) = \|\nabla u\|_p^p - \int_{\Omega} |u|^p \log |u| dx \tag{1.9}$$

Chapitre 2

Méthode des Puits de Potentiel

2.1 Puits de Potentiel

La fonction d'énergie $E(t)$ associée à u est donnée sur X_0 par :

$$E(t) = \int_\Omega \frac{1}{p(x)} |\nabla u(s)|^{p(x)} dx - \int_\Omega \frac{1}{p(x)} |u(s)|^{p(x)} \log |u(s)| dx + \int_\Omega \frac{1}{p^2(x)} |u(s)|^{p(x)} dx$$

Considérons les fonctionnelles J et I définies sur X_0 par :

$$J(u) = \int_\Omega \frac{1}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)} - \int_\Omega \frac{1}{p(x)} |u|^{p(x)} \log |u| dx + \int_\Omega \frac{1}{p(x)^2} |u|^{p(x)} dx$$

$$I(u) = \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)} - \int_\Omega |u|^{p(x)} \log |u| dx.$$

Les fonctions I et J sont continues (elles sont définies comme dans [4] avec quelques modifications). De plus, nous avons (la Relation entre I et J) :

$$\frac{1}{p_+} I(u) + \frac{1}{p_+^2} \|u\|_{p_-}^{p_-} \leq J(u) \leq \frac{1}{p^-} I(u) + \frac{1}{p_-^2} \|u\|_{p_+}^{p_+} \tag{2.1}$$

Soit $u \in X_0$ et on considère la fonction réelle $j : \lambda \mapsto J(\lambda u)$ pour $\lambda > 0$ définie par :

$$\begin{aligned} j(\lambda) = J(\lambda u) &= \int_\Omega \frac{\lambda^{p(x)}}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)} dx - \int_\Omega \frac{\lambda^{p(x)}}{p(x)} |u|^{p(x)} \log |u| dx \\ &- \log \lambda \int_\Omega \frac{\lambda^{p(x)}}{p(x)} |u|^{p(x)} dx + \int_\Omega \frac{\lambda^{p(x)}}{p^2(x)} |u|^{p(x)} dx \end{aligned}$$

Le lemme suivant montre que $j(\lambda)$ a un unique point critique positif $\lambda^* = \lambda^*(u)$; voir [12]

Lemme 2.1 *[4] soit $u \in X_0$ alors on a :*

1. $\lim_{\lambda \to 0^+} j(\lambda) = 0$ *et* $\lim_{\lambda \to +\infty} j(\lambda) = -\infty$.
2. *il existe un unique* $\lambda^* = \lambda^*(u) > 0$ *tel que* $j'(\lambda^*) = 0$
3. $j(\lambda)$ *est croissante en* $]0, \lambda^*[$, *décroissante en* $]\lambda^*, +\infty[$ *et admet un maximum local en* λ^*
4. $I(\lambda u) > 0$ *pour* $0 < \lambda < \lambda^*, I(\lambda u) < 0$ *pour* $\lambda^* < \lambda < +\infty$ *et* $I(\lambda^* u) = 0$.

Preuve 2.1 *Soit* $u \in X_0$, *par définition de* j *on a :*

$$j(\lambda) = \frac{\lambda^{p(x)}}{p(x)} \|\nabla u\|_{p(x)}^{p(x)} - \int_\Omega \frac{\lambda^{p(x)}}{p(x)} |u|^{p(x)} \log |u| dx - \log \lambda \int_\Omega \frac{\lambda^{p(x)}}{p(x)} |u|^{p(x)} dx + \int_\Omega \frac{\lambda^{p(x)}}{p^2(x)} |u|^{p(x)} dx$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\lambda} j(\lambda) = & \int_\Omega \lambda^{p(x)-1} |\nabla u|^{p(x)} dx - \int_\Omega \lambda^{p(x)-1} |u|^{p(x)} \log |u| dx - \int_\Omega \lambda^{p(x)-1} |u|^{p(x)} \log \lambda dx \\ & - \frac{1}{\lambda} \int_\Omega \frac{\lambda^{p(x)}}{p(x)} |u|^{p(x)} dx + \int_\Omega \frac{\lambda^{p(x)-1}}{p(x)} |u|^{p(x)}\end{aligned}$$

alors :

$$\frac{d}{d\lambda} j(\lambda) = \int_\Omega \lambda^{p(x)-1} |\nabla u|^{p(x)} dx - \int_\Omega \lambda^{p(x)-1} |u|^{p(x)} \log |u| dx - \int_\Omega \lambda^{p(x)-1} |u|^{p(x)} \log \lambda dx$$

Il est claire que (1) est vérifié pour $\int_\Omega (\lambda^*)^{p(x)-1} |u|^{p(x)} \neq 0$

$$\frac{d}{d\lambda} j(\lambda^*) = 0 \Leftrightarrow \log \lambda^* = \left(\frac{\int_\Omega \lambda^{*p(x)-1} \left(|\nabla u|^{p(x)} - |u|^{p(x)} \log |u| \right) dx}{\int_\Omega \lambda^{*p(x)-1} |u|^{p(x)} dx} \right) \tag{2.2}$$

$j'(\lambda^*) = 0$ *possède une solution unique donnée par :*

$$\lambda^* = \lambda^*(u) = \exp \left(\frac{\int_\Omega \lambda^{*p(x)-1} \left(|\nabla u|^{p(x)} - |u|^{p(x)} \log |u| \right) dx}{\int_\Omega \lambda^{*p(x)-1} |u|^{p(x)} dx} \right)$$

d'après (1) et (2) j *possède un maximum local au point* λ^* *et* j *est croissante sur* $]0; \lambda^*[$ *et décroissante sur* $]\lambda^*; +\infty[$ *car sinon : c'est à dire* j *croissent sur* $]\lambda^*; +\infty[$ *ceci contredit le fait que :* $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} j(\lambda) = -\infty$.
on a :

$$\begin{aligned} I(\lambda u) &= \int_\Omega \lambda^{p(x)} |\nabla u|^{p(x)} dx - \int_\Omega \lambda^{p(x)} |u|^{p(x)} \log |\lambda u| dx \\ &= \int_\Omega \lambda^{p(x)} |\nabla u|^{p(x)} dx - \int_\Omega \lambda^{p(x)} |u|^{p(x)} \log \lambda dx - \int_\Omega \lambda^{p(x)} |u|^{p(x)} \log |u| dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda j'(\lambda u) &= \int_\Omega \lambda^{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}dx - \int_\Omega \lambda^{p(x)}|u|^{p(x)}\log\lambda dx - \int_\Omega \lambda^{p(x)}|u|^{p(x)}\log|u|dx \\ &= I(\lambda u)\end{aligned}$$

c'est à dire : $\lambda j'(\lambda u) = I(\lambda u)$
j croissante sur $]0;\lambda^*] \Longrightarrow j'(\lambda) > 0$ *d'ou* $I(\lambda u) > 0$
j décroissante sur $]\lambda^*;+\infty[\Longrightarrow j'(\lambda) < 0$ *d'ou* $I(\lambda u) < 0$
$I(\lambda^* u) = \lambda^* j'(\lambda *) = \lambda^* \times 0 = 0$

Lemme 2.2 *[4] soit* $u \in X_0$*. alors on a :*

1. *si* $0 < \|u\|_p < R$ *alors* $I(u) > 0$*.*
2. *si* $I(u) < 0$ *alors* $\|u\|_p > R$*.*
3. *si* $I(u) = 0$ *alors* $\|u\|_p \geq R$*.*

Notation 2.1 *Pour le (lemme 2.2) on utilise les notations*

$$R_- = \left(\frac{p_-^2 e}{n\mathscr{L}_{p_-}}\right)^{n/p_-^2}$$

et

$$R_+ = \left(\frac{p_+^2 e}{n\mathscr{L}_{p_+}}\right)^{n/p_+^2}$$

avec $\mathscr{L}_{p_-}$ *et* $\mathscr{L}_{p_+}$ *sont définie par :*

$$\mathscr{L}_{p-} = \frac{p-}{n}\left(\frac{p_- - 1}{e}\right)^{p_- - 1}\pi^{-\frac{p_-}{2}}\left[\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}{\Gamma\left(n\frac{p_- - 1}{p_-}+1\right)}\right]^{\frac{p_-}{n}}$$

et

$$\mathscr{L}_{p+} = \frac{p+}{n}\left(\frac{p_+ - 1}{e}\right)^{p_+ - 1}\pi^{-\frac{p_+}{2}}\left[\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}{\Gamma\left(n\frac{p_+ - 1}{p_+}+1\right)}\right]^{\frac{p_+}{n}}$$

Pour prouver le lemme (2.2) pour notre cas, on utilise les notations ci-dessus, c'est-à-dire qu'on doit démontrer les assertions modifié suivants. soit $u \in X_0$ alors :

1. si $0 < \|u\|_{p_-} < R_-$ et $0 < \|u\|_{p_+} < R_+$ alors $I(u) > 0$.
2. si $I(u) < 0$ alors $\|u\|_{L^{p_-}(\Omega_-)} > R_-$ et $\|u\|_{L^{p_+}(\Omega_+)} > R_+$
3. si $I(u) = 0$ alors $\|u\|_{L^{p_-}(\Omega_-)} \geq R_-$ et $\|u\|_{L^{p_+}(\Omega_+)} \geq R_+$.

Preuve 2.2 *puisque $\mu > 0$, on utilise (2.1) et les inégalités (1.3) et (1.4) nous avons :*

$$\begin{aligned}
I(u) &= \int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)} dx - \int_{\Omega} |u|^{p(x)} \log|u| dx \\
&\geq \int_{\Omega_-} |\nabla u|^{p_-} dx - \int_{\Omega_+} |u|^{p_+} \log\left(\frac{|u|}{\|u\|_{p_+}}\right) dx - \int_{\Omega_+} |u|^{p_+} \log\|u\|_{p_+} dx \\
&\geq \frac{\mu}{p_-} \int_{\Omega_-} |\nabla u|^{p_-} dx - \int_{\Omega_-} |u|^{p_-} \log\left(\frac{|u|}{\|u\|_{p_-}}\right) dx - \int_{\Omega_-} |u|^{p_-} \log\|u\|_{p_-} dx \\
&+ \frac{\mu}{p_+} \int_{\Omega_+} |\nabla u|^{p_+} dx - \int_{\Omega_+} |u|^{p_+} \log\left(\frac{|u|}{\|u\|_{p_+,\Omega_+}}\right) dx - \int_{\Omega} |u|^{p_+} \log\|u\|_{p_+} dx \\
&+ \left(1 - \frac{\mu}{p_-}\right) \|\nabla u\|_{p_-}^{p_-} - \frac{\mu}{p_+} \|\nabla u\|_{p_+}^{p_+} + \int_{\Omega_-} |u|^{p_-} \log|u| dx \\
&\geq \frac{n}{p_-^2} \log\left(\frac{p_-\mu e}{n\mathscr{L}_{p_-}}\right) \int_{\Omega_-} |u(x)|^{p_-} dx - \int_{\Omega_-} |u|^{p_-} \log\|u\|_{p_-} dx \\
&+ \frac{n}{p_+^2} \log\left(\frac{p_+\mu e}{n\mathscr{L}_{p_+}}\right) \int_{\Omega_+} |u|^{p_+} dx - \int_{\Omega} |u|^{p_+} \log\|u\|_{p_+} dx \\
&+ \|\nabla u\|_{p_-}^{p_-} + \int_{\Omega_-} |u|^{p_-} \log|u| dx - \mu\left(\frac{1}{p_-}\|\nabla u\|_{p_-}^{p_-} + \frac{1}{p_+}\|\nabla u\|_{p_+}^{p_+}\right)
\end{aligned}$$

choisissons $\mu = \frac{\|\nabla u\|_{p_-}^{p_-} + \int_\Omega |u|^{p} - \log|u| dx}{p_-^{-1}\|\nabla u\|_p^p - p_+^{-1}\|\nabla u\|_{p_+}^{p_+}}$, on obtient :

$$\begin{aligned}
I(u) \geq &\left(\frac{n}{p_-^2} \log\left(\frac{p_-\mu e}{n\mathscr{L}_{p_-}}\right) - \log\|u\|_{p_-}\right) \|u\|_{p_-}^{p_-} \\
&+ \left(\frac{n}{p_+^2} \log\left(\frac{p_+\mu e}{n\mathscr{L}_{p_+}}\right) - \log\|u\|_{p_+}\right) \|u\|_{p_+}^{p_+} \qquad (2.3)
\end{aligned}$$

(1) pour $0 < \|u\|_{p_-} < R_-$ et $0 < \|u\|_{p_+} < R_+$, puis, on utilisent (2.3), on obtient :

$$I(u) > 0.$$

(2) supposons que $I(u) < 0$. Alors en utilisant (2.3) on trouve :

$$\left[\log\left(\frac{\left(\frac{p_-\mu e}{n\mathscr{L}_{p_-}}\right)^{n/p_-^2}}{\|u\|_{p_-}}\right)\right] \|u\|_{p_-}^{p_-} < \left[\log\left(\frac{\|u\|_{p_+}}{\left(\frac{p_+\mu e}{n\mathscr{L}_{p_+}}\right)^{n/p_+^2}}\right)\right] \|u\|_{p_+}^{p_+}$$

puisque $\|u\|_{p_-}^{p_-} \leq \|u\|_{p_+}^{p_+}$ alors :

$$\frac{\left(\frac{p_-\mu e}{n\mathscr{L}_{p_-}}\right)^{n/p_-^2}}{\|u\|_{p_-}} < \frac{\|u\|_{p_+}}{\left(\frac{p_+\mu e}{n\mathscr{L}_{p_+}}\right)^{n/p_+^2}}$$

c'est à dire :

$$\left(\frac{p_{-}\mu e}{n\mathscr{L}_{p_{-}}}\right)^{n/p_{-}^{2}}\left(\frac{p_{+}\mu e}{n\mathscr{L}_{p_{+}}}\right)^{n/p_{+}^{2}} < \|u\|_{p_{-}}\|u\|_{p_{+}}$$

ce qui implique :

$$\|u\|_{p_{-}} > \left(\frac{p_{-}\mu e}{n\mathscr{L}_{p_{-}}}\right)^{\frac{n}{p_{-}^{2}}} = R_{-} \quad \text{et} \quad \|u\|_{p_{+}} > \left(\frac{p_{+}\mu e}{n\mathscr{L}_{p_{+}}}\right)^{\frac{n}{p_{+}^{2}}} = R_{+}$$

Pour prouver (3), on procède de la même manière que pour la preuve de (2), ce qui complète la preuve du lemme.

2.2 Variété de Nehari

C'est l'une des méthodes variationnelles qu'il s'agit une minimisation sous contrainte d'une fonctionnelle d'énergie.
On commence par définir la variété de Nehari et par introduire certaines de ces applications qu'on le verra par la suite.

Définition 2.1 *[22] Dans un cadre assez général, on considère le problème :*

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x, u(x)) & \textit{pour } x \in \Omega \\ u(x) = 0 & \textit{pour } x \in \partial\Omega \end{cases}$$

dont l'équation s'avère être l'équation d'Euler de la fonctionnelle :

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_{\Omega} |\nabla u(x)|^{2}dx - \int_{\Omega} F(x, u(x))dx \ \textit{ où } F(x, u(x)) = \int_{0}^{u} f(x, s)ds$$

qu'on considère, tenant compte de la condition au bord, sur l'espace $\mathrm{E} = \mathrm{W}_{0}^{1,2}(\Omega)$. *Évidemment la fonctionnelle J peut ne pas être bornée sur tout l'espace mais peut l'être sur certains sous-ensembles de E. Un bon candidat pour un tel sous-ensemble est la dite variété de Nehari :*

$$\mathcal{N} = \{u \in \mathrm{E} : \langle J'(u), u\rangle = 0\}$$

Thèoreme 2.1 *[22] Soit* $u \in \mathrm{E} - \{0\}$ *et* $t > 0$ *Alors* $tu \in \mathcal{N}$ *si et seulement si* $\Phi_{u}' = 0$ *où* $\Phi_{u}(t) = J(tu)$

Démonstration 2.1 *[22] On a par définition :*

$$\Phi_{u}(t) = J(tu)$$

et donc : $\Phi_{u}'(t) = \langle J'(u), u\rangle = \frac{1}{t}\langle J'(tu), tu\rangle$. *Si* $\Phi_{u}'(t) = 0$, *alors* $\langle J'(tu), tu\rangle = 0$
i.e. $tu \in \mathcal{N}$

En d'autres termes, les points de la variété $\mathcal{N}$ correspondent aux points stationnaires des applications Φ_u. En conséquence logique, on partage $\mathcal{N}$ en trois sous-ensembles $\mathcal{N}^+, \mathcal{N}^-$ et $\mathcal{N}^\circ$ qui correspondent aux minimums locaux, maximums locaux et aux points d'inflexion des applications Φ_u. Pour cela, on se penche sur la dérivée seconde : d'où

$$\begin{aligned}
\Phi_u'(t) &= \langle J'(tu), u\rangle \\
&= \int_\Omega |\nabla(tu)||\nabla u|dx - \lambda \int_\Omega f(x,tu)udx \\
&= t\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \lambda \int_\Omega f(x,tu)udx \\
\Phi_u''(t) &= \int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \lambda \int_\Omega \left(f_u'(x,tu)u\right)udx \\
&= \int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \lambda \int_\Omega f_u'(x,tu)u^2 dx
\end{aligned}$$

On défini donc les sous-ensembles

$$\begin{array}{l}
\mathcal{N}^+ = \left\{u \in \mathcal{N} : \int_\Omega \left(|\nabla u|^2 - \lambda f_u'(x,u)u^2\right) dx > 0\right\} \\
\mathcal{N}^- = \left\{u \in \mathcal{N} : \int_\Omega \left(|\nabla u|^2 - \lambda f_u'(x,u)u^2\right) dx < 0\right\} \\
\mathcal{N}^\circ = \left\{u \in \mathcal{N} : \int_0 \left(|\nabla u|^2 - \lambda f_u'(x,u)u^2\right) dx = 0\right\}
\end{array}$$

et c'est $\Phi_u''(1)$ qui est utilisée pour ces définitions, puisqu'il est clair que si u est un minimum local pour J, alors Φ_u a un minimum local en $t = 1$

Thèoreme 2.2 *[22] $u \in \mathcal{N}$. Alors :*

1. $\Phi_u'(1) = 0$
2. $u \in \begin{cases} \mathcal{N}^+ & si \quad \Phi_u''(1) > 0 \\ \mathcal{N}^- & si \quad \Phi_u''(1) < 0 \\ \mathcal{N}^\circ & si \quad \Phi_u''(1) = 0. \end{cases}$

Démonstration 2.2 *[22] soit $u \in \mathcal{N}$. alors :*

$$\langle J'(u), u\rangle = 0$$

c'est-à-dire que : $\Phi_u'(1) = 0$ *d'où* (i)*. Pour prouver* (ii)*, il y a donc trois cas :*

$$\begin{aligned}
u \in \mathcal{N}^+ &\Rightarrow \int_\Omega \left(|\nabla u|^2 - \lambda f_u'(x,u)\right) u^2 \Big) \, dx > 0 \\
&\Rightarrow \int_\Omega \left(|\nabla u|^2 - \lambda f_u'(x,tu) \mid (t=1) u^2\right) dx > 0 \\
&\Rightarrow \Phi_u''(1) > 0 \\
u \in \mathcal{N}^- &\Rightarrow \int_\Omega \left(|\nabla u|^2 - \lambda f_u'(x,u)\right) u^2 \Big) \, dx < 0 \\
&\Rightarrow \Phi_u''(1) < 0 \\
u \in \mathcal{N}^\circ &\Rightarrow \int_\Omega \left(|\nabla u|^2 - \lambda f_u'(x,u)\right) u^2 \Big) \, dx = 0 \\
&\Rightarrow \int_\Omega \left(|\nabla u|^2 - \lambda f_u'(x,tu)|_t = 1\right) u^2 \Big) \, dx = 0 \\
&\Rightarrow \Phi_u''(1) = 0
\end{aligned}$$

Le théorème suivant affirme que les minimums de J sur la variété $\mathcal{N}$ sont des points critiques de J

Thèoreme 2.3 *[22] Supposons que* u_0 *est un minimum local pour* J *sur* $\mathcal{N}$ *et que* $u_0 \notin \mathcal{N}^\circ$*. Alors :* $J'(u_0) = 0$*.*

Démonstration 2.3 *[22]* u_0 *est un minimum local de* J *sur* $\mathcal{N}$ *avec* $u_0 \notin \mathcal{N}^\circ$ *(c'est-à-dire :* $\Phi_{u_0}'' \neq 0\big)$*. Alors*

$$J(u_0) = \min_{\gamma(u)=0} J(u)$$

où

$$\gamma(u) = \langle J'(u), u\rangle = \int_\Omega \left(|\nabla u|^2 - \lambda f(x,u)u\right) dx$$

Il s'en suit, Il s'ensuit du théorème de multiplicateurs de Lagrange, qu' $\exists \mu \in \mathrm{R}$ *tel que :*

$$J'(u_0) = \mu \gamma'(u_0) \tag{2.4}$$

Donc :

$$\langle J'(u_0), u_0\rangle = \mu \langle \gamma'(u_0), u_0\rangle$$

Compte tenu du fait que $u_0 \in \mathcal{N}$*, il vient que :*

$$\langle J'(u_0), u_0\rangle = \mu \langle \gamma'(u_0), u_0\rangle = 0$$

c'est-à-dire que :

$$\int_\Omega \left(|\nabla u_0|^2 - \lambda f\left(x, u_0\right) u_0\right) dx = 0$$
$$\Rightarrow \int_\Omega \left(|\nabla u_0|^2\right) dx = \lambda \int_\Omega f\left(x, u_0\right) u_0 dx$$

Et :

$$\begin{aligned}
\left\langle \gamma'\left(u_0\right), u_0\right\rangle &= \int_\Omega \left(2\left|\nabla u_0\right|^2 - \lambda f'_u\left(x, u_0\right)\left(u_0\right)^2\right) dx - \lambda \int_\Omega f\left(x, u_0\right) u_0 dx \\
&= \int_\Omega \left(\left|\nabla u_0\right|^2 - \lambda f'_u\left(x, u_0\right)\left(u_0\right)^2\right) dx \\
&= \Phi''_{u_0}(1) \\
&\neq 0 \quad \textit{puisque } u_0 \notin \mathcal{N}^0
\end{aligned}$$

Ceci implique que $\mu = 0$ (car le produite scalaire est nul).
Remplaçons $\mu = 0$ dans (2.4), on obtient :

$$J'\left(u_0\right) = 0.$$

Ce qui fait démontrer.
Nous avons vu les différent sous-ensemble de la variété de Nehari. On s'intéresse maintenant par la partie de Nehari suivante

$$\mathcal{N} = \left\{u \in X_0 : I(u) = 0\right\}.$$

En vertu du lemme (2.1), il est claire que l'ensemble $\mathcal{N}$ est non vide, de plus J est coercive dans $\mathcal{N}$. En effet, supposons que $u \in \mathcal{N}$ on a d'après (2.1) :

$$\frac{1}{p_+} I(u) + \frac{1}{p_+^2}\|u\|_{p_-}^{p_-} \leq J(u)$$

et comme $u \in \mathcal{N}$, $I(u) = 0$ on a :

$$J(u) \geq \frac{1}{p_+^2}\|u\|_{p_-}^{p_-} \tag{2.5}$$

il s'ensuit du remarque (1.3) que :

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |u(x)|^{p(x)} \log\left(|u(x)|\right) dx &\leq \int_{\Omega_-} |u|^{p_-} \log\left(|u(x)|\right) dx + \int_{\Omega_+} |u(x)|^{p_+} \log\left(|u(x)|\right) dx \\
&\leq C \int_{\Omega_+} |u(x)|^{p_+ + \varrho} dx \\
&\leq C\|u\|_{p_+ + \varrho}^{p_+ + \varrho}
\end{aligned}$$

où C est une constant et $\varrho > 0$. Par conséquent, nous pouvons appliquer l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg, on obtient :

$$\int_\Omega |u(x)|^{p(x)} \log |u(x)| dx \leq C \|\nabla u\|_{p_-}^{\alpha(p_+ + \varrho)} \|u\|_{p_-}^{(1-\alpha)(p_+ + \varrho)}$$

où

$$\alpha = n \left(\frac{1}{p_-} - \frac{1}{p_+ + \varrho} \right) = \frac{n\,(p_+ + \varrho - p_-)}{p_-\,(p_+ + \varrho)}$$

Choisissons $\varrho < \frac{p_-^2}{n} + p_- - p_+$ et $p_- > \max\left\{2, \frac{n}{2}\left(\sqrt{1 + 4\frac{p_+}{n}} - 1\right)\right\}$ pour que $p_- > \alpha\,(p_+ + \varrho)$.
Par l'inégalité de Young, on obtient

$$\int_\Omega |u(x)|^{p(x)} \log |u(x)| dx \leq \varepsilon \|\nabla u\|_{p_-}^{p_-} + C_\varepsilon \left(\|u\|_{p_-}^{p_-} \right)^\beta$$

où $\varepsilon > 0$ et $\beta = \frac{(1-\alpha)(p_+ + \varrho)}{p_- - \alpha(p_+ + \varrho)}$. De plus :

$$\|\nabla u\|_{p_-}^{p_-} \leq \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)} dx$$

puisque $u \in \mathcal{N}$, on a :

$$\|\nabla u\|_{p_-}^{p_-} \leq \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)} dx = \int_\Omega |u(x)|^{p(x)} \log |u(x)| dx \leq \varepsilon \|\nabla u\|_{p_-}^{p_-} + C_\varepsilon \left(\|u\|_{p_-}^{p_-} \right)^\beta$$

on choisit $\varepsilon < 1$. En combinant linégalité ci-dessus et (2.5) on trouve

$$J(u) \geq \frac{1}{p_+^2} \|u\|_{p_-}^{p_-} \geq c_\varepsilon \left(\|\nabla u\|_{p_-}^{p_-} \right)^{\frac{1}{\beta}}$$

Ainsi, J est coercive sur $\mathcal{N}$.
Maintenant, on définit le nombre d (la profondeur du puits de potentiel) par

$$d = \inf_{u \in \mathcal{N}} J(u) \tag{2.6}$$

et prouvons dans le lemme suivant, qu'il existe pour J définit sur X_0 un point critique non-trivial $u \in \mathcal{N}$, considéré comme solution minimale du problème stationnaire (2.6) associé au problème (1).

Lemme 2.3 *[4] soit $u \in X_0$ on a :*

1. *$d = \inf_{u \in X_0} \sup_{\lambda > 0} J(\lambda u)$.*

2. *Il existe une borne inférieure positive de d, c'est-à-dire que*

$$d \geq \frac{1}{p^2}\left(\frac{p^2 e}{n\mathscr{L}_p}\right)^{\frac{n}{p}} = \frac{R^p}{p^2} = M$$

3. *Il existe un esxtremal du problème (2.6). Plus précisément, il existe une fonction positive $u \in \mathscr{N}$ telle que $J(u) = d$.*

Preuve 2.3 *Soit $u \in X_0$, alors par (2.1) et le lemme (1.2) nous pouvons écrire*

$$\sup_{\lambda>0} J(\lambda u) = J\left(\lambda^* u\right) \geq \frac{1}{p_+} I\left(\lambda^* u\right) + \frac{1}{p_+^2}\left\|\lambda^* u\right\|_{p_-}^{p_-} = \frac{1}{p_+^2}\left\|\lambda^* u\right\|_{p_-}^{p_-}. \tag{2.7}$$

Tout d'abord, nous prouvons (1). Par définition de $\mathcal{N}$, et le Lemme (1.2), on déduit que $\lambda^* u \in \mathcal{N}$, c'est-à-dire que

$$J\left(\lambda^* u\right) \geq \inf_{u \in \mathcal{N}} J(u) = d \tag{2.8}$$

Donc (2.7) et (2.8), donnent :

$$\inf_{u \in X_0 \lambda>0} \sup_{\lambda>0} J(\lambda u) \geq d \tag{2.9}$$

De plus, si $u \in \mathcal{N}$ alors il découle de (2.2) que $\lambda^* = 1$ est le seul point critique en $]0, \infty[$ de $j(\lambda)$. Par conséquent,

$$\sup_{\lambda>0} J(\lambda u) = J(u)$$

pour tout $u \in \mathcal{N}$. puisque :

$$\inf_{u \in X_0 \lambda>0} \sup_{u \in N} J(\lambda u) \leq \inf_{u \in N_{\lambda>0}} \sup_{\lambda>0} J(\lambda u) = \inf_{u \in N} J(u) = d \tag{2.10}$$

l'assertion 1 *découle de (2.9) et (2.10).*
Pour montrer l'assertion 2 *il suffit de démontrer que :*

$$d \geq \frac{R_-^{p_-}}{p_+^2} = M \tag{2.11}$$

En vertu du lemme (1.2), pour tout $u \in X_0$, alors $I\left(\lambda^* u\right) = 0$. Ce qui signifie par le Lemme(2.2) que

$$\left\|\lambda^* u\right\|_{p_-} \geq \left(\frac{p_- \mu e}{n\mathscr{L}_{p_-}}\right)^{\frac{n}{p^2}} = R_-, \quad \left\|\lambda^* u\right\|_{p_+} \geq \left(\frac{p_+ \mu e}{n\mathscr{L}_{p_+}}\right)^{\frac{n}{p_+^2}} = R_+ \tag{2.12}$$

alors,de (2.7) et (2.12) on a :

$$\sup_{\lambda>0} J(\lambda u) \geq \frac{R_-^{p_-}}{p_+^2} = M$$

Par conséquent, (2.11) découle de l'assertion 1 et donc l'assertion 2 est prouvée. pour la preuve de l'assertion 3, on a :
Soit $\{u_k\}_k^\infty \subset \mathcal{N}$, *est une séquence minimisante pour* J, *et supposons que* $\{u_k\}_k^\infty$ *est de termes positifs* $(u_k > 0)$ *p.p sur* Ω *pour tout* $k \in \mathbb{N}$, *tel que :*

$$\lim_{k\to+\infty} J(u_k) = d$$

De plus, $\{|u_k|\}_k^\infty \subset \mathcal{N}$ *est aussi une suite minimisante pour* J *et* $J(|u_k|) = J(u_k)$ *car* $u_k > 0$. *De plus, nous avons vu précédemment que* J *est coercive sur* $\mathcal{N}$ *ce qui implique que* $\{u_k\}_k^\infty$ *est borné dans* $W^{1.p(x)}(\Omega)$.
$W^{1.p(.)}(\Omega) \hookrightarrow L^{p(.)}$ *est une injection compacte, il existe une fonction* u *et une sous-suite de* $\{u_k\}_k^\infty$, *souvent notée* $\{u_k\}_k^\infty$, *telles que :*

$$\begin{array}{lll} u_k \to u & \textit{faiblement dans} & W^{1.p(x)}(\Omega), \\ u_k \to u & \textit{fortement dans} & L^{p(x)} \\ u_k(x) \to u(x) & \textit{p.p sur} & \Omega. \end{array}$$

donc on a $(u \geq 0)$ *p.p dans* Ω. *La semi continuité inférieure faible et le théorème de la convergence dominée de Lebesgue donnent*

$$\begin{aligned} J(u) &= \int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}dx - \int_\Omega \frac{1}{p(x)}|u|^{p(x)}\log|u|dx + \int_\Omega \frac{1}{p^2(x)}|u|^{p(x)}dx \\ &\leq \liminf_{k\to\infty}\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u_k|^{p(x)}dx - \int_\Omega \frac{1}{p(x)}|u_k|^{p(x)}\log|u_k|dx + \int_\Omega \frac{1}{p^2(x)}|u_k|^{p(x)}dx\right) \\ &= \liminf_{k\to\infty} J(u_k) = d. \end{aligned}$$

puisque $u_k \in \mathcal{N}$ *alors* $u_k \in X_0$ *et* $I(u_k) = 0$ *ce qui implique par le Lemme (2.2) et (2.11) que*

$$\|u_k\|_{p_-} \geq \left(\frac{p_-\mu e}{n\mathcal{L}_{p_-}}\right)^{\frac{n}{p^2}} = R_-, \quad \|u_k\|_{p_+} > \left(\frac{p_+\mu e}{n\mathcal{L}_{p_+}}\right)^{\frac{n}{p_+^2}} = R_+$$

Cela signifie que $\|u\|_{p_-} \neq 0$ *et* $\|u_k\|_{p_+} \neq 0$ *par convergence forte dans* $L^{p_-}(\Omega_-)$ *et* $L^{p_+}(\Omega_+)$ *respectivement, et donc* $\|u\|_{p(x)} \neq 0$ *par convergence forte dans* $L^{p(x)}(\Omega)$ *à l'aide de (2.2), c'est-à-dire que* $u \in X_0$. *De plus, par continuité inférieure faible,* *on trouve :*

$$
\begin{aligned}
I(u) &= \|\nabla u\|_{p(x)}^{p(x)} - \int_{\Omega} |u|^{p(x)} \log |u| dx \\
&\leq \liminf_{k \to +\infty} \left(\|\nabla u_k\|_{p(x)}^{p(x)} - \int_{\Omega} |u_k|^{p(x)} \log |u_k| \, dx \right) \\
&= \liminf_{k \to +\infty} I(u_k) = 0.
\end{aligned}
$$

Donc, pour compléter la preuve de l'assertion 3, nous devons montrer que $I(u) = 0$. En effet, supposons que, $I(u) < 0$, alors, par le Lemme (1.2), il existe une constante positive λ^*,

$$
\lambda^* = \lambda^*(u) = \exp \left(\frac{\int_{\Omega} \lambda^{*p(x)-1} \left(|\nabla u|^{p(x)} - |u|^{p(x)} \log |u| \right) dx}{\int_{\Omega} \lambda^{*p(x)-1} |u|^{p(x)} dx} \right) < 1
$$

satisfaisant $I(\lambda^* u) = 0$. Par conséquent on a

$$
\begin{aligned}
0 < d \leq J(\lambda^* u) &\leq \int_{\Omega} \frac{1}{p^2(x)} |\lambda^* u|^{p(x)} \, dx \\
&\leq \sup_{x \in \Omega} \left(\lambda^{*p(x)} \right) \lim_{k \to \infty} \inf J(u_k) = \sup_{x \in \Omega} \left(\lambda^{*p(x)} \right) d < d.
\end{aligned}
$$

Ce qui est impossible, et le lemme est prouvé.

Remarque 2.1 *On remarque que, si $p_- = 2$, alors on obtient $\mathscr{L}_2 = \frac{2}{n\pi e}$ et*

$$
M = \frac{1}{p_+^2} \left(\frac{2\mu e}{n \mathscr{L}_2} \right)^{n/2} = \frac{1}{p_+} (\mu \pi)^{n/2} e^n
$$

Nous présentons maintenant les ensembles de puits potentiels introduits dans [4] (voir aussi [18]).

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{W}_1 = \{u \in X_0 : J(u) < d\}, && \mathcal{W}_2 = \{u \in X_0 : J(u) = d\}, && \mathcal{W} = \mathcal{W}_1 \cup \mathcal{W}_2 \\
&\mathcal{W}_1^+ = \{u \in \mathcal{W}_1 : I(u) > 0\}, && \mathcal{W}_2^+ = \{u \in \mathcal{W}_2 : I(u) > 0\}, && \mathcal{W}^+ = \mathcal{W}_1^+ \cup \mathcal{W}_2^+ \\
&\mathcal{W}_1^- = \{u \in \mathcal{W}_1 : I(u) < 0\}, && \mathcal{W}_2^- = \{u \in \mathcal{W}_2 : I(u) < 0\}, && \mathcal{W}^- = \mathcal{W}_1^- \cup \mathcal{W}_2^-
\end{aligned}
$$

Il est clair que, $\mathcal{W}^+ \cup \mathcal{W}^- = \varnothing$ et $\mathcal{W}^+ \cup \mathcal{W}^- = \mathcal{W}$. Nous appelons $\mathcal{W}$ le puits de potentiel et d la profondeur du puits potentiel. Notons que $\mathcal{W}^+$ est la meilleure partie du puits. Dans notre cas on s'intéresse uniquement par la partie $\mathcal{W}^-$. Nous allons donc prouver que si la donnée initiale appartient à $\mathcal{W}^-$ alors toute solution faible du problème (1) explose en temps fini.

Chapitre 3

Explosion en temps fini des solutions faibles

L'objectif de ce chapitre est de prouver le résultat d'explosion en temps fini des solutions faibles du problème (1) à condition que la donnée initiale u_0 soit dans $\mathcal{W}^-$ et satisfait la condition $J(u_0) \leq M$. Pour cela, nous avons besoin de quelques lemmes qui sont présentés dans [9] et [4] respectivement

Lemme 3.1 *Soit $\psi \in W_{loc}^{1,1}(\mathbb{R}^+)$ une fonction non négative satisfaisant $\psi(0) > 0$ et l'inégalité différentielle*

$$\frac{d\psi}{dt}(t) \geq c\psi^\sigma(t), \quad \textit{pour p.p } t \geq 0$$

où $\sigma > 1$ et c est une constante positive. On a alors

$$\psi(t) \geq \left(\frac{1}{\psi^{1-\sigma}(0) - c(\sigma-1)t}\right)^{1/(\sigma-1)}, \quad t \in [0, T_*[$$

ce qui implique que $\lim_{t\to T_*^-} \psi(t) = \infty$, avec $T_* = \frac{\psi^{1-\sigma}(0)}{c(\sigma-1)}$.

La preuve de ce lemme est simple. Le lecteur peut également trouver sa preuve dans [6].

Lemme 3.2 *[4] Soit Φ une fonction positive, deux fois différentiable, satisfaisant les conditions suivantes*

$$\Phi(\bar{t}) > 0, \quad \textit{et} \quad \Phi'(\bar{t}) > 0$$

pour un certain $\bar{t} \in [0, T[$, et l'inégalité

$$\Phi(t)\Phi''(t) - \alpha\left(\Phi'(t)\right)^2 \geq 0, \quad \forall t \in [t, T]$$

où $\alpha > 1$. *Alors, on a*

$$\Phi(t) \geq \left(\frac{1}{\Phi^{1-\alpha}(\bar{t}) - \Phi(t-\bar{t})}\right)^{1/(\alpha-1)}, \quad t \in [\bar{t}, T_*[$$

avec Φ *est une constante positive, et*

$$T_* = \bar{t} + \frac{\Phi(\bar{t})}{(\alpha-1)\Phi'(\bar{t})}$$

Ceci implique

$$\lim_{t \to T_*^-} \Phi(t) = +\infty$$

Thèoreme 3.1 *[4] Soit* $u_0 \in \mathcal{W}^-$ *avec* $J(u_0) \leq M$. *Supposons que* $u(x,t)$ *soit une solution locale faible du problème (1) correspondant à* u_0 *et que* u *soit satisfait l'inégalité d'énergie suivante.*

$$\int_0^t \|u_s(s)\|_2^2 \, ds + J(u(t)) \leq J(u_0), \quad \forall t \in [0, T[\tag{3.1}$$

Alors, on a les assertions

1. *La solution* $u(x,t)$ *explose en temps fini si,* $J(u_0) \leq 0$ *, i.e.*

$$\lim_{t \to T_*^-} \|u(t)\|_2^2 = +\infty, \quad \text{où} \quad T_* = \frac{p \|u_0\|_2^{2-p}}{(p-2)\ell_{2,p}^{-p}}.$$

De plus, on a l'estimation

$$\|u(t)\|_2^2 \geq \left(\frac{1}{\|u_0\|_2^{2-p} - p^{-1}\ell_{2,p}^{-p}(p-2)t}\right)^{2/(p-2)}$$

2. *La solution* $u(x,t)$ *explose en temps fini si* $0 < J(u_0) \leq M$*,c'est-à-dire il existe un temps* $T_* > 0$ *tel que*

$$\lim_{t \to T_*^-} \|u(t)\|_2^2 = +\infty$$

Nous démontrons ce théorème pour notre cas dans le cadre des Espaces de Lebesgue et de Sobolev à exposants variables, on peut donc modifier les assertions comme suite.

1) La solution $u(x,t)$ *explose en temps fini lorsque,* $J(u_0) \leq 0$ *i.e.*

$$\lim_{t \to T_*^-} \|u(t)\|_2^2 = +\infty, \quad \text{où} \quad T_* = \frac{p_+ \|u_0\|_{2,\Omega_+^-}^{2-p_-}}{(p_- - 2)\, l_{2,p_-}^{-p_-}}$$

De plus, on a l'estimation

$$\|u(t)\|_2^2 \geq \left(\frac{1}{\|u_0\|_{2,\Omega_+^2 - p_+^{-1} l_{2,p_-}^{-p_-}(p_- -2)t}} \right)^{2/(p_- -2)}$$

Preuve 3.1 *Nous commençons par prouver que $u(t) \in \mathcal{W}_1^-$, pour tout $t \geq 0$, si $u_0 \in \mathcal{W}_1^-$. En effet, en raisonnant par l'absurde, on suppose qu'il existe un temps $t_0 \in]0, T[$ pour lequel $u(.,t) \in \mathcal{W}_1^-$*
pour tous $t \in [0, t_0[$ et $u\,(., t_0) \in \partial\mathcal{W}_1^-$, donc

$$I\,(u\,(t_0)) = 0 \quad \text{ou} \quad J\,(u\,(t_0)) = d.$$

mais, d'après de l'inégalité d'énergie (3.1), il est évident que l'identité $J\,(u(t_0)) = d$ ne peut pas être correct. Cependant, si $I\,(u\,(t_0)) = 0$, il s'ensuite du lemme (2.2) que $\|u\,(t_0)\,\|_p \geq R > 0$. On en déduit que $u\,(t_0) \in \mathcal{N}$ donc, par la formule (2.7), on trouve $J\,(u\,(t_0) \geq d$ ce qui contredit l'inégalité d'énergie.
Après cela, nous définissons la fonctionnelle

$$\Gamma(t) = \int_0^t \|u(s)\|_2^2 ds + (T-t)\,\|u_0\|_2^2 \quad t \in [0,T]. \tag{3.2}$$

On a

$$\Gamma'(t) = \||u(t)\|_2^2 - \|u_0\|_2^2 = \int_0^t \frac{d}{ds}\left(\|u(s)\|_2^2\right) ds = 2\int_0^t \int_\Omega u_s(s)u(s)dxds \tag{3.3}$$

et

$$\Gamma''(t) = 2\int_\Omega u_t(t)u(t)dx = -2\int_\Omega |\nabla u(t)|^{p(x)}dx + 2\int_\Omega |u(t)|^{p(x)}\log|u(t)|dx = -2I(u(t))$$

par (2.1) et l'inégalité d'énergie, on obtient

$$\begin{aligned}\Gamma''(t) &\geq -2p_+J(u(t)) + \frac{2}{p_+}\|u(t)\|_{p_-,\Omega_+}^{p_-} \\ &\geq 2p_+\int_0^t \|u_s(s)\|_2^2\,ds + \frac{2}{p_+}\|u(t)\|_{p_-,\Omega_+}^{p_-} - 2p_+J\,(u_0)\end{aligned} \tag{3.4}$$

On distingue trois cas :

1. ***le premier cas :** $J\,(u_0) \leq 0$. Dans ce cas, nous utilisons l'injection $L^{p_-}\,(\Omega_+) \hookrightarrow L^2\,(\Omega_+)$, $p_- > 2$.*

$$\Gamma''(t) \geq \frac{2}{p_+}\|u(t)\|_{p_-,\Omega_+}^{p_-} \geq \frac{2}{p_+ l_{2,p_-}^{p_-}}\|u(t)\|_{2,\Omega_+}^{p_-} = \frac{2}{p_+ l_{2,p_-}^{p_-}}\left(\Gamma'(t) + \|u_0\|_{2,\Omega_+}^2\right)^{\frac{p_-}{2}}$$

où l_{2,p_-} *est la constante d'injection* $L^{p_-}(\Omega_+) \hookrightarrow L^2(\Omega_+)$, $p_- > 2$. *Par conséquent, nous pouvons appliquer le lemme (2.2) (avec* $\psi(t)$ *remplacé par* $\Gamma'(t) + \|u_0\|^2_{2,\Omega_+}$, $c = 2p_+^{-1} l_{2,p_-}^{-p_-}$ *et* $\sigma = p_-/2$) *pour obtenir l'estimation*

$$\|u(t)\|_2^2 \geq \left(\frac{1}{\|u_0\|^{2-p}_{2,\Omega_+} - p_+^{-1} l_{2,p_-}^{-p_-} (p_- - 2)\, t} \right)^{2/(p_- - 2)}$$

ceci montre que :

$$\lim_{t \to T^* -} \|u(t)\|_2^2 = +\infty, \qquad où \quad T^* = \frac{p \|u_0\|^{2-p_-}_{2,\Omega_+}}{l_{2,p_-}^{-p_-} (p_- - 2)}$$

2. ***le deuxième cas :*** $0 < J(u_0) < M$ *Puisque* $u(t) \in \mathcal{W}_1^-$, *pour tout* $t \in [0,T]$, *on a* $I(u(t)) < 0$ *ceci implique par le Lemme (2.2) que* $\|u(t)\|^{p_-}_{p_-} \geq R_1^{p_-}$ *et* $\|u\|^{p_+}_{p_+} \geq R_2^{p_+}$ *pour tout* $t \in [0,T]$, *donc, par (3.4) on trouve*

$$\Gamma''(t) \geq 2p_+ \int_0^t \|u_s(s)\|_2^2\, ds + 2p_+ (M - J(u_0)), \quad t \in [0,T]. \tag{3.5}$$

Il s'ensuit que

$$\Gamma'(t) = \Gamma'(0) + \int_0^t \Gamma''(s) ds \geq 2p_+ (M - J(u_0))\, t \geq 0, \quad t \in [0,T] \tag{3.6}$$

Par conséquent, (3.3) et (3.6) nous donnent en utilisant l'inégalité de Hölder

$$\frac{1}{4} (\Gamma'(t))^2 \leq \left(\int_0^t \int_\Omega u_s(s) u(s) dx ds \right)^2 \leq \int_0^t \|u_s(s)\|_2^2\, ds \int_0^t \|u(s)\|_2^2 ds \tag{3.7}$$

pour tout $t \in [0,T]$. *En combinant (3.2), (3.5) et (3.7), on trouve*

$$\begin{aligned} \Gamma(t)\Gamma''(t) &\geq 2p_+ \int_0^t \|u_s(s)\|_2^2\, ds \int_0^t \|u(s)\|_2^2 ds + 2p_+ (M - J(u_0)) \Gamma(t) \\ &\geq \frac{p_+}{2} (\Gamma'(t))^2 + 2p_+ (M - J(u_0)) \Gamma(t) \end{aligned}$$

pour tout $t \in [0,T]$. *Par conséquent,*

$$\Gamma(t)\Gamma''(t) - \frac{p_+}{2} (\Gamma'(t))^2 \geq 2p_+ (M - J(u_0)) \Gamma(t) > 0. \quad pour\ tout\ t \in [0,T]$$

En vertu du le Lemme (3.2), il existe $T^* > 0$ *tel que*

$$\lim_{t \to T^{*-}} \Gamma(t) = +\infty$$

ce qui signifie que $\lim_{t \to T^{*-}} \int_0^t \|u(s)\|_2^2 ds = +\infty$. *D'où*

$$\lim_{t \to T^{*-}} \|u(t)\|_2^2 = +\infty$$

3. ***troisième cas*** $J(u_0) = M$.
Puisque $I(u(t)) < 0$ *pour tout* $t \geq 0$ *cela signifie que*

$$\begin{aligned}\int_\Omega u_t(t)u(t)dt &= -\int_\Omega |\nabla u(t)|^{p(x)}dx + \int_\Omega |u(t)|^{p(x)} \log |u(t)| dx \\ &= -I(u(t)) > 0, \quad \forall t > 0.\end{aligned}$$

Et comme $\|u_t(t)\|_2^2$ *doit être positif* $\left(\|u_t(t)\|_2^2 > 0\right)$, *pour tout* $t > 0$. *Puisque* $t \to \int_0^t \|u_s(s)\|_2^2 ds$ *est une fonction continue et à l'aide de l'inégalité d'énergie, ainsi, pour tout nombre* $\varepsilon > 0$ *assez petit, il existe* $t_\varepsilon > 0$ *tel que*

$$J(u(t_\varepsilon)) \leq J(u_0) - \int_0^{t_\varepsilon} \|u_s(s)\|_2^2 ds = M - \varepsilon$$

Enfin, nous considérons le temps initial, t_ε *et nous procédons de la même manière que dans le cas* $0 < J(u_0) < M$ *alors nous obtenons le résultat d'explosion en temps fini*

$$\lim_{t \to T^*-} \|u(t)\|_2^2 = +\infty$$

ce qui complète la preuve du théorème.

Conclusion

Les équations aux dérivées partielles ou brièvement les EDP ont été introduites dans la modélisation des processus physiques, ce qui assure une prise en compte plus réaliste de l'évolution des phénomènes en générale.
Dans ce mémoire, nous avons étudié le phénomène d'explosion en temps fini des solutions faibles d'une classe d'équation de la chaleur impliquant $p(x)$-Laplacien avec non-linéarité logarithmique. Cette étude a été réalisée dans le cadre des espaces de Lebesgue et de Sobolev à exposantes variable, nous avons utilisé la méthode des puits de potentiel et les inégalités logarithmiques de Sobolev.
Nous avons obtenu des résultats d'explosion en temps fini des solutions faible, des conditions sur le temps fini d'explosion et des résultat sur la décroissance polynomiale d'énergie.
Nous avons prouvé dans le Théorème (3.1) ces résultats dans deux cas :

Cas 1 : $J\left(u_0\right) \leq 0$, dans ce cas nous avons imposé une hypothèse sur la donnée initiale qu'il soit dans une partie de l'ensemble de puits de potentiel ($u_0 \in \mathcal{W}_1^-$). Sous cette hypothèse, on a démontré que la solution elle-même reste dans la même partie ($u(t) \in \mathcal{W}_1^-$) ce qui permet d'obtenir l'explosion en temps fini et l'estimation du décroissance de l'énergie.

Cas 2 : $0 < J\left(u_0\right) \leq M$, dans ce cas les résultats précédents sont prouvé sous la même hypothèse.
Des difficultés rencontré dans le déploiement de la méthode du puits potentiel à cause de la motivation du problème au niveau des espaces de Lebesgue et de Sobolev à exposantes variables et la présence du terme logarithmique.

Bibliographie

[1] H. Brezis. *Analyse Fonctionnelle Théorie et applications.* masson, 2010.

[2] H. Buljan, A. Šiber, and S. T. S. M. C. D. N. Soljačić, M. Incoherent white light solitons in logarithmically saturable noninstantaneous nonlinear media. *Phys. Rev. E*, 68 :036607, Sep 2003.

[3] D. CHAMORRO. Inégalités de gagliardo-nirenberg précisées sur le groupe de heisenberg.

[4] X. T. Cong Nhan. Global solution and blow-up for a class of p-laplacian evolution equations with logarithmic nonlinearity. *Acta Appl Math*, 151 :149–169, 2017.

[5] A. F. David V.Cruz-Uribe. *Variable Lebesgue Spaces.* Birkhauser, 2013.

[6] J. A. Esquivel-Avila. The dynamics of a nonlinear wave equation. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 279(1) :135–150, 2003.

[7] G. D. Françoise Demengel. *Espaces Fonctionnels Utilusation dans la résolution des équations aux dérivées partielles.* savoirs actuels, 2007.

[8] M. Godefroy. *La Fonction Gamma.* Paris,gauthier-villars,imprimeur-libaire, 2009.

[9] G. L. Hua Chen, Peng Luo. Global solution and blow-up of a semilinear heat equation with logarithmic nonlinearity. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 422(1) :84–98, 2015.

[10] C. J.-s. H. C. C. Huang, Chien Hao. Trace versions of young inequality and its applications. *Journal of Nonlinear and Convex Analysis*, 20(2) :215–228, 2019.

[11] N. Ioku. The cauchy problem for heat equations with exponential nonlinearity. *Journal of Differential Equations*, 251(4) :1172–1194, 2011.

[12] J. I.Peral. On the stability or instability of the singular solution of the semilinear heat equation with exponential reaction term. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 129 :201224, 1995.

[13] J. M. Iwo Bialynicki-Birula. Nonlinear wave mechanics. *Annals of Physics*, 100(1) :62–93, 1976.

[14] H. Q. Josette Charles, Mostafa Mbekhta. *Analyse Fonctionnelle et Thèorie des Opèrateurs.* dunod, 2010.

[15] E. D. Królikowski, Wiesław and O. Bang. Unified model for partially coherent solitons in logarithmically nonlinear media. *Phys. Rev. E*, 61 :3122–3126, Mar 2000.

[16] P. H. M. R. Lars Diening, Petteri Harjulehto. *Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponents.* Springer, 2017.

[17] A. Lesfari. *Distributions, analyse de fourier et transformation de laplace.* ellipses, 2012.

[18] A. Linde. Strings, textures, inflation and spectrum bending. *Physics Letters B*, 284(3) :215–222, 1992.

[19] J. D. Manuel Del Pino. Best constants for gagliardonirenberg inequalities and applications to nonlinear diffusions. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 81(9) :847–875, 2002.

[20] J. R. Ondrej Kováik. On spaces $l^{p(x)}$ and $w^{k,p(x)}$. *Czechoslovak Mathematical Journal*, 41 :116, 1991.

[21] Z. Tan. Global solution and blow-up of semilinear heat equation with critical sobolev exponent. *Communications in Partial Differential Equations*, 26(3-4) :717–741, 2001.

[22] H. H. Wafaa. Approche par la méthode de nehari d'un probléme elliptique à données indéfinies.