



Université de Ghardaïa

N° d'ordre :

N° de série :

Faculté des Sciences et Technologies
Département des Sciences et Technologie

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

MASTER

Domaine : *Sciences et Technologies*

Filière : *Automatique*

Spécialité : *Automatique et systèmes*

Par : GUERBATI Amer

ZITA Abdallah

Thème

**Solutions approximatives des équations de
HJI pour la synthèse de la commande H^∞
non linéaire par retour d'état des systèmes
non linéaire**

Soutenu publiquement le : 11/09/2020

Devant le jury :

CHARAFABDELKARIM mosbah	grade	Univ. Ghardaïa	Examineur
MEHDI AMIN fiha khir	grade	Univ. Ghardaïa	Examineur
BEKKAR Belgacem	M.C.B	Univ. Ghardaïa	Encadreur

Remerciements

Nous remercions notre Dieu de nous avoir guidés au cours de l'étude et qui nous a donné la force pour compléter ce mémoire.

Nos vifs remerciements vont en particulier à tous nos parents, à nos enseignants du primaire, du collège, du lycée et de l'université,

Nous remercions notre encadreur, Mr : BEKKAR Belgacem, qui a suivi notre travail .

Nos remerciements vont également à tout le corps enseignant du département d'Automatique et d'électromécanique.

Nos remerciements vont aussi à tous ceux qui nous aidé de près ou de loin à l'aboutissement de ce modeste travail.

Enfin, il nous est plaisant d'exprimer nos meilleurs sentiments à Monsieur le Président du jury et à l'ensemble des membres du jury, qui ont bien voulu nous honorer de leurs présences et assister à la soutenance de notre mémoire afin d'évaluer notre travail.

Résumé

Dans ce mémoire le travail concerne à présenter la Stabilité des systèmes non linéaires commande robuste H_∞ sur les systèmes compliqués (non linéaire, multi entrés et multi sorties ...). Dans le premier temps, nous avons défini les notions de base sur la commande robuste H_∞ avec quelques principes sur ce dernier ainsi la solution d'un problème simple. Dans la deuxième étape, nous avons examiné le cœur du problème standard pour les systèmes non linéaires avec sa solution ou finale. Dans l'étape finale, nous avons étudié un modèle non linéaire (Quanser 2-DOF) puis la démonstration mathématique de ses équations de mouvement ainsi la linéarisation de ce dernier et finalement une simulation de la commande LQR sur MATLAB puis une validation des résultats sur le modèle réel dans le laboratoire.

MOTS CLES : commande H_∞ ; fonction de sensibilité ; système non-linéaire ; Stabilité des systèmes non linéaires

ملخص

في هذه الأطروحة ، يتعلق العمل بتقديم استقرار النظام غير الخطي القوي للأمر H_∞ على الأنظمة المعقدة (غير الخطية ، المدخلات المتعددة والمخرجات المتعددة ...). في الخطوة الأولى ، حددنا المفاهيم الأساسية للأمر القوي H_∞ مع بعض المبادئ المتعلقة بالآخر بالإضافة إلى حل مشكلة بسيطة. في الخطوة الثانية ، قمنا بفحص جوهر المشكلة القياسية للأنظمة غير الخطية بحلها أو حلها النهائي. في الخطوة الأخيرة ، درسنا نموذجًا غير خطي (Quanser 2-DOF) ثم العرض الرياضي لمعادلات الحركة الخاصة به وكذلك التفسير الخطي للآخر وأخيرًا محاكاة أمر LQR على MATLAB ثم التحقق من صحة النتائج على النموذج الحقيقي في المختبر.

Table des matières

Remerciements	ii
Résumé	ii
ملخص	iii
Table des matières	iv
Liste des figures	vi
Liste des tableaux	vi
Liste des abréviations	vii
Introduction générale	1
Chapitre 1 Stabilité des systèmes non linéaires	3
1.1 Introduction	3
1.2 Théorie de Lyapunov	4
1.2.1 Définitions	4
1.2.2 Condition de Lipschitz et ses conséquences	4
1.3 Stabilité de Lyapunov	10
1.4 Méthode directe de Lyapunov	15
1.4.1 Théorème de stabilité par la méthode directe	15
1.4.2 Méthode de l'énergie	17
1.4.3 Fonction de Lyapunov quadratique	18
1.4.4 Construction de Krasofski	18
1.4.5 Application	19
1.4.6 Commentaires	20
1.5 Conclusion	22
Chapitre 2 Commande H^∞ non-linéaires	23
2.1 Introduction	23

2.2	Problématique de la commande H_∞ non linéaire	24
2.3	Gain L2	25
2.4	Définition d'un système dissipatif	25
2.5	Problème de commande H_∞ non linéaire	26
2.6	Hypothèses d'existence de la commande H_∞ non linéaire	26
2.7	Solution du problème H_∞ des systèmes non linéaires	28
2.8	Algorithme des approximations successives.....	31
2.9	Commande H_∞ des systèmes non linéaires affines	33
2.9.1	Commande par retour d'état	33
2.10	Conclusion.....	37
Chapitre 3 Commande H_∞ non-linéaire d'un hélicoptère à 2-DOF.....		38
3.1	Introduction	38
3.2	Description du prototype Quanser AERO.....	38
3.3	Modélisation du Quanser 2-DOF	39
3.3.1	Model linéarisé du système	43
3.4	Résultats de simulations	45
3.4.1	Contrôle et simulation LQR.....	45
3.4.2	Exécution de LQR sur le système.....	46
3.4.3	Discussion.....	47
3.5	Conclusion	49
Conclusion générale		50
Bibliographies.....		51

Liste des figures

Figure 1-1 : Illustrer la définition de la stabilité.....	7
Figure 1 -2 : Un point d'équilibre, qui n'est pas stable, mais pour lequel toutes les trajectoires tendent à l'origine si l'on inclut le point à l'infini.....	8
Figure 1-3 : Le choix des constantes dans la preuve du théorème de Lyapunov	14
Figure 1-4 : Représente la fonction énergie du système non linéaire.....	21
Figure 1-5 : Représente la fonction de Lyapunov quadratique du système non linéair.....	21
Figure 3-1 : Quanser 2-DOF.....	39
Figure 3-2 : Model dynamique de Quanser 2-DOF.....	40
Figure 3-3 : Modèle Simulink utilisé pour simuler une réponse de retour d'état en boucle fermée.....	45
Figure 3-4 : Sample response in scopes when simulating LQR control.....	46
Figure 3-5 : Modèle Simulink utilisé avec QUARC pour exécuter le contrôle de retour d'état sur Quanser Aero Experiment.....	47
Figure 3-6 : Sample response in scopes when running LQR on Quanser Aero Experiment.....	48
Figure 3-7 : Sample response using LQR state-feedback on Quanser Aero Experiment.....	49

Liste des tableaux

Tableau 3-1 : Composants de 2-DOF	39
Tableau 3-2 : Paramètres du model Quanser 2-DOF	44

Liste des abréviations

3D : Trois dimensions

LQG/LTR : Linéaire Quadratique Gaussienne avec recouvrement de transfert de boucle

GPC : Generalized Predictive Control

MPC : Model Predictive Control

QFT : Quantitative Feedback Theory

CRONE : Commande Robuste d'Ordre Non Entier

LTI : linear time invariant

LFT : Transformation Linéaire Fractionnelle

2-DOF : two Degree of freedom

MIMO : multi input multi output (multi entré et multi sortie)

LMI : Inégalité matricielle linéaire.

BRL : Lemme borné réel.

Introduction générale

Un système, agrégation d'éléments interconnectés, est constitué naturellement ou artificiellement afin d'accomplir une tâche prédéfinie. Son état est affecté par une ou plusieurs variables, les entrées du système. Le résultat de l'action des entrées est la réponse du système qui peut être caractérisée par le comportement d'une ou plusieurs variables de sorties. Le système complet ou un des éléments le composant est généralement représenté par un schéma fonctionnel. L'action des entrées produit de manière causale des effets mesurés par les signaux de sortie représentés par des flèches sortantes. Les entrées affectant un système peuvent être de nature différente. Les unes ont pour but d'exercer des actions entraînant le fonctionnement souhaité du système ; ce sont les commandes. Les autres entrées troublent le fonctionnement désiré et sont définies comme des perturbations. Chaque élément constitutif de l'ensemble système peut être caractérisé par un nombre fini de variables et l'interdépendance des variables caractérisant chaque élément peut être exprimé sous la forme d'une loi mathématique. Ainsi la relation entre les entrées et les sorties du système est l'expression des lois de la physique associées au système, c'est à dire la combinaison des lois mathématiques précédentes. L'ensemble des lois mathématiques régissant la causalité entre les entrées et les sorties du système constitue le modèle mathématique du système. La modélisation, étape préliminaire de l'analyse d'un système quelconque, indépendamment de sa nature physique, de sa composition et de son degré de complexité. La modélisation dépend ainsi de la nature physique du système mais aussi des hypothèses simplificatrices qu'il est possible de faire. Traitant uniquement dans ce cours des systèmes dynamiques, leur comportement sera décrit par des équations différentielles dans le cas de modèles en temps continu. Les méthodes d'étude des systèmes linéaires sont très puissantes en raison des outils disponibles (algèbre linéaire, équations différentielles et systèmes 2 différentiels linéaires, ...etc). Malgré tout, se cantonner aux systèmes linéaires présente plusieurs limitations :

Ce mémoire est organisé comme

suit :

1. Aucun système physique n'est complètement linéaire. Les méthodes linéaires ne sont donc applicables que dans un domaine de fonctionnement restreint
2. Certains systèmes sont impossibles à modéliser, même localement, à des systèmes linéaire.

3. Certains phénomènes ne peuvent pas être décrits par des modèles et méthodes linéaires.

Un système non linéaire est un système qui n'est pas linéaire, c'est-à-dire qui ne peut pas être décrit par des équations différentielles linéaires à coefficients constants. Cette définition explique la complexité et la diversité des systèmes non linéaires et des méthodes qui s'y appliquent. Il n'y a pas une théorie générale pour ces systèmes, mais plusieurs méthodes adaptées à certaines classes de systèmes non linéaires.

A la différence des systèmes linéaires qui possèdent un point d'équilibre unique, les systèmes non linéaires peuvent posséder plusieurs points d'équilibre.[1]

Le deuxième chapitre sera consacré à la résolution du problème H_∞ non linéaire par la méthode des approximations successives et la méthode des inégalités matricielles non linéaire.

Le troisième chapitre contiendra l'essentiel du travail effectué dans ce mémoire.

Chapitre 1

Stabilité des systèmes non linéaires

1.1 Introduction

L'étude de la stabilité des systèmes dynamiques a une histoire très riche. Beaucoup de mathématiciens, physiciens et astronomes célèbres ont travaillé sur l'automatisation des concepts de stabilité. Un problème qui a suscité beaucoup d'intérêt au début a été le problème de la stabilité du système solaire, généralisé sous le titre "le N-corps problème de stabilité." L'un des premiers à énoncer formellement ce qu'il a appelé le principe de "la moindre énergie totale" était Torricelli (1608-1647), qui a dit qu'un système de corps était à un point d'équilibre stable s'il s'agissait d'un point d'énergie totale (localement) minimale. Au milieu du XVIII^e siècle, Laplace et Lagrange prirent le Torricelli principe un peu plus loin: ils ont montré que si le système est conservateur (c'est-à-dire qu'il conserve l'énergie cinétique totale plus le potentiel), alors un état correspondant à zéro l'énergie cinétique et l'énergie potentielle minimale constituent un point d'équilibre stable. À son tour, plusieurs autres ont montré que le principe de Torricelli tient également lorsque les systèmes sont dissipatifs, c'est-à-dire que l'énergie totale diminue le long des trajectoires du système. Cependant, la définition abstraite de la stabilité pour un système dynamique n'est pas nécessairement dérivée pour un système conservateur ou dissipatif et une caractérisation de la stabilité n'ont été faites avant 1892 par un mathématicien / ingénieur russe, Lyapunov, en réponse à certains problèmes ouverts lors de la détermination de configurations stables de corps rotatifs de fluides posés par Poincaré. Le papier original de Lyapunov de 1892, a été traduit en français très peu de temps après, mais sa traduction anglaise est apparue seulement récemment en 1931.

Il existe une autre étude intéressante sur l'impact du théorème de stabilité de Lyapunov sur le contrôle par rétroaction par Michel

Au fond, les théorèmes de Lyapunov sont dans l'esprit du principe de Torricelli. Ils donnent une caractérisation précise des fonctions qualifiées d'«énergie valide fonctionne "au voisinage des points d'équilibre et la notion que ces" énergies les fonctions "décroissent le long des trajectoires des systèmes dynamiques en question. Ces concepts précis ont été combinés avec

des définitions soigneuses de différentes notions de stabilité pour donner quelques théorèmes très puissants. L'exposition de ces théorèmes est l'objectif principal de ce chapitre.[2]

1.2 Théorie de Lyapunov

1.2.1 Définitions

Soit l'équation différentielle générale de la forme:

$$\dot{X} = f(x, t), \quad x(t_0) = x_0, \quad (1-1)$$

où $x_1, x_2 \in R^n$ et $t > 0$. Le système défini par (1.1) est dit autonome ou invariant dans le temps si f ne dépend pas explicitement de t , On dit qu'elle est linéaire si $f(x, t) = A(t)x$ pour certains $A(\cdot) : R_+ \rightarrow R^{n \times n}$ et non linéaire dans le cas contraire. Dans ce chapitre, nous supposons que $f(x, t)$ est continue par morceaux par rapport à t , c'est-à-dire qu'il n'y a qu'un nombre fini de points de discontinuité dans tout ensemble compact. La notation B_h , sera abrégée pour $B(0, h)$, la boule de rayon h centrée à 0, les propriétés seront dites vraies.

Localement si elles sont vraies pour tous les x_0 dans une boule B_h

Globalement si elles sont vraies pour tous les $x_0 \in R^n$.[3]

semi-globalement si elles sont vraies pour tout $x_0 \in B_h$ avec h arbitraire.

uniformément s'ils sont vrais pour tous $t_0 > 0$.

1.2.2 Condition de Lipschitz et ses conséquences

Définition 1.1 Continuité de Lipschitz La fonction f est dite localement Lipschitz continue en x si pour un $h > 0$ il existe $l > 0$ tel que

$$|f(x_1, t) - f(x_2, t)| \leq l|x_1 - x_2| \quad (1.2)$$

pour tout $x_1, x_2 \in B_h$; $t > 0$. La constante l est appelée constante de Lipschitz. Une définition des fonctions continues globales de Lipschitz suit en exigeant l'équation (1.2) tenir pendant $x_1, x_2 \in R^n$.

La définition de Lipschitz semi-globalement continue fonctions est également valable en exigeant que l'équation (1.2) tienne dans B_h pour h arbitraire mais avec l peut-être une fonction de h . La propriété Lipschitz est supposée par défaut être uniforme en t .

Si f est Lipschitz continue en x , elle est continue en x . Par contre, si f a des dérivées partielles bornées dans x , alors c'est Lipschitz.

Formellement, si

$$D_1(x, t) := \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right]$$

désigne la matrice de dérivée partielle off par rapport à x (l'indice 1 représente le premier argument de $f(x, t)$), alors $|D_1 f(x, t)| \leq l$ implique que f est Lipschitz continu avec la constante de Lipschitz l (encore une fois localement, globalement ou semi-globalement selon la région en x dans laquelle la borne sur $|D_2 f(x, t)|$ est valide). l'équation différentielle (1.1) a une solution unique sur un certain intervalle de temps (tant que $x \in B_h$).

Définition 1.2 Point d'équilibre x^* est dit être un point d'équilibre de (1.1) si $f(x^*, t) = 0$ pour tout $t > 0$.

Si $f(x, t)$ est Lipschitz continue en x , alors la solution $x(t) \equiv x^*$ pour tout t est appelée solution d'équilibre. En traduisant l'origine au point d'équilibre x^* on peut faire de 0 un point d'équilibre. Puisque cela est d'une grande aide pour la notation, nous supposons désormais que 0 est un point d'équilibre de (1.1). L'une des conséquences les plus importantes de l'hypothèse de continuité de Lipschitz est qu'elle donne des bornes sur le taux de convergence ou de divergence des solutions par rapport à l'origine.

Proposition 1.3 Taux de croissance / décroissance . Si $x = 0$ est un point d'équilibre de (1.1) f est Lipschitz en x avec la constante de Lipschitz l et constante par morceaux par rapport à t , alors la solution $x(t)$ satisfait

$$|x_0| e^{l(t-t_0)\theta} \geq |x(t)| \geq |x_0| e^{-l(t-t_0)\theta} \quad (1.3)$$

tant que $x(t)$ reste dans B_h .

Preuve: Puisque $|x|^2 = x^T x$, il s'ensuit que

$$\left| \frac{d}{dt} |x|^2 \right| = 2|x| \left| \frac{d}{dt} |x| \right| \quad (1.4)$$

$$, 2 \left| x^T \frac{d}{dt} x \right| \leq 2|x| \left| \frac{d}{dt} |x| \right| =$$

de sorte que

$$\left| \frac{d}{dt} |x| \right| \leq \left| \frac{d}{dt} x \right|$$

Puisque $f(x, t)$ est Lipschitz continue, et $f(x, 0) = 0$, il s'ensuit que

$$-l|x| \leq \frac{d}{dt}|x| \leq l|x| \quad (1.5)$$

Utilisation du lemme Bellman Gronwall deux fois, donne l'équation (1.3), à condition que la trajectoire reste dans la balle B_h où la condition de Lipschitz tient.

La proposition précédente implique que les solutions commençant à l'intérieur de B_h resteront dans B_h pendant au moins un temps fini. De plus, si $f(x, t)$ est globalement Lipschitz, cela garantit que la solution n'a pas de temps d'échappement fini, c'est-à-dire qu'elle est finie à chaque instant fini. La proposition établit également que les solutions $x(t)$ ne peuvent pas converger vers zéro plus vite que exponentiellement. Nous sommes maintenant prêts à définir les définitions de la stabilité. Informellement $x = 0$ est stable point d'équilibre si les trajectoires $x(t)$ de (2.1) restent proches de l'origine si l'initiale la condition x_0 est proche de l'origine. Plus précisément, nous avons la définition suivante.

Définition 1.4 Stabilité au sens de Lyapunov. Le point d'équilibre $x = 0$ est appelé un point d'équilibre stable de (2.1) si pour tout $t_0 \geq 0$ et $\epsilon > 0$, il existe $\delta(t_0, \epsilon)$ tel que

$$|x_0| < \delta(t_0, \epsilon) \Rightarrow |x(t)| < \epsilon \quad \forall t \geq t_0, \quad (1.6)$$

où $x(t)$ est la solution de (S.1) à partir de x_0 en t_0 .

La définition est illustrée à la figure (1.1), montrant les trajectoires commençant dans un balle B_δ et ne pas quitter le ballon B_ϵ . Parfois, cette définition est également appelée stabilité dans le sens de Lyapunov (i.s.L) au moment de t_0 .

Définition 1.5 Stabilité uniforme. Le point d'équilibre $x = 0$ est appelé un point d'équilibre uniformément stable de (1.1) si dans la définition précédente δ peut être choisi indépendamment de t_0 .

Intuitivement, la définition de la stabilité uniforme saisit l'idée que le point d'équilibre ne devient pas progressivement moins stable avec le temps. Ainsi, en particulier, il empêche une

situation dans laquelle étant donné un $\epsilon > 0$, la boule de conditions initiales de rayon $\delta(t_0, \epsilon)$ dans la définition de la stabilité nécessaire pour maintenir les trajectoires dans la boule ϵ tend à zéro quant $t_0 \rightarrow \infty$. La notion de stabilité est faible en ce qu'elle ne nécessite pas que les trajectoires commençant près de l'origine pour tendre asymptotiquement vers l'origine.

Cette propriété est incluse dans une définition de la stabilité asymptotique:

Définition 1.6 Stabilité asymptotique. Le point d'équilibre $x = 0$ est un point d'équilibre asymptotiquement stable de (2.1) si

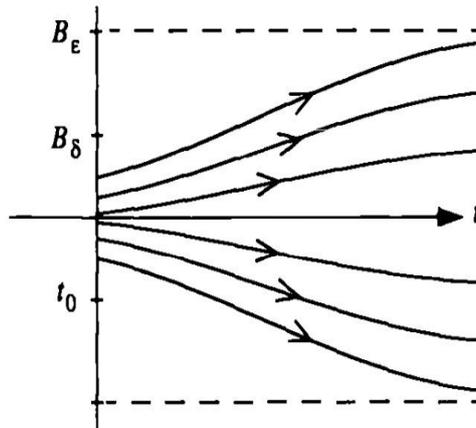


Figure 1-1 : Illustrer la définition de la stabilité

$x = 0$ est un point d'équilibre stable de (1.1),

$x = 0$ est attractif, c'est-à-dire que pour tout $t_0 \geq 0$ il existe un $\delta(t_0)$ tel que

$$|x_0| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} |x(t)| = 0$$

Une caractéristique intéressante de cette définition est qu'elle nécessite deux conditions distinctes: une, que le point d'équilibre soit stable et deux que les trajectoires tendent vers le point d'équilibre comme $t \rightarrow \infty$. Bien que cela puisse sembler superficiellement le cas, l'exigence que les trajectoires convergent vers l'origine n'implique pas la stabilité du point d'équilibre. Pour illustrer cela, nous considérons l'exemple suivant

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1^2 - x_2^2 \\ \dot{x}_2 &= 2x_1x_2. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Le portrait de phase de ce système est comme illustré à la figure 1.2. Toutes les trajectoires ont tendance à l'origine comme $t \rightarrow \infty$, sauf pour la trajectoire qui suit l'axe x_1 positif, à $+\infty$. En supposant que ce "point à l'infini" est le même que le point à l'infini en $x_1 = -\infty$, nous pouvons affirmer que toutes les trajectoires tendent vers l'origine. Cependant, le point d'équilibre à l'origine n'est pas stable au sens de Lyapunov: étant donné tout $\epsilon > 0$, peu importe la taille d'un δ que nous choisissons pour la boule de condition initiale, il y a toujours des conditions initiales proches de l'axe x_1 qui sortira de la boule E avant de converger vers l'origine. La trajectoire commençant à droite sur l'axe x_1 donne un allusion à ce comportement.

Définition 1.7 Stabilité asymptotique uniforme. Le point d'équilibre $x = 0$ est un point d'équilibre uniformément asymptotiquement stable de (1.1) si

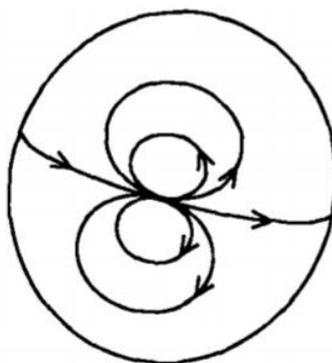


Figure 1.2. Un point d'équilibre, qui n'est pas stable, mais pour lequel toutes les trajectoires tendent à l'origine si l'on inclut le point à l'infini

Cette procédure est appelée en termes mathématiques l'Alexandroff ou un point compactification de R^2 . Une autre manière de conceptualiser cette procédure est d'imaginer que le plan est mappé sur une sphère dont l'origine correspond au pôle nord et le "point à l'infini" vers le pôle sud; c'est-à-dire que l'espace d'états du système est en réalité la sphère S^2 . $x = 0$ est un point d'équilibre uniformément stable de (1.1).

The trajectory $x(t)$ converges uniformly to 0, that is, there exist $\delta > 0$ and a function $\gamma(\tau, x_0) :$

$R_+ * R^n \rightarrow R_+$ tel que $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \gamma(\tau, x_0) = 0$ pour tous $x_0 \in B_\delta$ et

$$|x_0| < \delta \Rightarrow |x(t)| \leq \gamma(t - t_0, x_0) \quad \forall t \geq t_0.$$

Les définitions précédentes sont locales, puisqu'elles concernent les voisinages du point d'équilibre. Stabilité asymptotique globale et stabilité asymptotique uniforme globale sont définies comme suit :

Définition 1.8 Stabilité asymptotique globale. Le point d'équilibre $x = 0$ est un point d'équilibre globalement asymptotiquement stable de (1.1) s'il est stable et $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$

Définition 1.9 Stabilité asymptotique uniforme globale. Le point d'équilibre $x = 0$ est un point d'équilibre globalement, uniformément et asymptotiquement stable de (1.1) s'il est globalement asymptotiquement stable et si en plus, la convergence vers le l'origine des trajectoires est uniforme dans le temps, c'est-à-dire qu'il y a une fonction $\gamma: \mathbb{R}^n * \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ tel que :

$$|x(t)| \leq \gamma(x_0, t - t_0) \quad \forall t \geq 0.$$

Il est instructif de noter que les définitions de la stabilité asymptotique ne quantifient pas la vitesse de convergence des trajectoires vers l'origine. Pour linéaire invariant dans le temps systèmes, la vitesse de convergence des trajectoires vers ou depuis l'origine est exponentielle, mais pour les systèmes variant dans le temps et non linéaires, le taux de convergence peut être de différents types, par exemple comme :

$$\frac{1}{t}, \quad \frac{1}{\sqrt{t}}.$$

C'est un bon exercice d'écrire des exemples de ce comportement. Il y a un fort forme de stabilité qui exige un taux de convergence exponentiel:

Définition 1.10 Stabilité exponentielle, taux de convergence. L'équilibre point $x = 0$ est un point d'équilibre exponentiellement stable de (2.1) s'il existe $m, \alpha > 0$ tel que

$$|x(t)| \leq m e^{-\alpha(t-t_0)} |x_0| \tag{1.8}$$

pour tout $x_0 \in B_h, t \geq t_0 \geq 0$. La constante a est appelée (une estimation de) le taux de convergence.

La stabilité exponentielle globale est définie en exigeant que l'équation (1.8) soit valable pour tous $x_0 \in \mathbb{R}^n$. La stabilité exponentielle semi-globale est également définie de manière analogue, sauf que m, α peuvent être des fonctions de h . Pour les systèmes linéaires

(éventuellement variables dans le temps) on montrera qu'une stabilité asymptotique uniforme équivaut à exponentielle stabilité, mais en général, la stabilité exponentielle est plus forte que la stabilité asymptotique.

1.3 Stabilité de Lyapunov

La deuxième méthode de Lyapunov permet de déterminer les propriétés de stabilité d'un système (1.1) sans intégrer explicitement l'équation différentielle. La méthode est une généralisation de la notion de base qu'une certaine mesure de la "dissipation d'énergie" dans un système nous permet pour conclure à la stabilité. Pour rendre cela précis, nous devons définir exactement ce que l'on entend par «mesure de l'énergie», c'est-à-dire des fonctions énergétiques. Cela nécessite les définitions préliminaires suivantes .

1.3.1 Fonctions de type énergétique

Définition 1.11 Classe K, fonctions KR. Une fonction $\alpha(g): R_+ \rightarrow R_+$ appartient à la classe K (notée $\alpha(g) \in K$) si elle est continue, strictement croissante et $\alpha(0) = 0$. La fonction $\alpha(g)$ est dite appartenir à la classe KR si α est de classe K et en plus, $\alpha(p) \rightarrow \infty$ comme $p \rightarrow \infty$.

Définition 1.12 Fonctions définies localement positives. Une fonction continue $P \in R^{n \times n} > 0$: est appelée fonction définie localement positive (l.p.d.f) si, pour certains $h > 0$ et certains $\alpha(g)$ de classe K.

$$v(0,t) = 0 \text{ et } v(x,t) \geq \alpha(|x|) \quad \forall x \in B_h \quad t \geq 0 \quad (1.9)$$

Un l.p.d.f. est localement comme une «fonction énergétique». Les fonctions qui sont globalement comme des «fonctions énergétiques» sont appelées fonctions définies positives (p.d.f.s) et sont définies comme suit:

Définition 1.13 Fonctions définies positives. Une fonction continue $v(x,t): R^n \times R_+ \rightarrow R_+$ est appelée une fonction définie positive (p.d.f.) si pour un certain $\alpha(g)$ de classe K R.

$$v(0,t) = 0 \text{ et } v(x,t) \geq \alpha(|x|) \quad \forall x \in R^n \quad t \geq 0 \quad (1.10)$$

et, en plus $\alpha(p) \rightarrow \infty$ comme $p \rightarrow \infty$.

Dans les définitions précédentes de l.p.d.f.s et p.d.f.s, l'énergie n'était pas bornée ci-dessus lorsque t variait. C'est le sujet de la prochaine définition

Définition 1.14 Fonctions décroissantes. Une fonction continue $v(x, t) : R^n \times R_+ \rightarrow R_+$ est appelée fonction décroissante si, il existe une fonction $\beta(g)$ De classe **K**, telle que

$$t \geq 0 \quad x \in B_h \quad \forall \quad v(x, t) \leq \beta(|x|) \quad (1.11)$$

Exemple 1.15 Exemples de fonctions de type énergie. Voici quelques exemples de fonctions de type énergie et leur appartenance aux différentes classes introduites dessus. C'est un exercice intéressant pour vérifier les fonctions appropriées des classes **K** et **KR** qui doivent être utilisées pour vérifier ces propriétés.

1. $v(x, t) = |x|^2$: p.d.f., décroissant.
2. $v(x, t) = x^T P x$, $P \in R^{n \times n} > 0$: p.d.f., décroissant.
3. $v(x, t) = (t+1)|x|^2$: p.d.f.
4. $v(x, t) = e^{-t} |x|^2$: décroissant.
5. $v(x, t) = \sin^2(|x|^2)$: l.p.d.f., décroissant.
6. $v(x, t) = e^t x^T P x$ avec P non défini positif: n'appartenant à aucune des classes ci-dessus.
7. $v(x, t)$ pas explicitement dépendant du temps t: décroissant.

1.3.2 Théorèmes de base

D'une manière générale, le théorème de base de Lyapunov stipule que lorsque $v(x, t)$ est un p.d.f. ou un l.p.d.f. et $dv(x, t) / dt < 0$ alors nous pouvons conclure à la stabilité de la point d'équilibre. La dérivée temporelle est prise le long des trajectoires de (1.2), c'est-à-dire,

$$\left. \frac{dv(x, t)}{dt} \right|_{(2.1)} = \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} f(x, t) \quad (1.12)$$

Le taux de changement de $v(X, t)$ le long des trajectoires du champ vectoriel (1.1) est également appelé dérivée de Lie de $v(x, t)$ le long de $f(x, t)$. Dans l'énoncé du théorème suivant, rappelez-vous que nous avons traduit l'origine pour qu'elle se situe au point d'équilibre considéré.

Théorème 1.16 Théorèmes de Lyapunov de base

Conditions sur			
$v(x, t)$	$-\dot{v}(x, t)$		
1.	l.p.d.f. ≥ 0 localement	stable	
2.	l.p.d.f. décroissant ≥ 0 localement	uniformément stable	
3.	l.p.d.f. décroissant	l.p.d.f.	uniformément asymptotiquement stable
4.	p.d.f. décroissant	p.d.f.	globalement unif asymptotiquement stable

Preuve:

1. Puisque v est un l.p.d.f., nous avons cela pour certains $\alpha(g) \in K$.

$$\dot{v}(x, t) \leq 0, \quad \forall t \geq t_0, \quad \forall x \in B_r \tag{1.13}$$

Étant donné $\varepsilon > 0$, définissez $\varepsilon_1 = \min(\varepsilon, r, s)$. Choisissez $\delta > 0$ tel que

$$\beta(t_0, \delta) := \sup_{|x| \leq \delta} v(x, t_0) < \alpha(\varepsilon_1)$$

Un tel δ existe toujours, puisque $\beta(t_0, \delta)$ est une fonction continue de δ et $\alpha(\varepsilon_1) > 0$.

Nous affirmons maintenant que $|x(t_0)| \leq \delta$ implique que $\forall t \geq t_0$. La preuve est par contradiction. Clairement depuis

$$\alpha(|x(t_0)|) \leq v(x(t_0), t_0) < \alpha(\varepsilon_1)$$

il s'ensuit que $|x(t_0)| < \varepsilon_1$. Maintenant si ce n'est pas vrai que $|x(t)| < \varepsilon_1$ pour tout t , soit $t_1 > t_0$ le premier instant tel que $|x(t_1)| \geq \varepsilon_1$, Puis

$$v(x(t_1), t_1) \geq \alpha(\varepsilon_1) > v(x(t_0), t_0) \tag{1.14}$$

Mais c'est une contradiction, puisque $\dot{v}(x(t), t) < 0$ pour tout $|x| < \varepsilon_1$. Ainsi

$$|x| \leq \varepsilon_1 \quad \forall t \geq t_0$$

2. Puisque v est décroissant

$$\beta(\delta) = \sup_{|x| \leq \delta} \sup_{t \geq t_0} v(x, t) \quad (1.15)$$

est non décroissant et satisfait pour certains d

$$\beta(\delta) \leq \infty \quad \text{pour } 0 \leq \delta \leq d.$$

Choisissez maintenant δ tel que $\beta(\delta) \leq \alpha(\varepsilon_1)$.

3. $v(x, t)$ est un l.p.d.f., alors $v(x, t)$ satisfait les conditions de la preuve précédente de sorte que 0 est un point d'équilibre uniformément stable. Il faut montrer l'existence d'un $\delta_1 > 0$ tel que pour $\varepsilon > 0$ il existe $T(\delta) > \infty$ tel que

$$|x_0| \leq \delta_1 \Rightarrow |\phi(t_1 + t, x_0, t_1)| \leq \varepsilon \quad \text{lorsque } t \leq T(\varepsilon)$$

Les hypothèses garantissent qu'il existe des fonctions $\alpha(\cdot), \beta(\cdot), \gamma(\cdot) \in K$ tel que $\forall t \geq t_0, \forall x \in B_r$, tel que

$$\alpha(|x|) \leq v(x, t) \leq \beta(|x|)$$

$$\dot{v}(x, t) \leq -\gamma(|x|)$$

Étant donné $\varepsilon > 0$, définissons δ_1, δ_2 et T par

$$\beta(\delta_1) \leq \alpha(\varepsilon)$$

$$\beta(\delta_1) \leq \min(\alpha(\varepsilon), \beta(\delta_1))$$

$$T = \alpha(\varepsilon) / \gamma(\delta_2)$$

Ce choix est expliqué dans la figure 1.3. Nous montrons maintenant qu'il existe au moins un instant $t_1 \in [t_0, t_0 + T]$ lorsque $|x_0| \leq \delta_2$. La preuve est par contradiction. Rappelons la notation que $\phi(t, x_0, t_0)$ représente la trajectoire de (1.1) à partir de x_0 au temps t_0 . En effet, si

$$|\phi(t, x_0, t_0)| \geq \delta_2 \quad \forall t \in [t_0, t_0 + T]$$

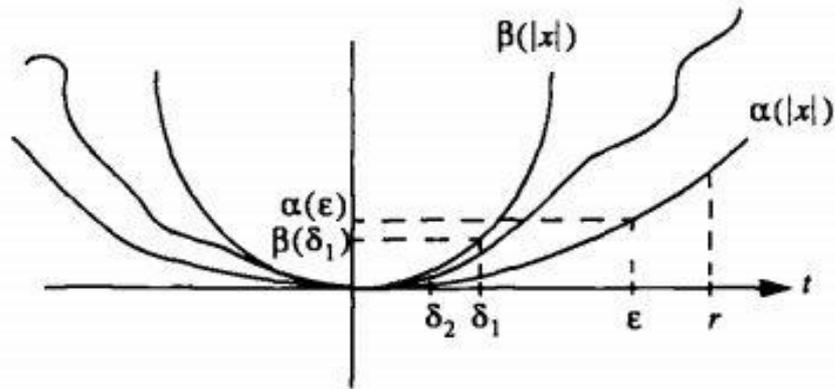


Figure 1.3. Le choix des constantes dans la preuve du théorème de Lyapunov.

puis il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
 0 \leq \alpha(\delta_2) &\leq v(s(t_1+T, x_0, t_1), t_1+T) \\
 &= v(t_1, x_0) + \int_{t_1}^{t_1+T} \dot{v}(\tau, x_0, t_1) d\tau \\
 &\leq \beta(\delta_1) - T\gamma(\delta_2) \\
 &\leq \beta(\delta_1) - \alpha(r) \\
 &< 0.
 \end{aligned}$$

établissant la contradiction (comparez les extrémités de la chaîne d'inégalités précédente pour voir cela). Maintenant, si $t \geq t_1 + T$, alors

$$\begin{aligned}
 \alpha(|\phi(t, x_0, t_1)|) &\leq v(t, \phi(t, x_0, t_1)) \\
 &= v(t_2, \phi(t_2, x_0, t_1))
 \end{aligned}$$

puisque $\dot{v}(x, t) \leq 0$. (En fait, la définition de δ_1 garantit que la trajectoire reste dans B_r de sorte que $\dot{v}(x, t) \leq 0$.) Ainsi

$$\begin{aligned}
 \alpha(|\phi(t, x_0, t_1)|) &\leq v(t_2, \phi(t_2, x_0, t_1)) \leq \beta(\phi(t_2, x_0, t_1)) \\
 &\leq \beta(\delta_2) \\
 &< \alpha(\epsilon)
 \end{aligned}$$

de sorte que $|\phi(t_2, x_0, t_1)| < \epsilon$ pour $t \geq t_1 + T$.

Remarques:

1. La version tabulaire du théorème de Lyapunov vise à mettre en évidence les corrélations suivantes entre les hypothèses sur $v(x, t)$, $\dot{v}(x, t)$ et les conclusions:
 - a. La décroissance de $v(x, t)$ est associée à une stabilité uniforme et le caractère défini positif local de $\dot{v}(x, t)$ étant associé à une asymptotique stabilité.
 - b. $-\dot{v}(x, t)$ doit être un l.p.d.f. pour une stabilité asymptotique.
 - c. $v(x, t)$ étant un p.d.f. est associée à la stabilité mondiale.
Cependant, nous soulignons que cette corrélation n'est pas parfaite, puisque $v(x, t)$ étant l.p.d.f. et $-\dot{v}(x, t)$ étant l.p.d.f. ne garantit pas la stabilité asymptotique locale.
2. La preuve du théorème, bien qu'apparemment simple, est subtile en ce qu'elle est un exercice d'utilisation de contrapositifs.

1.4 Méthode directe de Lyapunov

Afin d'étudier la stabilité non linéaire, la méthode la plus classique est basée sur la linéarisation et l'utilisation de valeurs propres système linéarisées. Lyapunov a proposé que la deuxième méthode consiste à utiliser le principe de stabilité mécanique du système inspiré de l'idée d'énergie mécanique lagrangienne. L'énergie potentielle d'un système formulé comme un état a une valeur minimale isolée et est dans un état d'équilibre stable. Cette méthode, également connue sous le nom de méthode de Lyapunov directe, est basée sur une fonction scalaire recherchée avec un signe négatif valeur réelle. Lorsqu'il est dérivé du temps et représenté par le signe opposé, la vitesse du point $x(x \in R^n)$ pointe toujours à l'intérieur, et ce point finira par atteindre l'origine ; sinon, le point xsien se propagera davantage. Dans certains types de systèmes physiques, la fonction V peut être sélectionnée comme énergie du système. (3)

1.4.1 Théorème de stabilité par la méthode directe

Considérons le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{1.16}$$

En supposant que l'origine est la singularité de (1.16), soit $V : U \rightarrow R$ Fonction infrarouge Classe C^1 définie dans un voisinage U de l'origine, telle que

- i) $V(0) = 0$
- ii) $V(x) > 0$ pour $x \neq 0, x \in U$

Si

- 1) $\frac{dV(x)}{dt} \leq 0$ dans $U - \{0\}$ l'origine est donc stable
- 2) $\frac{dV(x)}{dt} < 0$ dans $U - \{0\}$ l'origine est asymptotiquement stable
- 2) $\frac{dV(x)}{dt} > 0$ dans $U - \{0\}$ l'origine est instable.

Dans ces conditions, la fonction **V** est appelée fonction de Lyapunov ; elle est Définie

Si (1) et (2) sont vrais, ils sont positifs. Veuillez noter que selon ces deux hypothèses, la fonction V n'est que la fonction candidate soit la fonction singe définie. Performances stables si U est égal à \mathbb{R}^n , il est considéré comme global.

Remarque

La méthode directe de Lyapunov convient aux systèmes non autonomes :

$$\frac{dx}{dt} = F(x, t) \tag{1.17}$$

Les conditions i) et ii) ont subi des changements mineurs; cela définit que V (x, t) est positif dans U, et nous devons avoir une fonction continue W (x) dans U

- 1) $W(0) = 0$
- 2) $0 < W(x) \leq V(x, t)$.

La dérivée de V par rapport au temps s'écrit

$$\frac{dV(x,t)}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} \tag{1.18}$$

Par analogie aux systèmes stationnaires il vient

- 3) $\frac{dV(x,t)}{dt} \leq 0$ dans $U - \{0\}$, l'origine est donc stable
- 4) $\frac{dV(x,t)}{dt} < 0$ dans $U - \{0\}$, l'origine est asymptotiquement stable
- 5) $\frac{dV(x,t)}{dt} > 0$ dans $U - \{0\}$, l'origine est instable.

Malheureusement, la méthode directe de Lyapunov donne des conditions suffisantes, mais il n'y a pas besoin de stabilité (pour les systèmes linéaires et les stations, ; un système peut avoir des fonctions de Lyapunov infinies ; par conséquent, le fait que la fonction ne puisse pas prouver la stabilité ne signifie pas une instabilité, ni une instabilité. Certains types de systèmes asymptotiquement stables n'ont pas de fonctions Lyapunov. L'utilité de cette méthode est d'abord de déterminer la zone d'attraction ; cela permet également de répondre à la question de stabilité dans les situations suivantes. La linéarisation ne fournit aucune information. La difficulté à trouver la fonction V est un réel obstacle car nous ne connaissons aucune étape de construction. Fonctions normalement appropriées ; cependant, certaines techniques peuvent être appliquées à la construction de situations spéciales.

1.4.2 Méthode de l'énergie

La stabilité d'un système physique est étroitement liée à son énergie. En effet, un système dans lequel l'énergie diminue finira par atteindre sa position d'équilibre. Prenons par exemple une particule soumise à un frottement visqueux ; il est déterminé par

$$m \frac{dv}{dt} = -\zeta v \quad (1.19)$$

On choisit l'énergie du système $E = \frac{1}{2}mv^2$ comme fonction de Lyapunov, qui est définie positive avec dérivée, par rapport au temps, définie négative $\frac{dE}{dt} = -\zeta v^2$; dans ces conditions, un système linéaire est asymptotiquement stable. Cela peut être vérifié par (1.19). soit $v(t) = v_0 e^{-t\frac{\zeta}{m}}$, lorsque t tend vers l'infini. En général, les méthodes énergétiques entraînent différents niveaux de stabilisation.

- 1) Stabilité asymptotique : si $\frac{dE}{dt} < 0$, elle tient dans tout le voisinage d'équilibre.
- 2) Stabilité conditionnelle : l'énergie n'est réduite que par rapport aux interférences. L'énergie est inférieure à une certaine limite.
- 3) Stabilité asymptotique moyenne : Pour certaines perturbations, il y a une évolution l'énergie n'est pas monotone et ne diminue qu'au stade final.
- 4) Stabilité simple : Pour les perturbations inférieures à une certaine limite, le système énergétique maintient une valeur constante.
- 5) Instable : l'énergie augmente toujours.

1.4.3 Fonction de Lyapunov quadratique

La forme architecturale proposée par Lyapunov lui-même a suscité un grand intérêt. Il peut encore prouver la stabilité asymptotique dans le cas linéaire et convient aux systèmes non linéaires, mais l'efficacité est beaucoup plus faible. soit le système (1.16) dans le format suivant :

$$\frac{dx}{dt} = Ax + G(x) \quad (1.20)$$

où $G(x)$ est la partie non linéaire ; la méthode consiste à trouver une fonction de Lyapunov sous la forme quadratique

$$V(x) = x^T Bx \quad (1.21)$$

Où x est le vecteur d'état, B est une matrice symétrique supposée définie positive, et la dérivée totale de V par rapport au temps du système (1.20) est.

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= (x^T A^T + g^T) Bx + x^T B(Ax + g) \\ &= x^T (A^T B + BA)x + g^T Bx + x^T Bg \\ &= x^T Qx + 2g^T Bx \end{aligned} \quad (1.22)$$

Le terme $x^T Qx$ représente la normalité quadratique de la partie linéaire de la dérivée temporelle (4.5) de la fonction de Lyapunov, qui est asymptotiquement statique lorsque la matrice Q est pré négative. cependant, pour tout nombre m positif, il y a δ si l'on pense que $\|g(x)\| < m \|x\|$ est vérifié pour tout $\|x\| < \delta$; si on considère que β est la plus grande valeur propre de B , q la plus petite valeur propre de Q , il vient $\frac{dV}{dt} \leq -(q - 2\beta m)x^T x$, on peut choisir m de telle sorte que $m < \frac{q}{2\beta}$. Dans ces conditions $\frac{dV}{dt}$ est définie négative à l'intérieur du disque $U = \{x: \|x\| < \delta\}$, la fonction quadratique V vérifie les conditions d'une fonction de Lyapunov ; de plus, elle peut servir à la détermination du domaine d'attraction .

1.4.4 Construction de Krasofski

Il s'agit de construire des fonctions de Lyapunov à partir de fonctions quadratiques de Lyapunov. Les champs vectoriels sont des paramètres particulièrement intéressants pour étudier la stabilité dans l'espace. La fonction V s'écrit

$$V(x) = F^T(x) B F(x) \quad (1.23)$$

Où B représente une matrice symétrique, en supposant qu'elle est définie positive, donc la fonction V est également un nombre positif, écrivez la dérivée de F par rapport au temps

$$\frac{\partial F(x)}{\partial t} = \frac{\partial F(x)}{\partial x} \frac{dx}{dt} = AF(x) \quad (1.24)$$

A est la matrice Jacobienne de F , la dérivée de V par rapport au temps est

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \frac{\partial F^T}{\partial t} BF + F^T B \frac{\partial F}{\partial t} \\ &= F^T (A^T B + BA) F = F^T CF \end{aligned} \quad (1.25)$$

Si la matrice C est négative, la fonction (1.23) est la fonction de Lyapunov du système non linéaire.

1.4.5 Application

Dans cette application . nous implémenterons la construction des fonctionnalités de Lyapunov.

1.4.5.1 Construction de la fonction de Lyapunov par la méthode de l'énergie

Un pendule avec une friction visqueuse est modélisé par

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{\mu}{I} \frac{d\theta}{dt} + \frac{mgl}{I} \sin \theta = 0 \quad (1.26)$$

avec un coefficient de frottement $\mu > 0$, et un moment d'inertie I , en posant $\theta = x_1$, $\frac{d\theta}{dt} = x_2$, (1.27) devient

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = -\frac{\mu}{I} x_2 - \frac{mgl}{I} \sin x_1 \end{cases} \quad (1.27)$$

la fonction énergie s'écrit

$$E(x) = \frac{1}{2} ml^2 x_2^2 + mgl(1 - \cos x_1) \quad (1.28)$$

Il est défini positif dans une petite plage de l'origine et de sa dérivée, et le temps est négatif.

$$\frac{dE(x)}{dt} = -\mu x_2^2 \quad (1.29)$$

l'origine de (1.11) est donc asymptotiquement stable.

1.4.5.2 Fonction de Lyapunov quadratique

Considérons le système suivant

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \left(1 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right) \frac{dx}{dt} + x = 0 \quad (1.30)$$

qui peut se mettre sous la forme

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = -(1 + x_2^2)x_2 - x_1 \end{cases} \quad (1.31)$$

on choisit une fonction de Lyapunov définie positive

$$V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) \quad (1.32)$$

sa dérivée par rapport au temps s'écrit

$$\frac{dV(x)}{dt} = -x_2^2(1 + x_2^2) \quad (1.33)$$

C'est négatif, donc la stabilité asymptotique de l'origine. Les figures (1.4) et (1.5) montrent des schémas des fonctions de Lyapunov (1.28) et (1.32).

1.4.6 Commentaires

Bien que le standard de stabilité de linéarisation soit clairement défini et que la linéarisation classique se soit strictement avérée être un échec car elle suppose l'existence d'une matrice jacobienne de points d'équilibre, l'absence de cette hypothèse n'est pas toujours vérifiée. Par exemple, considérons le cas d'un serveur qui contient les éléments suivants: Un organe non linéaire plus ou moins actif, dans ce cas sa fonction n'est pas continue et non différentiable près de l'équilibre, et la version classique linéarisée fournit une condition nécessaire mais pas suffisante, car il ne permet pas de juger de la stabilité de la valeur propre avec une partie réelle nulle. Trouver une fonction Lyapunov est un problème délicat en soi, car il est basé sur «l'expérience et la chance» en général.

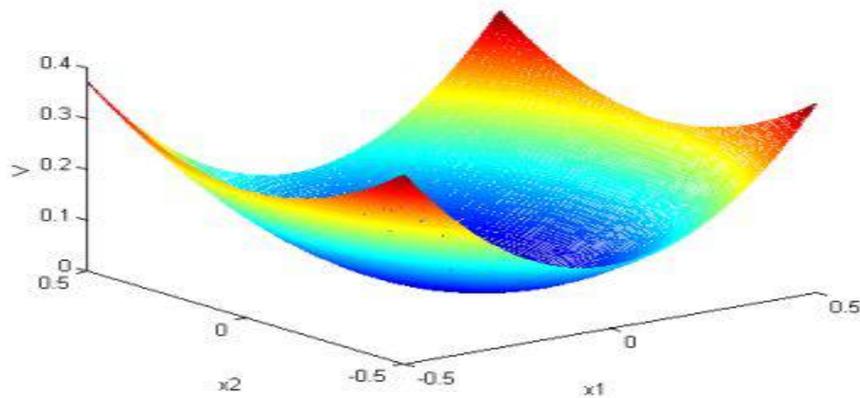


Figure 1.4. Représente la fonction énergie du système non linéaire (1.27).

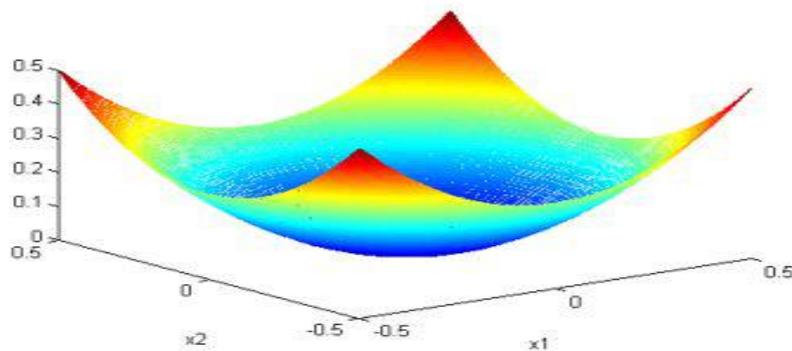


Figure 1.5. Représente la fonction de Lyapunov quadratique du système non linéaire (1.31).

1.5 Notions de passivité et dissipativité

La caractéristique d'atténuation des perturbations est liée au concept passif suivant .

Définition 1.17. système non linéaire sous la forme:

$$\dot{x} = f(x, \omega)$$

(1-34)

$$z = h(x, \omega)$$

$x(0) = x_0$ est dissipé localement autour de $(x, \omega) = (0, 0)$, S'il y a une fonction de stockage positive $S(x)$ telle que $S(0) = 0$, et une fonction $s(w, z)$ est localement intégrale pour tous les ω , alors

$$S(x) - S(x_0) \leq \int_0^t s(\omega(\tau), z(\tau)) d\tau \tag{1-35}$$

sur tout l'intervalle $[0, t]$.

Si $S(x)$ est différentiable, l'équation (1.35) peut être mise sous la forme

$$\dot{S}(x) \leq s(\omega, z) \quad (1-36)$$

$$\frac{dS}{dx} f(x, \omega) \leq s(\omega, h(x, \omega)) \quad (1-37)$$

Une particularité de s permet de définir la passivité du système (1.34)

Definition 1.18. (Van der Shaft (2000)) Si le système (1.6) est dissipative et la fonction s est représentée par $s(\omega, z)$, alors le système est dit passif $s(\omega, z) = \omega^T z$

1.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté brièvement la théorie de Lyapunov ainsi que les principaux résultats concernant la stabilité à l'aide des fonctions de Lyapunov, À partir de sa théorie nous avons vu la Méthode directe qui a proposée par Lyapunov.

Chapitre 2

Commande H_∞ non-linéaires

2.1.Introduction

En raison des exigences toujours croissantes en matière de qualité et de performance, de systèmes de servocommande et de la demande croissante de «meilleures solutions de compromis», les charges d'asservissement industrielles des ordinateurs portables sont de plus en plus complexes et compactes. Tout cela a pour conséquence que l'hypothèse de linéarité est invalide: l'effet non linéaire du système n'est plus insignifiant, ou même s'il est insignifiant, le correcteur non linéaire est généralement nécessaire pour répondre aux exigences de performances. Le principal problème ici est de trouver un cadre théorique qui puisse être validé. Les propriétés mathématiques du modèle indiquent que la performance recherchée n'est pas linéaire. Toutes ces vues ont conduit certains auteurs à s'intéresser aux problèmes de contrôle non linéaire, notamment l'extension de la méthode H_∞ dans le cadre du contrôle non linéaire. , sont les premiers travaux concluants, basés sur la commande H_∞ du système non linéaire.

Nous citons ici quelques travaux qui ont contribué à la solution du problème de contrôle non linéaire H_∞ de manière spécifique.

- **Ball et Halton dans [BaHe88]** ont développé la théorie de la commande système H_∞ pour atteindre la non-linéarité en établissant des liens avec la théorie des systèmes différentiels.
- **Dans [VDS91] et [VDS92]**, Van der Schaft donne la définition de la norme H norme dans le cas non linéaire «gain L_2 », et montre que la solution du problème de contrôle H_∞ non linéaire est calculée à partir de la solution du Hamilton_Jacobi équation, qui est la version non linéaire de l'équation de Riccati du problème de contrôle linéaire H_∞ , et le fait, la relation entre la commande H_∞ des systèmes non linéaires et la commande H_∞ des systèmes linéarisés.

- **Isidori** et **Astolfi** ont développé une condition suffisante pour l'existence de la commande H_∞ non linéaire, et démontrent la stabilité asymptotique d'un système grâce au principe d'invariance de Salle [IsAs92].
- **Lu** et **Doyle** ont généralisé la commande standard de solution linéaire H_∞ dans l'espace d'états du problème, et ont utilisé la non-linéarité fractionnaire du contrôleur H_∞ paramétrée par transformation [LuDo95].
- **Isidori** a décrit la solution du problème de contrôle H_∞ non linéaire en 1992 et a supposé l'existence de l'équation de Hamilton Hamilton [Is 92].
- En 1994, **Astolfi** a appliqué la méthode donnée par Isidori [As94] au modèle de robot.
- Les auteurs de [VDS 92] et [IsAs 92] montrent que sur la base du concept de dissipation d'énergie, un problème de commande H non linéaire est dérivé de l'analyse de gain L2. Ensuite, ils ont donné une solution approximative à l'équation de Hamilton Jacobi.

2.2.Problématique de la commande H_∞ non linéaire

Le problème du contrôle H_∞ non linéaire est de concevoir le modèle d'état non linéaire dynamique du contrôleur, qui se présente sous la forme:

$$K: \begin{cases} \dot{\xi} = A_k(\xi) + B_k(\xi)y \\ u = C_k(\xi) \end{cases} \quad (2.1)$$

qui assure

- Stabilité asymptotique des systèmes non linéaires en boucle fermée.
- Réduire l'impact des investissements externes

ζ est le vecteur d'état du correcteur, y est le vecteur de sortie du système et u est la commande.

La structure du contrôleur non linéaire (2.1) est linéaire. Le contrôleur se compose d'un observateur non linéaire (l'observateur) et d'une action de contrôle.

Le problème de l'atténuation d'une entrée externe en restaurant un état non linéaire équivaut à trouver une commande pour dissiper le système.[4]

Avant de définir un système dissipatif, nous allons parler de la norme H_∞ non linéaire :

La norme linéaire H_∞ est définie comme la norme de la matrice de transfert et n'est pas directement étendue aux systèmes non linéaires. Cependant, dans l'intervalle de temps, la norme H_∞ n'est rien d'autre que la norme provoquée par la norme \mathcal{L}_2 sur son signal. En d'autres termes, pour le système Σ du vecteur d'entrée u et du vecteur de sortie y :

$$\|\Sigma\|_\infty = \max_{u \in \mathcal{L}_2} \frac{\|y\|_2}{\|u\|_2} \quad (2.3)$$

Cette dernière norme s'applique également aux systèmes non linéaires et est appelée «gain L_2 » des systèmes non linéaires.

2.3. Gain L_2

Nous considérons la forme générale d'un système non linéaire:

$$\begin{cases} \dot{x} = F(x, w, u) \\ z = Z(x, u) \\ y = Y(x, u) \end{cases} \quad (2.4)$$

où $x \in R^n$ est le vecteur d'état, $u \in R^m$ est la commande, $y \in R^p$ est la sortie de mesure, $z \in R^x$ est la sortie objective et $w \in R^r$ est l'entrée exogène. Le gain L_2 d'un tel système est définie par

$$\text{gain } L_2 = \frac{\int_0^T \|z(t)\|^2 dt}{\int_0^T \|w(t)\|^2 dt} \quad (2.5)$$

T est l'horizon. Un système non linéaire avec l'état initial $x(0) = 0$ a un gain L_2 inférieur ou égale à γ ($\gamma > 0$) si pour tout $T \geq 0$ et $w(t) \in \mathcal{L}_2[0, T]$.

$$\int_0^T \|z(t)\|^2 dt \leq \gamma^2 \int_0^T \|w(t)\|^2 dt \quad (2.6)$$

2.4. Définition d'un système dissipatif

Si la fonction $V(x)$ est non négative telle que $V(0) = 0$, alors le système non linéaire de forme générale (III-3) est dissipatif :

$$\int_0^T \{ \|z\|^2 - \gamma^2 \|w\|^2 \} dt \leq V(0) - V(T) \leq -V(T) \quad (2.7)$$

Cette dernière inégalité signifie que la norme H_∞ du système, pour $T \rightarrow \infty$, est inférieure ou égale à γ .

Pour $g = 1$, cette inégalité signifie que l'énergie d'entrée est supérieure ou égale à l'énergie de sortie. En d'autres termes, l'énergie a été dissipée, c'est ce qu'on appelle un système dissipatif

2.5 Problème de commande H_∞ non linéaire

Le problème de commande H_∞ non linéaire est équivalent à trouver un correcteur K de la forme (III-1) qui :

- stabilise le système (III-3)
- minimise $\frac{\int_0^T \|z(t)\|^2 dt}{\int_0^T \|w(t)\|^2 dt}$

2.6 Hypothèses d' existence de la commande H_∞ non linéaire

La résolution du problème de commande H_∞ non linéaire n'est possible que sous les hypothèses suivantes .

- **Hypothèse 1**

Il existe des fonctions uniques $w_*(x, p)$ et $u_*(x, p)$ définies au voisinage de $(0,0)$ qui satisfaits

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial w}(x, p, w_*(x, p), u_*(x, p)) &= 0 \\ \frac{\partial H}{\partial u}(x, p, w_*(x, p), u_*(x, p)) &= 0 \\ w_*(0,0) &= 0 \quad u_*(0,0) = 0 \end{aligned} \tag{2.8}$$

tel que

$$\begin{aligned} H(x, p, w, u_*(x, p)) &\leq H(x, p, w_*(x, p), u_*(x, p)) \\ &\leq H(x, p, w_*(x, p), u) \end{aligned} \tag{2.9}$$

où H est la fonction Hamiltonienne définie par

$$H(x, p, w, u) = p^T F(x, w, u) + \|z(x, u)\|^2 - \gamma^2 \|w\|^2 \tag{2.10}$$

et
$$p^T = V_x = \frac{\partial V}{\partial x} \tag{2.11}$$

- **Hypothèse 2**

Chaque trajectoire $x(t)$ du système $\dot{x}(t) = F(x(t), 0, u(t))$ satisfait $Z(x(t), u(t)) = 0$ pour tout $t \geq 0$ tel que $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$

Cette dernière hypothèse est la version non linéaire qu'un système linéaire ayant une entrée u et une sortie $z(w = 0)$ n'a pas de zéros sur l'axe imaginaire.

Dans la littérature, le problème de commande H_∞ non linéaire est traité pour une classe particulière des systèmes non linéaires. Cette classe est donnée par:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g_1(x)w + g_2(x)u \\ z = h_1(x) + K_{11}(x)w + K_{12}(x)u \\ y = h_2(x) + K_{21}(x)w + K_{22}(x)u \end{cases} \quad (2.11)$$

où $x \in R^n$ est le vecteur d'état, $u \in R^m$ est la commande, $y \in R^p$ est la sortie de mesure, $z \in R^s$ est la sortie objective et $w \in R^r$ est l'entrée exogène.

Le système non linéaire ainsi écrit est appelé système affine non linéaire à l'entrée.

Afin de simplifier l'analyse de la commande H_∞ non linéaire, les hypothèses suivantes sont considérées.

Hypothèses simplificatrices [ChDaSe98]

$$K_{11}(x) = 0 \text{ et } K_{22}(x) = 0 \quad (2.12)$$

$$K_{12}(x)^T [h_1(x) \ K_{12}(x)] = [0 \ I] \quad (2.13)$$

$$\begin{bmatrix} g_1(x) \\ K_{21}(x) \end{bmatrix} K_{21}^T(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

$$[h_1(x) \ f(x)] \text{ est détectable à l'état nul} \quad (2.15)$$

Le système nominal est atteignable à l'origine

- Sous ces hypothèses, le système donné par l'équation (2.11) peut s'écrire sous cette forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g_1(x)w + g_2(x)u \\ z = h_1(x) + K_{12}(x)u \\ y = h_2(x) + K_{21}(x)w \end{cases} \quad (2.16)$$

2.7 Solution du problème H_∞ des systèmes non linéaires

La solution du problème de commande H_∞ non linéaire est donnée moyennant le théorème suivant:

Théorème :

Sous les hypothèses précédentes, s'il y a une certaine fonction positive "v" près de $x = 0$, alors $V(0)=0$, satisfaisant l'inégalité (2-6); alors la méthode de commande

$$u = -\frac{1}{2}g_2^T \frac{\partial V^T}{\partial x} = -g_2^T X \quad (2.17)$$

Résolution du problème de contrôle non linéaire H_∞ (stabilité interne et atténuation des perturbations).

Le contrôleur non linéaire H_∞ est donné par:

$$K: \begin{cases} \dot{\zeta} = A_k(\zeta) + B_k(\zeta)y \\ u = C_k(\zeta) \end{cases} \quad (2.18)$$

où

$$A_k = f(\zeta) + \gamma^{-2}g_1(\zeta)g_1^T(\zeta)X(\zeta) + g_2(\zeta)C_k(\zeta) - B_k(\zeta)h_2(\zeta) \quad (2.19)$$

$$C_k(\zeta) = -g_2^T(\zeta)X(\zeta) \quad (2.20)$$

$B_k(\zeta)$ satisfait l'équation suivante

$$[Y(x) - X(x)]^T B_k(\zeta) = \gamma^2 h_2^T(\zeta) \quad (2.21)$$

$X(\zeta)$ et $Y(\zeta)$ sont les solutions de deux équations appelées équations de Hamilton Jacobi, données respectivement par (2.22) et (2.23).

$$H_{FI}(V, x) \equiv \frac{\partial V}{\partial x} f + \frac{1}{4} \frac{\partial V}{\partial x} (\gamma^{-2} g_1 g_1^T - g_2 g_2^T) \frac{\partial V^T}{\partial x} + h_1^T h_1 = 0 \quad (2.22)$$

$$H_{FC}(U, x) \equiv \frac{\partial U}{\partial x} f + \gamma^{-2} h_1^T h_1 - h_2^T h_2 + \frac{1}{4} \frac{\partial U}{\partial x} g_1 g_1^T \frac{\partial U^T}{\partial x} = 0 \quad (2.23)$$

Où

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 2X \quad \text{et} \quad \frac{\partial U}{\partial x} = 2Y \quad (2.24)$$

Ces deux équations sont des versions non linéaires des deux équations de Riccati. L'équation (2-22) est considérée comme un filtrage, et l'équation (2-23) est considérée comme un contrôle.

2.5 Résolution du problème de commande H_∞ non linéaire via la méthode des approximations successives

Sur la base du concept de consommation d'énergie, à partir du gain d'analyse L2, la théorie des commandes H_∞ des systèmes non linéaires est développée. Comme l'équation de Hamilton Jacobi (inégalité), sa solution exacte n'existe pas ou ne peut pas être calculée, son application n'est donc pas facile. En particulier, deux méthodes ont été utilisées dans la littérature pour résoudre ce problème. La première consiste à utiliser l'algorithme d'approximation successive pour calculer la solution approchée de l'équation de Hamilton Jacobi [HuYaCh99] [HuyaJu00], qui sera présentée dans la section suivante. La deuxième méthode est basée sur l'inégalité matricielle non linéaire (NLMI) [YiPa99] [Asep03] et [Naj00].

Afin de trouver le contrôleur H_∞ du théorème précédent, nous devons résoudre l'équation de Hamilton Jacobi (2-22), dont la solution est inconnue ou difficile à calculer. La valeur approximative de la solution de l'équation de Hamilton Jacobi peut être calculée par la méthode d'approximation successive introduite dans cette section.

Cette méthode est le résultat de l'extension de la méthode basée sur l'équation de Riccati dans le cas du contrôle linéaire H_∞ au cas non linéaire. Le principe de cette méthode est basé sur la discrétisation spatiale, et sa réalisation nécessite de linéariser le système non linéaire.

La première étape est donc, de considérer le modèle linéarisé de (2.16) autour du point $(0, 0)$:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_1w + B_2u \\ z = C_1x + D_{12}u \\ y = C_2x + D_{21}w \end{cases} \quad (2.25)$$

Où

$$A = \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{x=0} \quad B_1 = g_1(0) \quad B_2 = g_2(0) \quad C_1 = \left. \frac{\partial h_1(x)}{\partial x} \right|_{x=0}$$

$$C_2 = \left. \frac{\partial h_2(x)}{\partial x} \right|_{x=0} \quad D_{12} = K_{12}(0) \quad D_{21} = K_{21}(0)$$

La solution approximée de l'équation de Hamilton-Jacobi est, alors calculée à partir de cette égalité.

$$-\frac{\partial V^{(k)}}{\partial x} F_c x = \sum_{m=2}^{k-1} \frac{\partial V^{(m)}}{\partial x} f_h^{(k-m+1)} + \sum_{m=3}^{k-1} \frac{\partial V^{(k-m+2)}}{\partial x} \frac{1}{4} R_s \frac{\partial^T V^{(m)}}{\partial x} + \sum_{n=1}^{k-2} \sum_{m=2}^{k-n} \frac{\partial V^{(k-n-m+2)}}{\partial x} R_h^{(n)} \frac{\partial^T V^{(m)}}{\partial x} + Q_h^{(k)}$$

(2.26)

où $k \geq 3$ est un entier.

Avec

$$F_c = A + R_s X$$

ou X est la solution de l'équation de Riccati suivante

$$A^T X + XA + X(\gamma^{-2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T) X + C_1^T C_1 = 0 \quad (2.27)$$

$$R_s = \gamma^{-2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T \quad (2.28)$$

f_h, R_h et Q_h sont calculées à partir des équations suivantes:

$$f(x) = Ax + f_h(x) \quad (2.29)$$

$$\frac{1}{4} (\gamma^{-2} g_1(x) g_1^T(x) - g_2(x) g_2^T(x)) = \frac{1}{4} (\gamma^{-2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T) + R_h(x) \quad (2.30)$$

$$h_1^T(x) h_1(x) = x^T C_1^T C_1 x + Q_h \quad (2.31)$$

$$f_h(x) = O(x^2) \quad R_h(x) = O(x) \quad Q_h(x) = O(x^3) \quad (2.32)$$

$O(x)$ est le symbole de Landau généralisé d'ordre 1.

$O(x^2)$ est le symbole de Landau généralisé d'ordre 2.

$O(x^3)$ est le symbole de Landau généralisé d'ordre 3.

En fait, nous pouvons construire une série d'équations linéaires en comparant les coefficients de deux nombres égaux (2-26). $V^{(k)}$ est la seule solution à toutes ces équations linéaires.

Pour chaque étape k

$$V^{[k]}(x) = \sum_{m=2}^k V^{(m)}(x) = x^T X x + \sum_{m=3}^k V^{(m)}(x) \quad (2.32)$$

$(\cdot)^{(k)}$ est un terme d'ordre k

$(\cdot)^{[k]}$ est un terme d'ordre k accumulé incluant x^k

$$\frac{\partial V^{[k]}}{\partial x} = 2x^T X + \sum_{m=3}^k \frac{\partial V^{(m)}}{\partial x} \quad (2.33)$$

$\frac{\partial V^{(m)}}{\partial x}$ est d'ordre $m - 1$

Enfin, la solution approximative de l'équation de Hamilton Jacobi est:

$$X^{[k-1]}(x) = \frac{1}{2} \frac{\partial^T V^{[k]}}{\partial x} = X x + \frac{1}{2} \sum_{m=3}^k \frac{\partial^T V^{(k)}}{\partial x} = X^{[k-2]}(x) + \frac{1}{2} \frac{\partial^T V^{(k)}}{\partial x} \quad (2.34)$$

2.8 Algorithme des approximations successives

Etape 1 : Initialisation

- Linéarisation d'un modèle système non linéaire autour de l'origine.
- Le calcul de x , la solution de l'équation de Riccati (2.27) et le calcul du meilleur γ .
- Initialisation de la solution de l'équation de Hamilton-Jacobi

$$\frac{\partial V^{(2)}}{\partial x} = 2x^T X$$

- Fixer:

- Le vecteur tolérance ε .

-Le nombre d'itération N.

Etape 2 : Calcul des approximations

- L'approximation successive est calculée en comparant les coefficients de l'équation suivante:

$$-\frac{\partial V^{(k)}}{\partial x} F_c x = \sum_{m=2}^{k-1} \frac{\partial V^{(m)}}{\partial x} f_h^{(k-m+1)} + \sum_{m=3}^{k-1} \frac{\partial V^{(k-m+2)}}{\partial x} \frac{1}{4} R_s \frac{\partial^T V^{(m)}}{\partial x} + \sum_{n=1}^{k-2} \sum_{m=2}^{k-n} \frac{\partial V^{(k-n-m+2)}}{\partial x} R_h^{(n)} \frac{\partial^T V^{(m)}}{\partial x} + Q_h^{(k)}$$

- Calcul de la solution approximé de l'équation de Hamilton Jacobi

$$\begin{aligned} X^{[k-1]}(x) &= \frac{1}{2} \frac{\partial^T V^{[k]}}{\partial x} = Xx + \frac{1}{2} \sum_{m=3}^k \frac{\partial^T V^{(k)}}{\partial x} \\ &= X^{[k-2]}(x) + \frac{1}{2} \frac{\partial^T V^{(k)}}{\partial x} \end{aligned}$$

Etape 3 : Vérification

Si $X^{[k-1]}(x) - X^{[k-2]}(x) \leq \varepsilon$

Calculer la commande $u = -g_2^T(x)X^{[k-1]}(x)$.

Sinon $k = k + 1$

Si $k \leq N + 3$

Recommencer l'étape 2

Sinon calculer la commande $u = -g_2^T(x)X^{[k-1]}(x)$.

Fin

Fin

Une fois que la solution approximative de l'inégalité de Hamilton-Jacobi est calculée, elle est remplacée par les valeurs des équations (2.19) et (2.20) pour calculer les matrices A_k et C_k . D'autre part, B_k implique la solution de la seconde inégalité de Hamilton-Jacobi (2.23) dans son expression, dont la solution est inconnue. Lu et Chang ont suggéré dans leurs travaux de considérer B_k comme égal à sa valeur équivalente dans le cas d'un correcteur linéaire.

2.9 Commande H^∞ des systèmes non linéaires affines

Dans la section précédente, en raison de la nature générale des fonctions F , Z et Y , il est impossible de dériver une loi de commande claire. Dans cette partie, nous nous intéressons aux systèmes non linéaires de type affine .

➤ Affine en état:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(\omega, u)x + g_1(\omega) + g_2(u) \\ z &= h_1(\omega, u)x + k_{11}(\omega) + k_{12}(u) \\ y &= h_2(\omega, u)x + k_{21}(\omega)\end{aligned}$$

➤ Affine en entrée exogène et en commande :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + g_1(x)\omega + g_2(x)u \\ z &= h_1(x) + k_{11}(x)\omega + k_{12}(x)u \\ y &= h_2(x) + k_{21}(x)\omega\end{aligned}\tag{2.35}$$

Maintenant, nous nous intéressons aux systèmes affines non linéaires dans les entrées et commandes externes. Avec ce type de représentation, il sera possible de dériver des lois de contrôle explicites qui ne sont plus aussi courantes qu'auparavant.

2.9.1 Commande par retour d'état

Dans la commande par retour d'état les états sont accessibles en mesure, c.à.d $y = x$. Le système sera donc décrit par les équations suivantes

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + g_1(x)\omega + g_2(x)u(x) \\ z &= h_1(x) + k_{11}(x)\omega + k_{12}(x)u(x)\end{aligned}\tag{2.36}$$

Les fonctions $f(x)$, $g_1(x)$ et $g_2(x)$ sont des non-linéarités lisses de dimensions appropriées. Supposons que le système (2.36) a un point d'équilibre à l'origine de \mathfrak{R}^n , donc sans perte de généralité, nous supposons $f(0) = 0$ et $h_1(0) = 0$.

La variable de pénalité z a un large éventail de choix. Si le problème avec la commande est de minimiser les erreurs, alors $x = 0$, nous avons $z^T z = x^T x$ ou $z^T z = x^T Q x$ ($h_1(x) = Q^{\frac{1}{2}}x$ et $k_{12}(x) = 0$), avec $Q = Q^T \geq 0$ est une matrice symétrique semi-définie positive, décrivant les poids relatifs à chaque état.

Si l'objectif est de minimiser l'énergie du signal de commande, nous choisirons $z^T z = u^T u$ ou $z^T z = u^T R u$ ($h_1(x) = 0$ et $k_{12}(x) = R^{1/2}$), avec $R = R^T > 0$ est une matrice symétrique définie positive décrivant les poids relatifs à chaque commande.

Nous pouvons combiner les deux objectifs pour avoir le critère général suivant

$$z^T z = x^T Q x + u^T R u \quad (2.37)$$

Si nous voulons atteindre rapidement le point d'équilibre, nous devons augmenter. Par rapport à R, Q est très situé sur Q. Par contre, si l'on veut économiser de l'énergie, il faut fortement augmenter R par rapport à Q cette fois.

Dans le cas d'un ordre non linéaire, généralement $h_1(x)$ et $k_{12}(x)$ sont des fonctions non linéaires arbitrairement lisses, pas nécessairement des fonctions quadratiques. Afin de simplifier l'analyse, les hypothèses suivantes sont appliquées (Isidori et Astolfi (1992), Van der Schaft (1992), Isidori et Kang (1995), Van der Schaft (2000))

$$\begin{aligned} k_{11}(x) &= 0 \\ h_1^T(x) k_{12}(x) &= 0 \\ k_{12}^T(x) k_{12}(x) &= I \end{aligned} \quad (2.38)$$

Cette dernière est appelée l'hypothèse simplifiée de Doyle-Glover-Khargonekar Francis (DGKF). La première hypothèse est évidente, car d'une manière générale, il n'y a pas de relation directe entre l'entrée exogène et la variable de pénalité z. Dans ce cas, nous parlons de Retour statique. Les deux autres hypothèses imposent l'orthogonalité entre $h_1(x)$ et la commande u dans la norme de z d'une part, et d'autre part la matrice forte pondérée déclassant R est égale à la matrice identité. La variable de pénalité z s'écrira sous la forme suivante: Suivant

$$z = \begin{bmatrix} h_1(x) \\ u \end{bmatrix}$$

et sa norme sera $\|z\|^2 = z^T z = \|h_1(x)\|^2 + \|u\|^2$.

Le problème de la commande de rétroaction d'état \mathcal{H}_∞ optimale est de trouver la valeur minimale $\gamma^* \geq 0$ et la loi de commande de rétroaction d'état associée $u_*(x)$, de sorte que pour toute valeur de $\gamma > \gamma^*$, le système décrit l'asymptotique (2.36) Stable et le gain \mathcal{L}_2 est

inférieur ou égal à $\gamma > 0$. Le principe de la commande sous-optimale \mathcal{H}_∞ Le théorème suivant prouve le retour d'état est mis en évidence par le théorème suivant

Théoreme 2.7.1. Soit $\gamma > 0$. S'il existe une fonction définie positive $V(x)$ solution de l'équation de Hamilton-Jacobi-Isaacs (HJI) suivante

$$V_x(x)f + h_1^T h_1 + \frac{1}{4}V_x(x) \left(\frac{1}{\gamma^2} g_1 g_1^T - g_2 g_2^T \right) V_x^T(x) = 0, V(x_0) = 0 \quad (2.39)$$

alors, avec la loi de commande suivante

$$u_*(x) = -\frac{1}{2} g_2^T V_x^T(x) \quad (2.40)$$

le système en boucle fermée (2.36) – (2.40) est asymptotiquement stable et possède un \mathcal{L}_2 gain $\leq \gamma$.

manifestation. Utilisez l'équation intermédiaire suivante

$$\begin{aligned} g_2^T V_x^T(x) &= -2u_*(x) \\ \gamma^2 \left\| \omega - \frac{1}{2\gamma^2} g_1^T V_x(x)^T \right\|^2 &= \gamma^2 \|\omega\|^2 + \frac{1}{4\gamma^2} V_x(x) g_1 g_1^T V_x^T(x) - V_x(x) g_1 \omega \end{aligned}$$

En complétant le carré de l'équation (2.39), nous obtiendrons facilement

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= V_x(x)f + V_x(x)g_1\omega + V_x(x)g_2u \\ &= \left\| u + \frac{1}{2} g_2^T V_x^T(x) \right\|^2 - \gamma^2 \left\| \omega - \frac{1}{2\gamma^2} g_1^T V_x^T(x) \right\|^2 \\ &\quad - \|h_1\|^2 - \|u\|^2 + \gamma^2 \|\omega\|^2 \end{aligned} \quad (2.41)$$

Selon la loi de contrôle (2.40) et la norme de z , nous aurons

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= -\gamma^2 \left\| \omega - \frac{1}{2\gamma^2} g_1^T V_x^T(x) \right\|^2 - \|z\|^2 + \gamma^2 \|\omega\|^2 \\ &\leq -\|z\|^2 + \gamma^2 \|\omega\|^2 \end{aligned} \quad (2.42)$$

L'intégration de dV/dt , de $t = 0$ à $t = T \geq 0$, donne

$$\int_0^T \|z(t)\|^2 dt \leq \gamma^2 \int_0^T \|\omega(t)\|^2 dt + V(x_0) - V(x(T)) \quad (2.43)$$

puisque $V(x_0) = 0$ et $V > 0$, on conclut que le système (2.36) a un \mathcal{L}_2 -gain ≤ 0 . Pour démontrer la stabilité du système en boucle fermée on pose $\omega = 0$ et on obtiendra ainsi

$$\frac{dV}{dt} = -\gamma^2 \left\| \frac{1}{2\gamma^2} g_1^T V_x^T(x) \right\|^2 - \|z\|^2 \leq -\|z\|^2 \leq 0$$

Par conséquent, le système en boucle fermée est stable. Pour prouver sa stabilité asymptotique, nous notons que toute vérification de trajectoire

$$\frac{dV}{dt} = 0$$

Faites $h_1(x(t)) = 0$ et $u = 0$ lorsque $t \geq 0$. En remplaçant (2.36), nous aurons

$$\dot{x} = f(x)$$

$$z = h_1(x)$$

Or, si (f, h_1) est détectable ($h_1(x) = 0$ implique $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$), alors selon le théorème de LaSalle, le point d'équilibre est asymptotiquement stable.

Remarque 2.7.1. Le problème de retour de commande \mathcal{H}_∞ est considéré comme un jeu de différence à deux (Abu-Khalaf (2005b)):

$$\min_u \max_\omega H(x, V_x^T, \omega, u) = \max_\omega \min_u H(x, V_x^T, \omega, u) = 0 \quad (2.44)$$

tel que

$$H(x, V_x^T, \omega, u) = V_x(f(x) + g_1(x)\omega + g_2(x)u) + \|h_1\|^2 + \|u\|^2 - \gamma^2 \|\omega\|^2 \quad (2.45)$$

La condition (2.44) est appelée la condition Isaacs.

La stratégie donnée par (2.40) $u = u_*(x)$, est obtenue en minimisant l'hamiltonien H

Utilisez les conditions d'optimalité Bellman suivantes

$$\left. \frac{\partial H}{\partial u} \right|_{u=u_*} = g_2^T V_x^T + 2u = 0, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial u^2} = -2 > 0$$

Il est considéré comme la meilleure stratégie pour minimiser Hamilton H.

Maintenant, maximisez le hamiltonien H avec les conditions optimales suivantes

$$\left. \frac{\partial H}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega_*} = g_1^T V_x^T - 2\gamma^2 \omega = 0, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial \omega^2} = -2\gamma^2 < 0$$

nous aurons

$$\omega_*(x) = \frac{1}{2\gamma^2} g_1^T V_x^T(x) \quad (2.46)$$

Cette dernière est considérée comme l'interférence la plus grave susceptible d'affecter le système.

2.10 Conclusion

Dans ce chapitre, nous sommes intéressés à l'aspect théorique de la commande

H_∞ non linéaire, et nous avons présenté la méthode des approximations successives, qui permet de donner une solution approximée de l'équation de Hamilton Jacobi. Deux applications ont été effectuées, et des tests de robustesse en été faits. Ainsi l'étude effectuée ici nous a permis de mettre en évidence l'intérêt et la robustesse de la commande H_∞ non linéaire. L'étude comparative des deux commandes H_∞ linéaire et non linéaire, permet de dire que la commande H_∞ non linéaire est plus robuste que la commande H_∞ linéaire. L'algorithme des approximations successives n'est pas la seule méthode de calcul de la commande H_∞ non linéaire. Dans le chapitre qui suit nous proposons l'étude d'une autre méthode de calcul de la commande H_∞ non linéaire beaucoup plus récente, basée sur les Inégalités Matricielles Non Linéaires (NLMI).

Chapitre 3

Commande H_∞ non-linéaire d'un hélicoptère à 2-DOF

3.1 Introduction

Le but de ce chapitre est d'illustrer les méthodes proposées dans ce travail sur modèle réaliste : l'hélicoptère à 2-DOF. Le modèle que nous avons choisi est fourni par Quanser [5], a été très largement étudié dans la littérature [6].

Le modèle de l'hélicoptère à 2-DOF nous sert d'application pour démontrer l'intérêt des méthodes de commande non linéaire pour un problème réaliste. Notre objectif n'est pas d'étudier entièrement la modélisation de l'hélicoptère mais plutôt de mettre en évidence l'intérêt de la commande robuste H_∞ pour les systèmes non-linéaires et de détailler leur mise en œuvre afin d'illustrer un certain nombre de techniques présentés dans ce mémoire.

Le reste de ce chapitre est organisé comme suit : Dans la première section, nous avons donné le modèle mathématique non linéaire de 2-DOF puis la linéarisation de ce dernier et dans la deuxième section, nous avons construit la synthèse de la commande par le cahier des charges, finalement les résultats de simulation de la commande LQR sur l'hélicoptère à 2-DOF.

3.2 Description du prototype Quanser AERO

Le prototype Quanser AERO (figure 3-1 **Erreur ! Source du renvoi introuvable.**) est un simulateur d'hélicoptère à 2-DOF (*2 degrees of freedom*) réelle mais sur une base fixe, L'hélicoptère comporte deux hélices montées perpendiculairement les unes aux autres qui sont toutes deux actionnées par des moteurs à courant continu. Cette configuration émule la configuration commune de l'hélicoptère avec un rotor principal et un rotor de queue anti-couple. Le mécanisme de collecteur tournant sur l'axe vertical permet au corps de tourner librement autour de l'angle de lacet (*yaw*) en éliminant les fils qui relient les moteurs et les codeurs à la base. Le retour d'état du système (les ongles) ce fait par des encodeurs à haute résolution (capteur d'ongle).

A l'origine, le Quanser AERO est contrôlé par un logiciel fourni avec le matériel fonctionnant sous Matlab Simulink [21].

En effet, l'hélicoptère à 2-DOF est un système multivariable à deux entrées et deux sorties (MIMO), les deux entrées sont les tensions appliquées aux moteurs, les deux sorties sont l'angle d'élévation θ et l'angle d'azimut .



Figure 3-1: Quanser 2-DOF

Les composants de 2-DOF :

Tableau 3-1 : Composants de 2-DOF

Numéro	Composant
1	hélices interchangeables
2	garde de sécurité pour les hélices
3	hélices à angle réglable (horizontal vers vertical)
4	mesure d'inertielle par l'accéléromètre et gyroscope
5	encodeur d'azimut
6	Index de contrôlabilité par l'utilisateur (LED couleur)
7	Interface de connexion USB et alimentation
8	illimite 360° de rotation dans l'axe d'azimut
9	Moteur DC avec encodeur
10	Encodeur d'élévation

3.3 Modélisation du Quanser 2-DOF

Nous considérons le modèle de l'hélicoptère défini par Quanser [21]. Les angles θ et φ représentent les angles de tangage (*pitch*) et de lacet (*yaw*), respectivement.

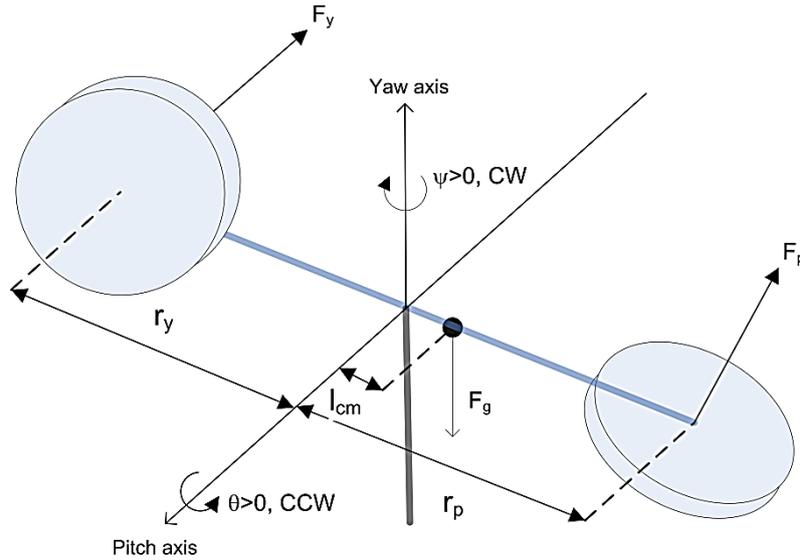


Figure 3-2 : Model dynamique de Quanser 2-DOF

Les conventions utilisées pour la modélisation d'hélicoptère à 2 DOF sont [21]:

- L'hélicoptère est horizontal lorsque l'angle tangage est $\theta = 0^\circ$.
- L'angle tangage augmente positivement, $\theta(t) > 0^\circ$, lorsque le déplacement est vers le haut et le corps de 2-DOF tourne dans le sens négative.
- L'angle de lacet augmente positivement, $\varphi(t) > 0^\circ$, lorsque le corps tourne dans le sens horaire
- L'angle tangage augmente positivement, $\theta(t) > 0^\circ$, lorsque la force de poussée de tangage est positive $F_p > 0$
- L'angle de lacet augmente positivement, $\varphi(t) > 0^\circ$, lorsque la force de poussée de lacet est positive $F_y > 0$

La position du centre de masse est obtenue par la transformation de coordonnées et est donnée par :

$$X_c = l \cos \theta \sin \varphi \quad ; \quad Y_c = -l \cos \theta \sin \varphi \quad ; \quad Z_c = l \sin \theta. \quad (3-1)$$

L'énergie potentielle (P) en raison de la gravité et l'énergie cinétique totale (T) en raison du moment d'inertie sont donnés par :

$$P = mgl \sin \theta \quad ; \quad T = T_{r.el} + T_{r.az} + T_t \quad (3-2)$$

avec :

$$T_{r.el} = \frac{1}{2}J_{eq.el}\dot{\theta}^2 ; \quad T_{r.az} = \frac{1}{2}J_{eq.az}\dot{\varphi}^2 ; \quad T_t = \frac{1}{2}m(\dot{X}_c^2 + \dot{Y}_c^2 + \dot{Z}_c^2) \quad (3-3)$$

et :

$$\dot{X}_c = \frac{\partial X_c}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial X_c}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial t} = -l\dot{\varphi} \cos \theta \sin \varphi - l\dot{\theta} \cos \varphi \sin \theta. \quad (3-4)$$

$$\dot{X}_c^2 = l^2(\dot{\varphi}^2 \cos^2 \theta \sin^2 \varphi + 2 \dot{\theta} \dot{\varphi} \cos \theta \sin \theta \cos \varphi \sin \varphi + \dot{\theta}^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \theta). \quad (3-5)$$

$$\dot{Y}_c = \frac{\partial Y_c}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial Y_c}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial t} = -l\dot{\varphi} \cos \theta \cos \varphi + l\dot{\theta} \sin \varphi \sin \theta. \quad (3-6)$$

$$\dot{Y}_c^2 = l^2(\dot{\varphi}^2 \cos^2 \theta \sin^2 \varphi - 2 \dot{\theta} \dot{\varphi} \cos \theta \sin \theta \cos \varphi \sin \varphi + \dot{\theta}^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \theta). \quad (3-7)$$

$$\dot{Z}_c = \frac{\partial Z_c}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial Z_c}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial t} = l\dot{\theta} \cos \theta. \quad (3-8)$$

$$\dot{Z}_c^2 = l^2 \dot{\theta}^2 \cos^2 \theta. \quad (3-9)$$

En remarque que :

$$\dot{X}_c^2 = -\dot{Y}_c^2 - \dot{Z}_c^2 + l^2(\dot{\varphi}^2 \cos^2 \theta + \dot{\theta}^2). \quad (3-10)$$

En remplace les résultats dans l'équation (3-11) puis dans l'équation (3-12) en va trouvons :

$$T = \frac{1}{2}J_{eq.el}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}J_{eq.az}\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}ml^2(\dot{\varphi}^2 \cos^2 \theta + \dot{\theta}^2). \quad (3-13)$$

Donc les équations de mouvement d'Euler-Lagrange sont définies par :

$$Q_1 = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} ; \quad Q_2 = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi}. \quad (3-14)$$

Avec L est l'équation d'Euler-Lagrange qui définit par : $L = T - P$ et elle calcule depuis les équations (3-15).

$$L = T - P = \frac{1}{2}J_{eq.el}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}J_{eq.az}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}ml^2(\dot{\phi}^2\cos^2\theta + \dot{\theta}^2) - mgl\sin\theta \quad (3-16)$$

$$Q_1 = J_{eq.el}\ddot{\theta} + ml^2\ddot{\theta} + mgl\cos\theta + ml^2\dot{\phi}^2\cos\theta\sin\theta. \quad (3-17)$$

$$Q_2 = J_{eq.az}\ddot{\phi} + ml^2\ddot{\phi}\cos^2\theta + 2ml^2\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta\sin\theta. \quad (3-18)$$

Avec :

$$Q_1 = K_{p.el}V_{m.el} + K_{p.az}V_{m.az} - B_{el}\dot{\theta} ; \text{ et } Q_2 = K_{y.el}V_{m.el} + K_{y.az}V_{m.az} - B_{az}\dot{\phi}. \quad (3-19)$$

Le model non linéaire du système est :

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{J_{eq.el} + ml^2} [(K_{p.el}V_{m.el} + K_{p.az}V_{m.az}) - (B_{el}\dot{\theta} + mgl\cos\theta + ml^2\dot{\phi}^2\cos\theta\sin\theta)]. \quad (3-20)$$

$$\ddot{\phi} = \frac{1}{J_{eq.az} + ml^2\cos^2\theta} [(K_{y.el}V_{m.el} + K_{y.az}V_{m.az}) - (B_{az}\dot{\phi} + 2ml^2\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta\sin\theta)]. \quad (3-21)$$

Soit le vecteur d'état :

$$x = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T = [\theta \ \phi \ \dot{\theta} \ \dot{\phi}]^T \quad (3-22)$$

alors la représentation d'état est :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_3 \\ \dot{x}_2 &= x_4 \\ \dot{x}_3 &= \ddot{\theta} = \frac{1}{J_{eq.el} + ml^2} [(K_{p.el}V_{m.el} + K_{p.az}V_{m.az}) - (B_{el}\dot{\theta} + mgl\cos\theta + ml^2\dot{\phi}^2\cos\theta\sin\theta)] \\ \dot{x}_4 &= \ddot{\phi} = \frac{1}{J_{eq.az} + ml^2\cos^2\theta} [(K_{y.el}V_{m.el} + K_{y.az}V_{m.az}) - (B_{az}\dot{\phi} + 2ml^2\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta\sin\theta)] \end{aligned} \quad (3-23)$$

avec :

$$V_{m.el} = U_1 ; V_{m.az} = U_2 \quad (3-24)$$

Donc la forme générale d'un système non linéaire s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u) \\ y &= g(x, u) \end{aligned} \quad (3-25)$$

3.3.1 Model linéarisé du système

Soit la forme générale de la représentation d'état du système linéaire suivante :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \quad (3-26)$$

Avec :

$$x = [\theta \ \varphi \ \dot{\theta} \ \dot{\varphi}]^T ; \dot{x} = [\dot{\theta} \ \dot{\varphi} \ \ddot{\theta} \ \ddot{\varphi}]^T ; u = [U_1 \ U_2]^T ; y = [\theta \ \varphi]^T \quad (3-27)$$

On a les deux équations non-linéaires suivant :

$$\begin{aligned} Q_1 &= J_{eq.el} \ddot{\theta} + ml^2 \ddot{\theta} + mgl \cos \theta + ml^2 \dot{\varphi}^2 \cos \theta \sin \theta \\ &= K_{p.el} V_{m.el} + K_{p.az} V_{m.az} - B_{el} \dot{\theta}. \end{aligned} \quad (3-28)$$

$$\begin{aligned} Q_2 &= J_{eq.az} \ddot{\varphi} + ml^2 \ddot{\varphi} \cos^2 \theta + 2ml^2 \dot{\theta} \dot{\varphi} \cos \theta \sin \theta \\ &= K_{y.el} V_{m.el} + K_{y.az} V_{m.az} - B_{az} \dot{\varphi}. \end{aligned} \quad (3-29)$$

On remarque que la partie droite des deux équations est linéaire par contre la partie gauche par la considération du point d'équilibre de système égale à :

$$x_{eq} = (\bar{\theta}; \bar{\varphi}; \bar{\dot{\theta}}; \bar{\dot{\varphi}}) = (0; 0; 0; 0). \quad (3-30)$$

Par l'utilisation de la loi générale de la linéarisation on trouve :

$$\begin{aligned} Q_{1lin}(X) &= Q_1(x_{eq}) + \left. \frac{\partial Q_1(X)}{\partial \theta} \right|_{X=x_{eq}} (\theta - \bar{\theta}) + \left. \frac{\partial Q_1(X)}{\partial \varphi} \right|_{X=x_{eq}} (\varphi - \bar{\varphi}) \\ &\quad + \left. \frac{\partial Q_1(X)}{\partial \dot{\theta}} \right|_{X=x_{eq}} (\dot{\theta} - \bar{\dot{\theta}}) + \left. \frac{\partial Q_1(X)}{\partial \dot{\varphi}} \right|_{X=x_{eq}} (\dot{\varphi} - \bar{\dot{\varphi}}). \end{aligned} \quad (3-31)$$

$$\begin{aligned} Q_{2lin}(X) &= Q_2(x_{eq}) + \left. \frac{\partial Q_2(X)}{\partial \theta} \right|_{X=x_{eq}} (\theta - \bar{\theta}) + \left. \frac{\partial Q_2(X)}{\partial \varphi} \right|_{X=x_{eq}} (\varphi - \bar{\varphi}) \\ &\quad + \left. \frac{\partial Q_2(X)}{\partial \dot{\theta}} \right|_{X=x_{eq}} (\dot{\theta} - \bar{\dot{\theta}}) + \left. \frac{\partial Q_2(X)}{\partial \dot{\varphi}} \right|_{X=x_{eq}} (\dot{\varphi} - \bar{\dot{\varphi}}). \end{aligned} \quad (3-32)$$

$$Q_{1lin}(X) = \ddot{\theta}_{lin} = \frac{1}{J_{eq.el} + ml^2} [-B_{el} \dot{\theta} + K_{p.el} V_{m.el} + K_{p.az} V_{m.az}]. \quad (3-33)$$

$$Q_{2lin}(X) = \ddot{\phi}_{lin} = \frac{1}{J_{eq.az} + ml^2} [-B_{az}\dot{\phi} + K_{y.el}V_{m.el} + K_{y.az}V_{m.az}]. \quad (3-34)$$

Donc on a la représentation linéaire :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{-B_{el}}{J_{eq.el} + ml^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-B_{az}}{J_{eq.az} + ml^2} \end{bmatrix} \quad (3-35)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{K_{p.el}}{J_{eq.el} + ml^2} & \frac{K_{p.az}}{J_{eq.el} + ml^2} \\ \frac{K_{y.el}}{J_{eq.az} + ml^2} & \frac{K_{y.az}}{J_{eq.az} + ml^2} \end{bmatrix}. \quad (3-36)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3-37)$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3-38)$$

Les valeurs numériques correspondant aux grandeurs présentées sont données dans le tableau 3-2 d'après les données de Quanser [21].

Tableau 3-2 : Paramètres du model Quanser 2-DOF

variable	désignation	valeur	unité
m	Masse du corps	1.3872	Kg
l	Longueur du corps	0.1857	m
g	gravité	9.81	$N.m$
$J_{eq.el}$	Moment d'inertie du rotor d'élévation	0.0219	$Kg.m^2$
$J_{eq.az}$	Moment d'inertie du rotor d'azimut	0.0220	$Kg.m^2$
B_{el}	Amortissement visqueux d'élévation	0.0071116	$N.ms/rad$
B_{az}	Amortissement visqueux d'azimut	0.0220	$N.ms/rad$
$K_{p.el}$	Constante couple de poussée	0.0011	$N.m/V$
$K_{p.az}$	Poussée agissant sur l'élévation à partir de l'azimut	0.0021	$N.m/V$
$K_{y.el}$	Poussée agissant sur l'azimut à partir de l'élévation	-0.0027	$N.m/V$
$K_{y.az}$	Constante couple de poussée	0.0022	$N.m/V$

3.4 Résultats de simulations

3.4.1 Contrôle et simulation LQR

LQR est utilisé pour trouver le gain de contrôle de retour d'état K qui stabilisera l'expérience Quanser Aero aux angles de tangage et de lacet souhaités par l'utilisateur. Notre réponse en boucle fermée souhaitée doit correspondre aux spécifications suivantes.

Spécifications de réponse en boucle fermée souhaitées :

1. Erreur de régime permanent : tangage 2 deg, lacet 2 deg.
2. Temps de pointe : t_p 2 s.
3. Pourcentage de dépassement : P O 7,5 %.
4. Pas de saturation de l'actionneur : $|V_p| \leq 24V$ et $|V_y| \leq 24V$.

matlab sera utilisé pour exécuter la routine d'optimisation LQR et générer K et la réponse en boucle fermée est la réponse simulée dans Simulink à l'aide du `s_aero_2dof_lqr_control` illustré à la figure 4.2.

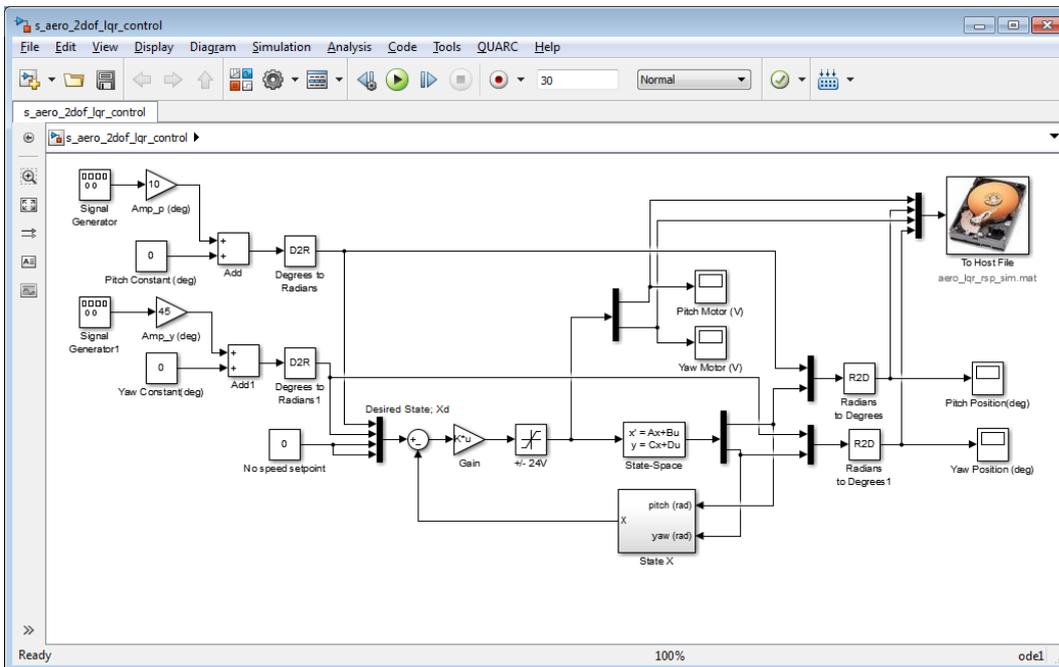
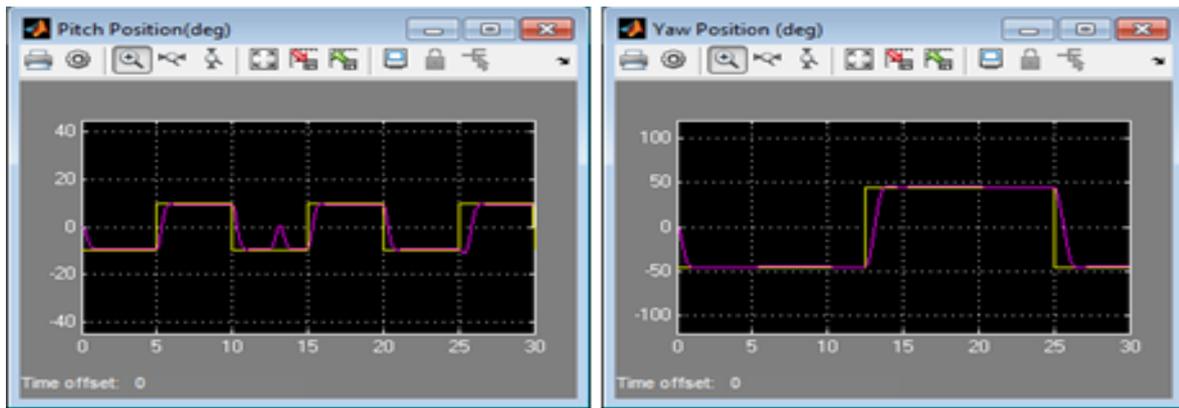
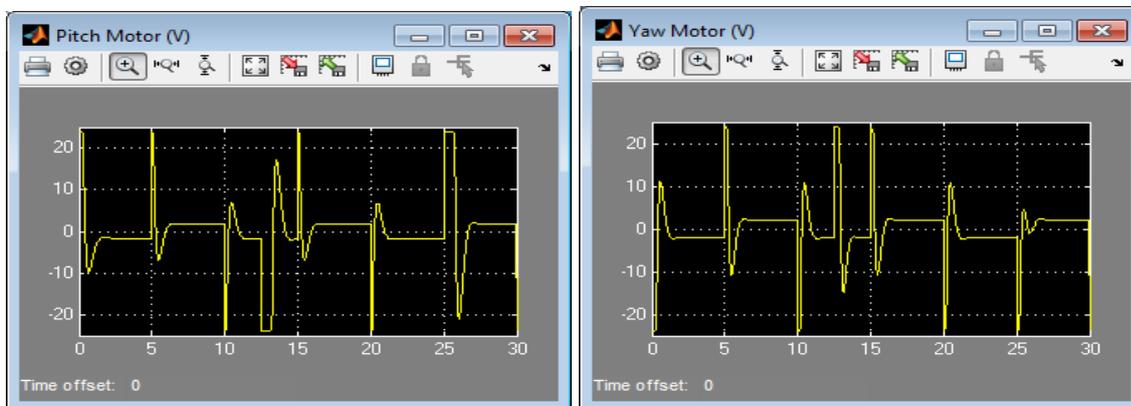


Figure 3-3 : Modèle Simulink utilisé pour simuler une réponse de retour d'état en boucle fermée



(a) Pitch Angle

(b) Yaw Angle



(c) Pitch Motor Voltage

(d) Yaw Motor Voltage

Figure 3.4: Sample response in scopes when simulating LQR control

La réponse correspond aux spécifications souhaitées. Les rotors atteignent leur limite de $\pm 24V$, mais seulement pendant un court instant et des blocs de saturation sont placés dans le diagramme Simulink pour limiter la tension appliquée à cette plage. Comme remarqué dans la simulation, l'effet de couplage entre les axes est vu lorsque le tangage et le lacet changent de position. Il y a un peu plus d'erreur en régime permanent autour de l'axe de tangage, ce qui peut probablement être attribué à un frottement non modélisé (par exemple le frottement de Coulomb).

3.4.2 Exécution de LQR sur le système

Dans cette section, le contrôle de retour d'état est implémenté sur l'expérience Quanser Aero en utilisant le `q_aero_2dof_lqr_control` Diagramme Simulink illustré à la Figure 4.5 avec QUARC

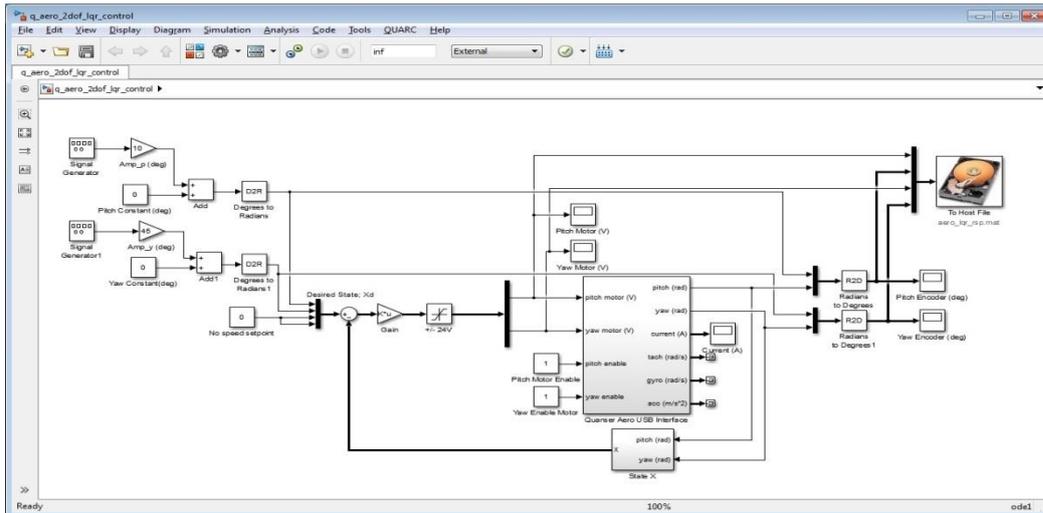
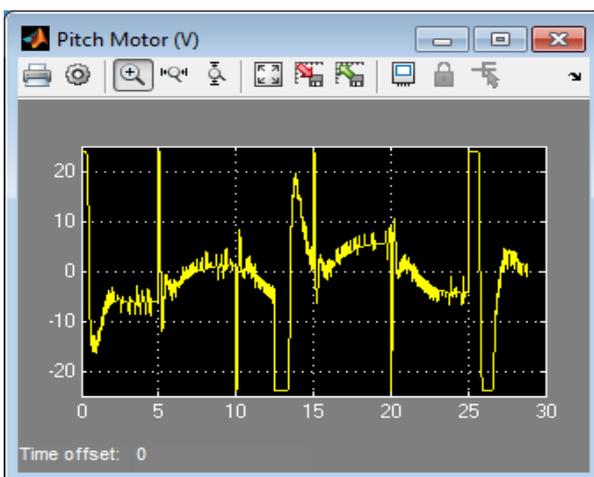


Figure 3-5 : Modèle Simulink utilisé avec QUARC pour exécuter le contrôle de retour d'état sur Quanser Aero Experiment.

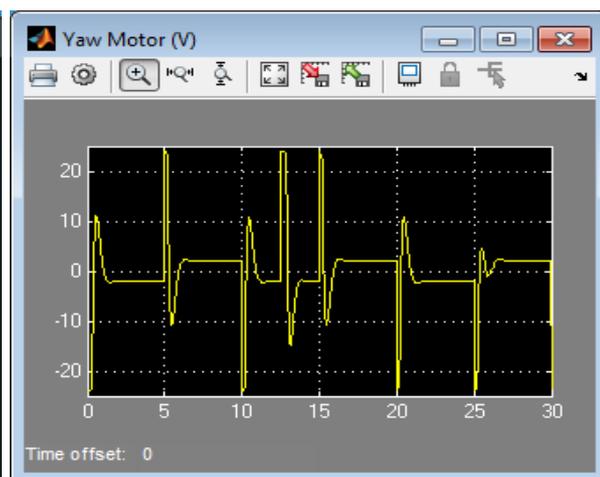
Analyse de la réponse La réponse obtenue est illustrée à la figure 4.7.

Le temps de pointe, le dépassement et l'erreur en régime permanent de la réponse simulée sont :

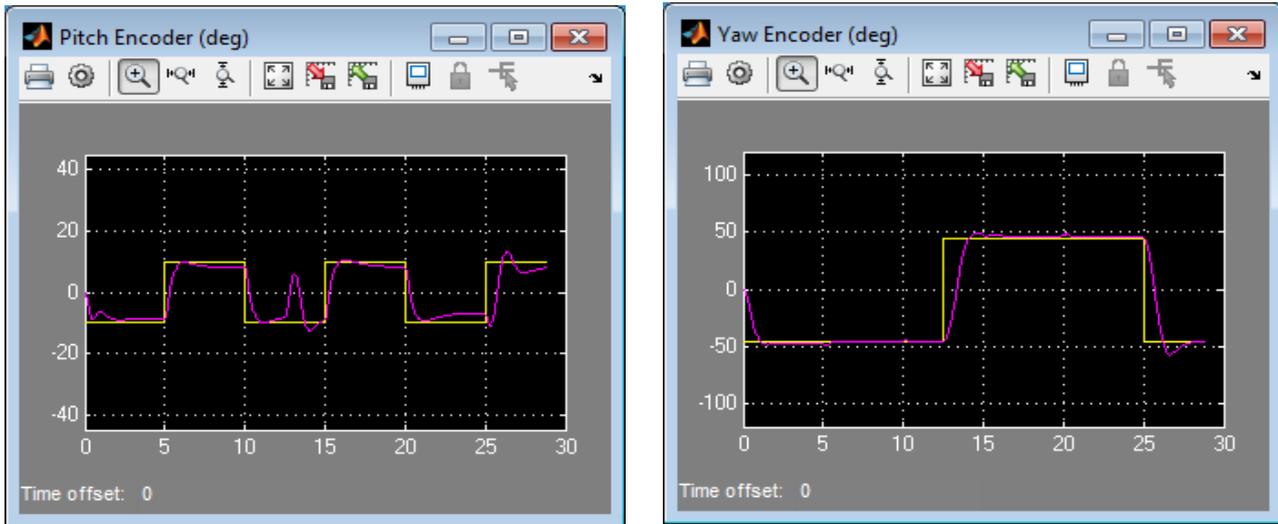
1. Erreur de régime permanent : pitch ess = $| 8.09 - 10 | = 1,91 \leq 2$ degrés, lacet = $| 45,26 - 45 | = 0,26$ 2 degrés
2. Temps de pointe : tangage $tp,p = 6,19 - 5 = 1,19$ 2 s, lacet $tp,y = 14,5 - 12,5 = 2,0$ 2 s.



(a) Pitch Angle



(b) Yaw Angle



(c) Pitch Motor Voltage

(d) Yaw Motor Voltage

Figure 3-6: Sample response in scopes when running LQR on Quanser Aero Experiment

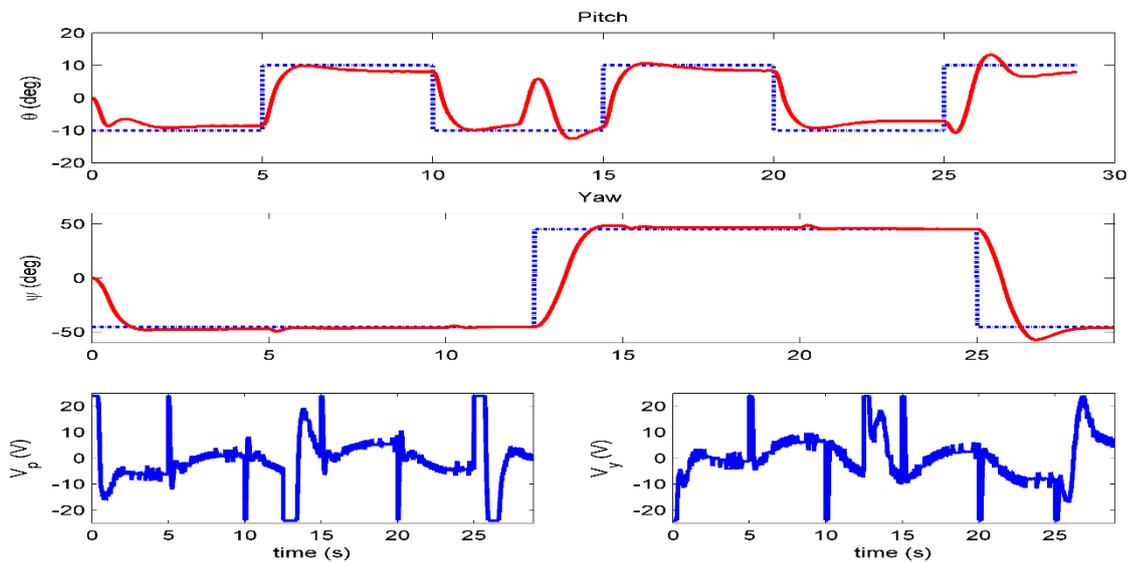


Figure 3-7: Sample response using LQR state-feedback on Quanser Aero Experiment

3.4.3 Discussion

Après avoir conçu la loi de commande du modèle nominal, nous introduisons des interférences sur certains paramètres du modèle. Pour savoir si nous obtiendrons les mêmes performances.

Robuste fait référence au chêne massif, et toutes sortes de chênes très durs sont sans aucun doute identifiés par sa couleur. La robustesse a de nombreuses qualités de fermeté, de résistance, de vitalité, de dureté, de résistance et de chêne. En mode automatique, la robustesse a d'abord le sens de la résistance. Contrairement aux attentes du bois de structure, le système n'évaluera pas la dureté et la robustesse des composants, mais les caractéristiques de stabilité et de performance. Lorsque la stabilité n'est pas affectée par l'incertitude du modèle, le système est robuste et stable. La méthode de l'expert en automatisation est d'analyser la robustesse et de rechercher des correcteurs qui améliorent les propriétés de robustesse. Il s'agit de vérifier le système d'attributs et de trouver des correcteurs intéressants.

L'analyse de robustesse est généralement basée sur le temps de formulation du modèle variable, qui peut être exprimé en fonction de l'évolution d'un certain nombre de paramètres incertains. Ce premier problème concerne la stabilité. L'analyse de la robustesse de la stabilité consiste à déterminer que le système reste stable malgré les changements de paramètres attendus.

Nous pouvons également souhaiter que le système maintienne un certain niveau de performance. L'analyse de la robustesse des performances vise à déterminer si le système maintient les changements attendus des paramètres de performances attendus. Le problème de robustesse peut être résolu de deux manières, pour la stabilité et les performances. La stabilité étant une condition suffisante de performance, la marge de robustesse des performances doit être inférieure à la marge de performance. Robustesse de la stabilité.

3.5 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté l'application de la commande LQR sur le modèle Quanser AERO -2 DOF. Nous avons commencé par une définition générale de modèle et de paramètres, puis une modélisation par l'utilisation des équations mathématique d'Eluer Lagrange. La linéarisation de modèle est ce fait au point d'équilibre (repos), les fonctions de pondération jouent un rôle important dans la robustesse de système.

Conclusion générale

Ce travail de mémoire de fin d'études est basé sur l'étude de la commande H_∞ non linéaire. Nous avons présenté les notions générales de base sur la commande robuste, la commande H_∞ non linéaire, et les approches les plus utilisées pour la résolution des problèmes de commande H_∞ .

Nous avons exposé la méthode de résolution des problèmes linéaire par les équations de Riccati et pour les problèmes non linéaire par la méthode des approximations successives et la méthode des Inégalités Matricielles

Les perspectives d'application de ce type de commandes sont triées importantes sur les procédés industriels, même aujourd'hui elles occupent une grande partie dans le milieu de recherche. Elles permettent de conserver un fonctionnement optimal du fait qu'elles prennent en considération les différents types de perturbations.

Les résultats de simulation de ce mémoire confirment la robustesse de la commande LQR sur le système a étudié.

Bibliographies

- [1] Emira NECHADI: SYSTEMES NON LINEAIRES 2001.
- [2] S. Maalej, "Commande robuste des systèmes à paramètres variables." Lille 1, 2014.
- [3] Shankar Sastry, Nonlinear Systems : Analysis, Stability, and Control 2013.
- [4] Mme YOUSFI Safia, Développement d'algorithmes pour la commande H_∞ des systèmes non linéaires : application à un procédé industriel.
- [BaHe 93] J.A. Ball, J.W. Helton and M.L. Walker, "Control for nonlinear systems with output feedback," IEEE Trans Automatic Control vol. 38, pp. 546-559, 1993.
- [Van 91] A. J. Van der Schaft, " On a State Space Approach to Nonlinear H_∞ Approach, System & Control Letters, Vol. 16, pp. 1-8, 1991.
- [Van 92] A. J. Van der Schaft, "L2-gain analysis of nonlinear systems and nonlinear H_∞ control" IEEE Trans. Automatic Control Vol. 37, pp. 770-784, 1992.
- [IsAs 92] A. Isidori, A. Astolfi, "Disturbance attenuation and H_∞ control via measurement feedback in nonlinear systems," IEEE Trans Automatic Control vol. 37. No. 9, 1992.
- [LuDo95] W. M. Lu and J. C. Doyle, "' H_∞ Control of Nonlinear Systems: A Convex Characterization:' IEEE 'Trans. Automatic Control, vol. 40, no. 9, pp. 1668-1775, 1995.
- [Is 92] A. Isidori, "Feedback control of nonlinear systems", Int. J. Robust and Nonlinear Control vol. 2, pp. 291-311, 1992.
- [HuYaCh 99] S. S. Hu, P. H. Yang, and B. C. Chang, " A Successive Algorithm for Solving the Hamilton-Jacobi Equations, " Proceedings of the 1999 American Control Conference, June 1999.

- [Asep 03] Asep Najmurokhman. "On solvability of output feedback Nonlinear H_∞ Control problem using nonlinear matrix inequalities approach ". Journal of Electrical Engineering and Information Technology. Vol 1, No. 1, July 2003.
- [IsKa 95] A. Isidori, W. Kang, "H ∞ Control via Measurement Feedback for Nonlinear Systems," IEEE Trans Automatic Control vol. 40, No. 3, pp.466-472, 1995.
- [1] Emira NECHADI: SYSTEMES NON LINEAIRES 2001.
- [2] S. Maalej, "Commande robuste des systèmes à paramètres variables." Lille 1, 2014.
- [3] Shankar Sastry, Nonlinear Systems : Analysis, Stability, and Control 2013.
- [4] Mme YOUSFI Safia, Développement d'algorithmes pour la commande H_∞ des systèmes non linéaires : application à un procédé industriel.
- [5] QUANSER, "Quanser 2-DOF Helicopter : Lab Manual," 2016.
- [6] Y. Taskin, "Improving pitch and yaw motion control of twin rotor MIMO system," *J. Vibroengineering*, vol. 16, no. 4, pp. 1650–1660, 2014