

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieure et de la Recherche Scientifique  
Université de Ghardaia

Faculté des Science et de Technologie  
Département de Mathématique et Informatique



**Projet de fin d'étude présenter en vue de l'obtention de diplôme de**  
**MASTER**

**Domaine** : Mathématiques et Informatiques  
**Spécialité** : Analyse Fonctionnelle et applications

**THÈME**

---

**Sur la théorie des cycles limites**

---

**Présenté par :**

Romaissa El-MEGBED

Soutenu publiquement le : 03/ 07/ 2019

Devant le jury :

*M* : Brahim MERABET : *MCB.* (Univ. Ghardaia) Président  
*M* : Yacine HADJ MOUSSA : *MAA.* (Univ. Ghardaia) Examineur  
*M* : Abdelkrim KINA : *MAA.* (Univ. Ghardaia) Rapporteur

Année universitaire : 2018/2019

# Dédicace

*Je dédie ce modeste travail à ceux qui m'ont soutenu au long de mes études, qui m'ont toujours poussé vers le chemin du savoir, à ma source d'amour et d'affection, les deux êtres les plus chères au monde, mes chères parents.*

A L'homme mon précieux offre du dieu, qui doit ma vie, ma réussite et tout mon respect :  
mon cher père : **HACHEMI**

A La femme qui a souffert sans me laisser souffrir, qui n'a jamais dit non à mes exigences et qui n'a épargné aucun effort pour me rendre heureuse : mon adorable mère offre du dieu, qui doit ma vie, ma réussite et tout mon respect :  
ma chère mère : **AICHA**

**À mes soeurs :**

Sara , Amina , Maroua , Alia .

**À mes frères :**

El-Amine , El-Walid .

**À ma grande famille EL-MEGBED.**

**À mes amies :**

Rabia , Meriem, rachida, Khadidja, Sihem, Mebarka, Mordia, Chahra,  
Bouchra

**À mes amis de l'université de GHARDAIA.**

**À tous les étudiants de math & info .**

**À tous ceux qui me sont cher(e)s.**

*Romaissa EL-MEGBED  
Ghardaia 2019*

# Remerciement

Je tiens à témoigner ma reconnaissance à DIEU tout puissant, de m'avoir donner le courage et la force de mener à terme ce projet. Qui m'a ouvert les portes du savoir.

Je remercie à Monsieur *Abdelkrim KINA* pour le sujet qu'il m'a proposé et pour l'attention et la disponibilité dont il a su faire preuve au long de la préparation de ce mémoire.

Je remercie sincèrement les membres de jury pour avoir accepté de juger ce travail.

Je remercie les enseignants de département des mathématiques et d'informatique qui nous ont encadré depuis notre première année universitaire.

Merci à tous ceux qui m'ont enseigné en primaire, collège, lycée, université et ailleurs, et tous les personnels de ces établissements, sans eux je suis rien.

Merci à tous les mathématiciens...

Merci mes parents , mes amis, ma famille et mes cousines merci à tout ceux qui ont contribué de près ou de loin dans ce travail.

# Résumé, Abstract

## *Résumé*

Ce mémoire s'articule autour de l'étude qualitative des systèmes différentiels, qui a pour but de trouver les propriétés de leurs solutions (comme les points d'équilibre, les courbes invariantes et les solutions périodiques), sans connaître la solution explicite qui est généralement difficile.

Nous nous sommes intéressés à la construction de classes des systèmes différentiels planaires, et des systèmes de type Kolmogorov, où nous avons étudié l'intégrabilité et l'existence des cycles limites.

**Mots clés :** Systèmes dynamiques planaires, points d'équilibre, courbes invariantes, solutions périodiques, cycles limites.

## *Abstract*

In this dissertation, we are interested in on the qualitative study of differential systems, which aims to find the properties of their solutions (such as equilibrium points, invariant curves and periodic solutions), without pursuing the explicit resolution that is generally difficult.

We are interested in the construction of classes of planar differential systems, and Kolmogorov-type systems, where we studied the integrability and existence of limit cycles.

**Keywords :** Planar dynamic systems, predator-prey systems of Kolmogorov, equilibrium points, Invariant curves, periodic solutions, limit cycles.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Préliminaires</b>	<b>3</b>
1.1	Les systèmes différentielles polynomiaux . . . . .	3
1.1.1	Système dynamique : . . . . .	3
1.2	Solution d'un système différentiel . . . . .	4
1.2.1	Existence du solution . . . . .	4
1.2.2	Théorème fondamentale de l'existence et l'unicité des solutions . . . . .	5
1.3	Champs de vecteurs : . . . . .	7
1.4	Flot . . . . .	9
1.4.1	Portrait de phase . . . . .	10
1.4.2	Solutions périodiques . . . . .	12
1.4.3	Points singuliers . . . . .	13
1.4.4	Points d'équilibres . . . . .	14
1.4.5	Linéarisation des systèmes . . . . .	14
1.5	Courbes invariantes . . . . .	21
<b>2</b>	<b>Intégrabilité et cycle limite d'un système différentiel</b>	<b>24</b>
2.1	L'intégrale première des systèmes différentielles . . . . .	24
2.1.1	Orbite périodique . . . . .	25
2.2	Cycle limite . . . . .	26
2.2.1	Cycle limite algébrique . . . . .	26
2.3	Existence et non-existence de cycles limites . . . . .	27
2.3.1	Critères d'existence . . . . .	27
2.3.2	Critères de non existence . . . . .	27
2.3.3	Stabilité du cycle limite . . . . .	31
<b>3</b>	<b>Sur deux classes de systèmes différentiels planaires</b>	<b>36</b>
3.1	Systèmes différentiels à cycles limites explicites non algébriques	36
3.2	Une classe de système de kolmogorov . . . . .	42

# Table des figures

1.1	Le champ de vecteur du système (1.6).	6
1.2	Trajectoire de pendule.	7
1.3	Le champ de vecteur .	8
1.4	Champ vecteur du système (1.8).	8
1.5	Champ de vecteurs du système (1.9).	9
1.6	Portrait de phase du système (1.10).	10
1.7	Le plan de phase de l'équation harmonique (1.11) .	11
1.8	Portrait de phase du système (1.12).	11
1.9	Le portrait de phase du pendule plan dans $\mathbb{R}^2$	12
1.10	Nœud dégénéré instable.	16
1.11	Nœud dégénéré stable.	16
1.12	Un col.	17
1.13	Nœud instable.	17
1.14	Nœud stable.	17
1.15	Un foyer stable.	18
1.16	Un foyer instable.	18
1.17	Un cercle.	18
2.1	Cycle limite du système (2.6)	26
2.2	Cycle limite stable.	31
2.3	Cycle limite instable.	31
2.4	Cycle limite semi-stable.	32
2.5	Le cycle limite de de système (2.17)	35
3.1	Le portrait de phase dans le disque Poincaré du système (3.1).	42

# Introduction

Les équations différentielles sont apparues la première fois à la fin du dix- Septième siècle dans les travaux de Isaac Newton, Leibniz, et Bernoulli. Elles se sont produites comme conséquence normale des efforts de ces grands savants d'appliquer les nouvelles idées de calcul de certains problèmes en mécanique. Plus tard, la théorie d'intégration des équations différentielles a été développée par des analystes et des mécaniciens comme Lagrange, Poisson, Hamilton, Liouville aux dix-huitième siècle et dix-neuvième siècles. Pendant plus de 300 ans, les équations différentielles ont servi l'outil essentiel pour décrire et analyser des problèmes dans beaucoup de disciplines scientifiques.

L'importance des équations différentielles a motivé des générations de mathématiciens et d'autres scientifiques pour développer des méthodes pour étudier les propriétés de leurs solutions. Grâce à son mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle publié en 1886 Henri Poincaré a ouvert la voie pour une approche des équations différentielles où la priorité n'est plus donnée à la résolution, mais à une étude plus géométrique des solutions en particulier de leurs propriétés, cette recherche a pour but de trouver les propriétés des solutions sans vraiment trouver les solutions d'une façon explicite, ce sont des méthodes qualitatives.

Plusieurs auteurs ont traité l'étude qualitative des systèmes différentiels, citons en particulier [ [5], [6], [7], [11],...].

Un des problèmes principaux dans la théorie qualitative des équations différentielles est l'étude de l'intégrabilité et les cycles limites des systèmes différentiels planaires polynomiaux.

Le concept de cycles limites a été proposé pour la première fois par le mathématicien français Poincaré dans ses très célèbres articles classiques intitulés "Integral curves defined by differential equations " (1881, 1882, 1885, 1886). Tout comme il l'avait prédit, la théorie du cycle limite qui fonctionne comme un outil mathématique indispensable, a trouvé de vastes applications importantes dans les domaines de la biologie, de la chimie, de la physique moderne et dans d'autres domaines. Ensuite, les développements de ces do-

maines favorisent à leur tour la recherche de cycle limite. L'étude des cycles limites comprend principalement deux aspects : l'un est l'existence, la stabilité et l'instabilité, le nombre et les positions relatives des cycles limites et l'autre est la création et la disparition de cycles limites ainsi que la variation des paramètres dans les systèmes ( par exemple bifurcation). En ce qui concerne la recherche sur le nombre exact de cycles limites et leurs positions relatives, étant difficile, très peu de résultats ont été obtenus à ce jour. Le célèbre mathématicien David Hilbert, au deuxième congrès international des mathématiciens, réuni à Paris en 1900, a présenté 23 problèmes mathématiques, dont le 16 ème concerne les cycles limites et la recherche du nombre maximal de cycles limites des équations différentielles :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x, y); \\ \frac{dy}{dt} = G(x, y). \end{cases} \quad (1)$$

où  $F(x, y)$  et  $G(x, y)$  sont des polynômes.

L'intérêt des cycles limites des systèmes différentiels planaires est dû à leurs significations importantes dans les modèles mathématiques issus de la pratique, comme il est dû aussi, à l'importance théorique du seizième problème de Hilbert.

Ce mémoire est structuré comme suit :

Le premier chapitre, qui est plutôt un glossaire, regroupe quelques notions préliminaires sur les systèmes différentiels planaires. On définit la notion de points singuliers, la linéarisation des systèmes différentiels non linéaires au voisinage de ces points, le portrait de phases, les courbes invariantes, ainsi que les solutions périodiques.

Le deuxième chapitre porte sur la recherche de l'intégrale premier et des critères d'existence et non-existence de cycles limites.

Le troisième chapitre, est consacré à la présentation de deux classes de systèmes différentiels planaires. La première classe [12], publiée dans le journal "Electronic Journal of Differential Equation vol.2012 (2012),No.78, 1-6", après on expose un résultat sur l'intégrabilité et la non-existence d'une classe de système de kolmogorov.

# Chapitre 1

## Préliminaires

L'objectif de ce chapitre est de présenter certaines notions et résultats qui concernent la théorie qualitative des systèmes différentiels en particulier les systèmes différentiels polynômiaux.

### 1.1 Les systèmes différentielles polynomiaux

**Définition 1.1** [1] *Un système différentiel polynomial est un système de la forme :*

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{dx}{dt} = F(x, y), \\ \dot{y} = \frac{dy}{dt} = G(x, y). \end{cases} \quad (1.1)$$

où  $F$  et  $G$  sont des polynômes à coefficients complexes, si  $n = \max(\deg F; \deg G)$  le degré maximal de  $F$  et  $G$  on dit que le système (1.1) est de degré  $n$ .

#### 1.1.1 Système dynamique :

**Définition 1.2** [4] *Soit l'application  $f$  telle que :*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (t, x) &\rightarrow f(t, x) \end{aligned} \quad (1.2)$$

On dit que l'application  $f$  est un système dynamique sur  $\mathbb{R}^n$  si les conditions suivantes sont satisfait :

- 1)  $f(t, x) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$  est continue,

- 2)  $f(0, x) = x$  ,  
 3)  $f(t + x_1, x_2) = f(t, f(x_1, x_2))$  pour  $t, x_1 \in \mathbb{R}^+$ ,  $x_2 \in \mathbb{R}^n$ .

**Exemple 1** Soit le problème de Cauchy associé à une équation différentielle

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t) \\ X(0) = X_0, t \in \mathbb{R}^+, X_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (1.3)$$

où  $A$  est une matrice carré constante, la solution de (1.3) est donnée par l'expression suivante :

$$X(t) = e^{tA} X_0.$$

Le système (1.3) engendre un système dynamique, car l'application :

$$f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

qui à tout  $t \in \mathbb{R}^+$ ,  $X \in \mathbb{R}^n$  associe

$$f(t, X) = e^{tA} X$$

vérifie les trois propriétés de la définition :

- 1) évident.  
 2) Soit la fonction :  $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  , on a :

$$f(0, X) = X e^{0A} = X.I = X$$

3)

$$\begin{aligned} f(t + X_1, X_2) &= X_2 e^{(t+X_1)A} \\ &= X_2 e^{tA} e^{X_1 A} \\ &= e^{tA} X_2 e^{X_1 A} \\ &= e^{tA} f(X_1, X_2) \\ &= f(t, f(X_1, X_2)). \end{aligned}$$

## 1.2 Solution d'un système différentiel

### 1.2.1 Existence du solution

**Définition 1.3** [11] Soit l'équation :

$$\dot{x} = f(x). \quad (1.4)$$

supposons que  $f \in C(\Omega)$  où  $\Omega$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  alors  $x(t)$  est une solution de l'équation différentielle (1.4) dans l'intervalle  $I$  si  $x(t)$  est différentiable dans  $I$  et pour tout  $t \in I$ ,  $x(t) \in \Omega$  et

$$x'(t) = f(x(t)).$$

étant donné  $x_0 \in \Omega$ ,  $x(t)$  est une solution du problème à valeurs initiales

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

sur l'intervalle  $I$  si  $t_0 \in I$ ,  $x(t_0) = x_0$  et  $x(t)$  est une solution de l'équation différentielle (1.4) sur l'intervalle  $I$

### 1.2.2 Théorème fondamentale de l'existence et l'unicité des solutions

**Définition 1.4** [14] Soient  $X_1, X_2 \in \Omega$  telle que  $\Omega$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , soit l'application  $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $f$  est Lipschitzienne par rapport à  $X \in \mathbb{R}^n$  si :

$$\|f(t, X_1) - f(t, X_2)\| \leq L\|X_1 - X_2\|,$$

avec  $L$  est une constante.

**Théorème 1.5** [5] Considérons le système

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (1.5)$$

ou  $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $t_0 < t \leq t_0 + \delta$ , supposons que :

- a)  $f(t, x)$  est une fonction continue par rapport à  $t$  dans un voisinage de  $(t_0, x_0)$ , il existe une solution  $x(t)$  de (1.5) qui passe par ce point et qui est définie dans  $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$  pour tout  $\delta$  strictement positif.
- b)  $f(t, x)$  vérifie la condition de Lipschitz par rapport à la deuxième variable  $x$ .

Alors le problème admet une solution unique.

**Définition 1.6** (Système différentiel autonome)[5] On dit que le système (1.1) est un système différentiel **autonome** si les polynômes  $F, G$  intervenant dans l'équation ne font pas intervenir la variable  $t$ .

**Lemme 1.1** (Propriété de translation)[5] Supposons que nous avons une solution  $\varphi(t)$  du système différentiel (1.1) dans le domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ; alors :  $\varphi(t - t_0)$  avec  $t_0$  est une constante est également une solution.

**Remarque 1.1** Les solutions  $\varphi(t)$  et  $\varphi(t - t_0)$  que nous avons obtenues sont différentes. Cependant, dans l'espace des phases, dont nous parlerons plus loin, ces solutions correspondent la même courbe orbitale. La propriété de translation est importante pour l'étude des solutions périodiques et pour la théorie des systèmes dynamiques.

**Définition 1.7** Un **plan de phase** est le plan  $(x, y) \in \mathbb{R}^n$  .

Une **trajectoire** du point  $(x(t), y(t))$  est l'ensemble des positions de ce point quand  $t$  parcourt tout l'intervalle des temps.

Les solutions  $(x(t); y(t))$  représentent dans le plan  $(x; y)$  les courbes appelées des **orbites**.

**Exemple 2** Le système suivant appelé système de mouvement de la pendule tel que :

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{dt} = \omega, \\ \frac{d\omega}{dt} = -\frac{g}{l} \sin \theta. \end{cases} \quad (1.6)$$

avec :  $\theta$  l'angle (orienté) que fait le pendule avec la verticale,  $l$  est la longueur de la pendule et  $g$  l'accélération de la pesanteur. Pour plus information voir [8]

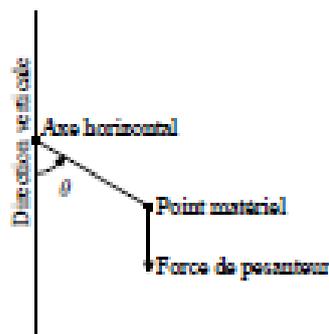


FIGURE 1.1 – Le champ de vecteur du système (1.6).

La trajectoire du système (1.6) est représentée dans la figure (1.2).

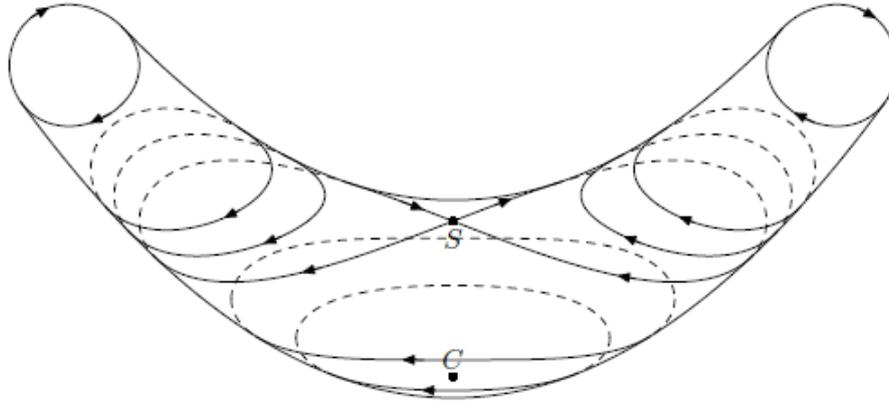


FIGURE 1.2 – Trajectoire de pendule.

### 1.3 Champs de vecteurs :

Un champ de vecteurs ou champ vectoriel est une fonction qui associe un vecteur à chaque point d'un espace euclidien. Pour la résolution des équations différentielles autonomes du premier ordre, on utilise le champ des directions (appelé en physique champ des vitesses) qui représente les dérivées tangentes à la trajectoire de ces équations, ce qui permet de la tracer.

**Définition 1.8** [6] *On appelle champ de vecteurs, une application du plan simplement connexe dans laquelle il existe en tout point  $M$  un vecteur  $\frac{d\vec{M}}{dt}$ , c'est-à-dire une application*

$$M(x, y) \longrightarrow \frac{d\vec{M}}{dt} = \begin{pmatrix} F(x, y) \\ G(x, y) \end{pmatrix}$$

où  $F, G$  sont deux fonctions de classe  $C^1$  sur  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ .

Le champ de vecteur associé au système (1.1) est noté

$$\chi = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

On peut l'écrire aussi sous la forme suivante :

$$\chi = P \frac{\partial}{\partial x} + Q \frac{\partial}{\partial y}$$

1.3. Champs de vecteurs :

---

- Nous rappelons que pour une solution définie une courbe intégrale le vecteur tangent  $\varphi'(t)$  à  $\varphi(t)$  coïncide avec la valeur du champ de vecteurs  $\chi$  au point  $\varphi(t)$ ; voir la figure suivante.

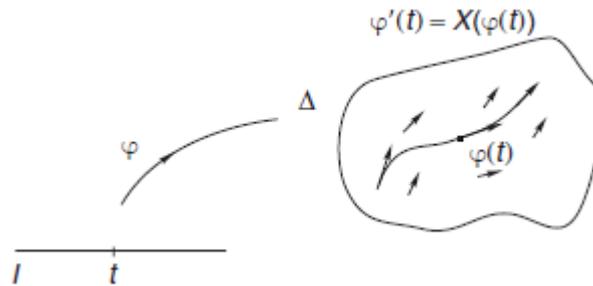


FIGURE 1.3 – Le champ de vecteur .

**Exemple 3** Soit le système

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = x^2. \end{cases} \quad (1.8)$$

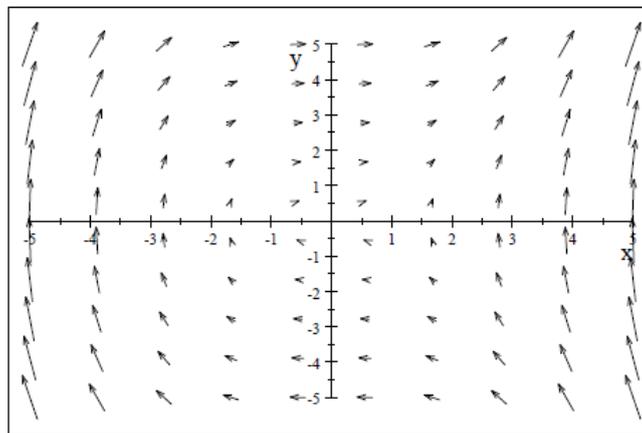


FIGURE 1.4 – Champ vecteur du système (1.8).

**Exemple 4** Soit le système différentielle

$$\begin{cases} \dot{x} = -y, \\ \dot{y} = x. \end{cases} \quad (1.9)$$

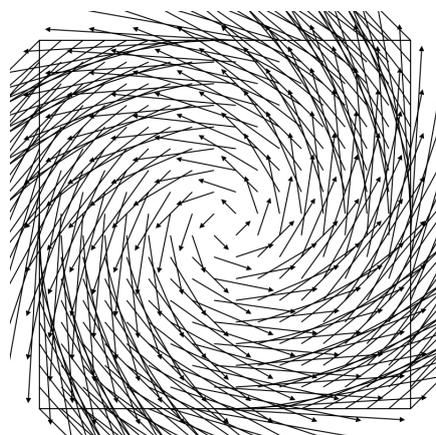


FIGURE 1.5 – Champ de vecteurs du système (1.9).

## 1.4 Flot

Soit  $M(x, y)$  un point de  $\mathbb{R}^2$ , on note  $\varphi_t(x, y)$  la position de  $M(x, y)$  après un déplacement d'une durée  $t (t > 0)$ .

**Définition 1.9** [6] On appelle *flot* (associé au champ de vecteur  $\chi$ ) l'application

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (t, (x, y)) &\longmapsto \varphi_t((x, y)), \end{aligned}$$

vérifiant les trois propriétés suivantes :

- i)  $\frac{d}{dt} \varphi_t((x, y)) = (F(\varphi_t(x, y)), G(\varphi_t(x, y)))$ ,
- ii)  $(\varphi_0(x, y)) = (x, y)$ ,
- iii)  $\varphi_{t+s}((x, y)) = \varphi_t F(\varphi_s((x, y)))$ ,

**Remarque 1.2** Pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  et  $t, s \in \mathbb{R}$  :

Le point i) signifie que  $\varphi_t((x, y))$  est continu par rapport aux conditions initiales

Le point ii) signifie que  $\varphi_t((x, y))$  est la solution maximale qui passe par  $(x, y)$  à  $t = 0$ .

Le point iii) est une nouvelle formulation du caractère autonome de (1.1) : au lieu de se déplacer pendant  $t + s$  on peut le faire pendant  $t$ , prendre une pause, ensuite poursuivre, puis finir son bout de chemin pendant une durée  $s$  : entre-temps le champ de vecteurs n'a pas été modifié.

**Remarque 1.3** Le flot est dit **autonome** si  $f$  ne dépend pas explicitement du temps  $t$ , sinon il est dit **non autonome**

### 1.4.1 Portrait de phase

**Définition 1.10** [5] Le plan  $\mathbb{R}^2$  est appelé plan de phases et les solutions d'un champ de vecteurs  $\chi$  représentent le plan de phases des orbites. Le portrait de phases d'un champ de vecteurs  $\chi$  est l'ensemble des orbites dans le plan de phases.

**Définition 1.11**  $\chi$  l'ensemble des trajectoires de phase pour différentes conditions initiales est le **portrait de phase**.

Les ensembles de  $\mathbb{R}^2$  sur lesquels s'annulent les composantes  $\dot{x}$  et  $\dot{y}$  du système est dit **Les isoclines**

**Exemple 5** Considérons le système différentiel suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = y - x - 2, \\ \dot{y} = x^2 - y. \end{cases} \quad (1.10)$$

Le champ de vecteurs et les trajectoires du système (1.10) sont illustrés sur le portrait de phase représenté sur la figure (1.6)

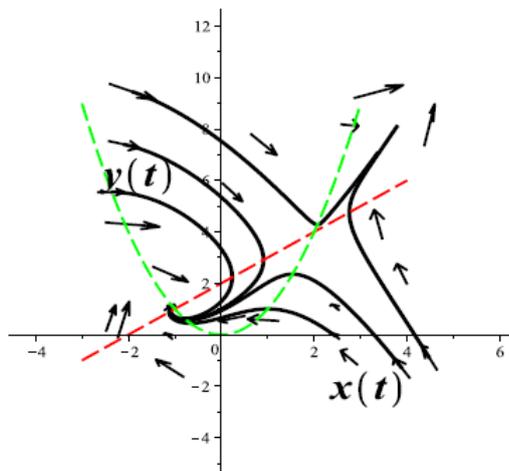


FIGURE 1.6 – Portrait de phase du système (1.10).

On voit qu'on peut deviner le comportement de certaines trajectoires du système, mais pas forcément celui de toutes les trajectoires : en se basant sur le sens du champ de vecteurs, on peut attribuer à certaines conditions initiales sur le plan, plusieurs comportements de trajectoires.

**Exemple 6** Considérons l'équation harmonique

$$\ddot{x} + x = 0. \quad (1.11)$$

La solution en spirale de l'équation harmonique, centrée autour de la ligne  $(x, \dot{x}, t) = (0, 0, t)$ .

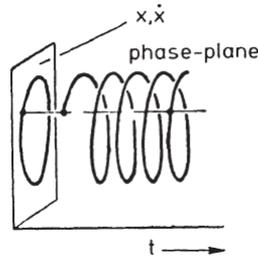


FIGURE 1.7 – Le plan de phase de l'équation harmonique (1.11) .

L'équation (1.11) est autonome, pour obtenir l'équation vectorielle correspondante, nous mettons  $x = x_1, \dot{x} = x_2$  alors

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1. \end{cases} \quad (1.12)$$

Comme on le sait, les solutions de l'équation scalaire sont des combinaisons linéaires de  $(\cos t, \sin t)$ . Il est facile de dessiner l'espace de solution  $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ , voir la figure précédant.

les solutions peuvent être projetées sur le plan  $x, \dot{x}$  est appelé le plan de phase.

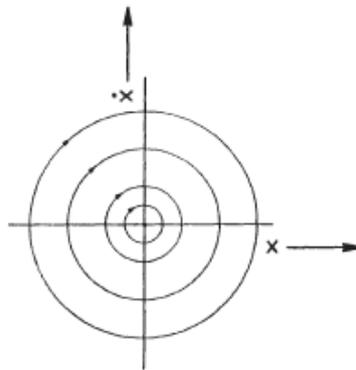


FIGURE 1.8 – Portrait de phase du système (1.12).

**Exemple 7** Considérons (1.6) le système du mouvement de pendule, le portrait de phase de ce système est :

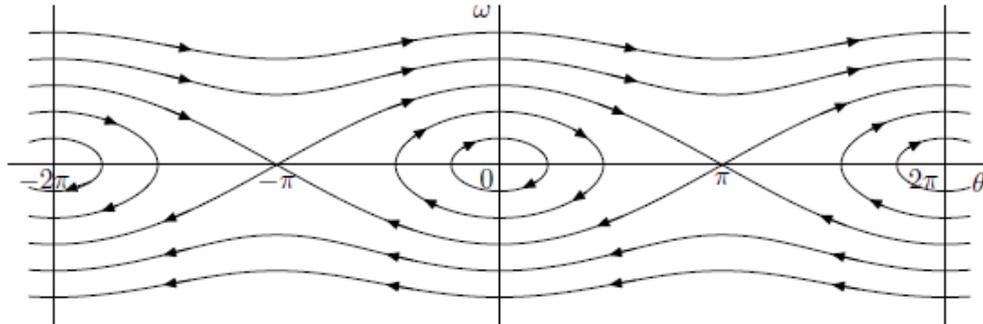


FIGURE 1.9 – Le portrait de phase du pendule plan dans  $\mathbb{R}^2$

## 1.4.2 Solutions périodiques

Un comportement générique consiste à faire tendre les solutions vers un mouvement périodique. Dans le cas du plan, cela signifie que les trajectoires se rapprochent d'un cycle (courbe fermée image d'une solution périodique). Les cycles des systèmes non linéaires sont plus souvent isolés et contrôlent le comportement des trajectoires proches, comme les points critiques contrôlent celui des autres trajectoires proches.

**Définition 1.12** [5] La solution  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$  du système (1.1) est dite périodique s'il existe  $T > 0$  tel que :

$$\gamma(t) = \gamma(t + T),$$

$T$  est alors sa période.

**Remarque 1.4** [5] Si  $\gamma(t)$  a la période  $T$ , la solution a aussi les périodes  $2T$ ,  $3T$ , etc. Supposons que  $T$  soit la plus petite période, que nous appelons  $\gamma(t)$   $T$ -périodique. Certains auteurs envisagent cas limite d'une solution d'équilibre avec une période arbitraire  $T \geq 0$ , également périodique, nous prendrons  $T > 0$  et fixe, sauf indication explicite que le cas d'une solution d'équilibre est également admise.

Considérons l'espace de phase correspondant à l'équation autonome (1.1) pour une solution périodique nous avons qu'après un temps  $T$ ,  $x = \gamma(t)$  assume la même valeur dans  $\mathbb{R}^n$ . Ainsi, une solution périodique produit une

orbite fermée ou un cycle dans l'espace de phase. nous devons montrer que nous pouvons inverser cette déclaration.

**Lemme 1.2** [5] Une solution périodique du système autonome (1.1) correspond à un orbite fermée (cycle) dans l'espace de phase et une orbite fermée correspond à une Solution.

**Exemple 8** L'oscillateur harmonique est régi par l'équation différentielle

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

qu'on peut écrire sous la forme des systèmes suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\omega^2 x. \end{cases} \quad (1.13)$$

ce système s'intègre facilement puisque  $\frac{dy}{dx} = -\omega^2 \frac{x}{y}$ , ce qui donne pour ensemble de solutions  $y^2 + \omega^2 x^2 = c$ , où  $c \in \mathbb{R}$ . Autrement dit, ce système possède une famille continue à un paramètre de solutions périodiques représentées dans le plan des phases par des ellipses.

### 1.4.3 Points singuliers

Les points singuliers jouent un rôle important dans l'étude des systèmes différentiels en particulier ceux qui sont non-linéaires au voisinage de ces points. Henri Poincaré (1854-1912) montra qu'au lieu de calculer les solutions détaillées, il suffit de connaître les points singuliers ainsi que leur stabilité. Le comportement des solutions à l'infini ( $t$  tend vers  $\pm\infty$ ) est l'une des questions essentielles, et souvent difficiles, que l'on se pose à propos des équations différentielles.

**Définition 1.13** [5] Un point  $(x_0, y_0)$  est dit point singulier du système (1.1) s'il vérifie :

$$F(x_0, y_0) = G(x_0, y_0) = 0$$

**Remarque 1.5** La notion de point d'équilibre est la même que celle de point singulier pour le champ de vecteurs. On parle plutôt de point singulier lorsque l'on regarde le champ de vecteurs pour lui-même et de point d'équilibre lorsque l'on s'intéresse aux trajectoires.

**Remarque 1.6** Les points singuliers du système (1.1) sont des solutions périodiques constantes.

### 1.4.4 Points d'équilibres

**Définition 1.14** [11] Soit le système non linéaire :

$$\begin{cases} \dot{x} = F(x, y), \\ \dot{y} = G(x, y), \end{cases} \quad (1.14)$$

Le point  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^n$  est appelé un point critique ou point d'équilibre du système (1.14) s'il vérifie

$$F(x_0, y_0) = G(x_0, y_0) = 0.$$

**Définition 1.15** [5] Un point d'équilibre  $(x_0, y_0)$  du système (1.14) est dit hyperbolique si aucune des valeurs propres de la matrice jacobienne de  $\begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix}$  n'a de partie réelle nulle. Dans le cas contraire, le point critique est dit non hyperbolique

### 1.4.5 Linéarisation des systèmes

Un bon endroit pour commencer à analyser le système non linéaire :

$$\begin{cases} \dot{x} = F(x, y), \\ \dot{y} = G(x, y). \end{cases} \quad (1.15)$$

est de déterminer les points d'équilibre de (1.15) et de décrire le comportement de (1.15) près de ses points d'équilibre. Le comportement du système non linéaire (1.15) près d'un point d'équilibre hyperbolique  $(x_0)$  est qualitativement déterminé par le comportement du système linéaire.

$$\dot{X} = AX, \quad (1.16)$$

avec la matrice  $A = Df(x_0)$ , proche de l'origine. La fonction linéaire  $AX = Df(x_0)x$  est appelée la partie linéaire de  $f$  en  $x_0$ .

**Définition 1.16** [11] Considérons le système non linéaire (1.15). Le système

$$\dot{X} = AX = DF(x_0, y_0) \quad (1.17)$$

est appelé Linéarisation de (1.15) en  $(x_0, y_0)$  ;

où  $DF(x_0, y_0) = J_\chi = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{pmatrix}$  est la matrice jacobienne associée au

champ de vecteurs  $\chi$  au voisinage d'un point critique  $(x_0, y_0)$ .

**Remarque 1.7** La linéarisation d'un système différentiel nous amène à l'étude de la nature des points critiques.

### Stabilité du point d'équilibre

Nous allons étudier la stabilité des points d'équilibres. Le problème qui se pose alors est de savoir si ces points d'équilibres sont stables ou non. Il existe de nombreuses notions de stabilité pour les systèmes différentiels non linéaires. Nous étudions ici la stabilité au sens de Lyapunov :

**Définition 1.17** - On dit que  $(x_0, y_0)$  est un point d'équilibre stable au sens de Lyapunov si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \|(x, y) - (x_0, y_0)\| \leq \delta \Rightarrow \forall t > 0, \|X(t) - X_0\| < \varepsilon.$$

- On dit que  $(x_0, y_0)$  est un point d'équilibre asymptotiquement stable si et seulement si :

$(x_0, y_0)$  est stable et,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|X(t) - X_0\| = 0.$$

où :  $X(t) = (F(x_t, y_t), G(x_t, y_t))$  et  $X_0 = (F(x_0, y_0), G(x_0, y_0))$ .

**Théorème 1.18** [5] Soit  $(x_0, y_0)$  un point d'équilibre pour le système 1.14

- (i) Si toutes les valeurs propres de la matrice Jacobienne  $DF(x_0, y_0)$  ont des parties réelles négatives, alors le point d'équilibre  $(x_0, y_0)$  est asymptotiquement stable.
- (ii) S'il existe au moins une valeur propre de  $DF(x_0, y_0)$  avec une partie réelle positive.  
Alors le point d'équilibre  $(x_0, y_0)$  est instable.
- (iii) Si  $DF(x_0, y_0)$  a des valeurs propres avec des parties réelles négatives et d'autres avec des parties réelles nulles, alors on ne peut rien dire sur la stabilité du point d'équilibre  $(x_0, y_0)$ .

### Classification des points singuliers selon la trace et le déterminant de la matrice $J_\chi$

Le flot de (1.1) au voisinage d'un point singulier  $(x_0, y_0)$  est classé selon les valeurs propres de la matrice  $J_\chi((x_0, y_0))$  son déterminant, ainsi que sa trace. Les valeurs propres de  $J_\chi$  sont des solutions de l'équation caractéristique

$$\lambda^2 - tr(J_\chi)\lambda + det(J_\chi) = 0$$

avec

$$\begin{cases} tr(J_\chi) = \lambda_1 + \lambda_2, \\ det(J_\chi) = \lambda_1 \lambda_2, \end{cases} \quad (1.18)$$

La nature des valeurs propres dépend du signe du discriminant

$$\Delta = (tr(J_\chi))^2 - 4det(J_\chi)$$

Trois cas se présentent :

**Première Cas :**  $\Delta = 0$ ;

On a alors  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ , c'est -à-dire  $det(J_\chi) = \lambda^2 > 0$  et  $tr(J_\chi) = 2\lambda$ . Par conséquent, si la trace est positive ( $\lambda > 0$ ), on a un nœud dégénéré instable voir figure (1.10).

si la trace est négative ( $\lambda < 0$ ), on a un dégénéré stable, voir figure (1.11).

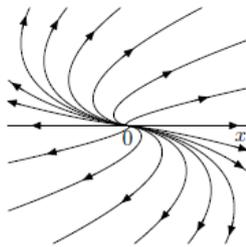


FIGURE 1.10 – Nœud dégénéré instable.

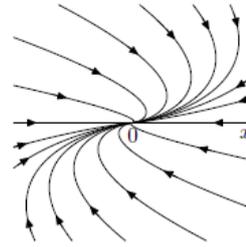


FIGURE 1.11 – Nœud dégénéré stable.

**Deuxième Cas :**  $\Delta > 0$ ;

On a alors deux valeurs propres réelles distinctes. donc

- i)  $det(J_\chi) < 0$  :  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont de signe opposé, l'origine est un col, voir figure (1.12).
- ii)  $det(J_\chi) > 0$  et  $tr(J) > 0$  :  $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ ; l'origine est un nœud instable, voir figure (1.13).
- iii)  $det(J_\chi) > 0$  et  $tr(J) < 0$  :  $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ ; l'origine est un nœud stable, voir figure (1.14).

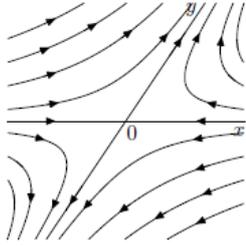


FIGURE 1.12 – Un col.

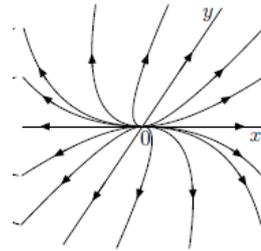


FIGURE 1.13 – Nœud instable.

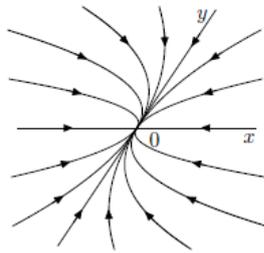


FIGURE 1.14 – Nœud stable.

**Troisième Cas :**  $\Delta < 0$ ;

On a alors deux valeurs propres complexes conjuguées  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ , c'est -à-dire  $\det(J_\chi) = \alpha^2 + \beta^2 > 0$  et  $\text{tr}(J_\chi) = 2\alpha$ .

- i)  $\text{tr}(J_\chi) < 0$ , l'origine est un foyer stable, voir figure (1.15).
- ii)  $\text{tr}(J_\chi) > 0$ , l'origine est un foyer instable, voir figure (1.16).
- iii)  $\text{tr}(J_\chi) = 0$ , l'origine est un centre, voir figure (1.17).

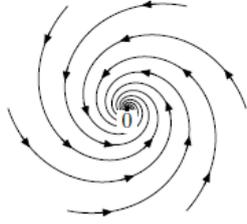


FIGURE 1.15 – Un foyer stable.

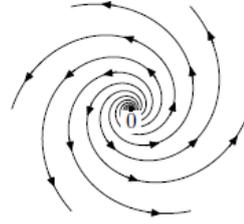


FIGURE 1.16 – Un foyer instable.

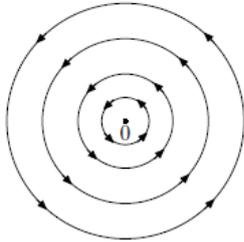


FIGURE 1.17 – Un cercle.

**Exemple 9** Considérons le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = F(x, y) = x(1-x) - \frac{xy}{1+x}, \\ \dot{y} = G(x, y) = y\left(x + 1 - \frac{y}{x}\right), \end{cases} \quad (1.19)$$

La matrice Jacobienne du système (1.19) est :

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{bmatrix}$$

où :

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} \left( x(1-x) - \frac{xy}{1+x} \right) \\ &= \frac{(-3x^2 + 1 - y)(1+x) - (-x^3 + x - xy)}{(1+x)^2} \\ &= -\frac{2x^3 + 3x^2 + y - 1}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} \left( x(1-x) - \frac{xy}{1+x} \right) \\ &= \frac{(-x)(1+x)}{(1+x)^2} \\ &= -\frac{x}{1+x}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial G}{\partial x}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} \left( y \left( x+1 - \frac{y}{x} \right) \right) \\ &= \frac{x^2 y + y^2}{x^2} \\ &= y \left( 1 + \frac{y}{x^2} \right).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial G}{\partial y}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} \left( y \left( x+1 - \frac{y}{x} \right) \right) \\ &= \frac{(x^2 + x - 2y)}{x^2} \\ &= x + 1 - \frac{2y}{x}\end{aligned}$$

Pour trouver les points critiques on va résoudre le système d'équation :

$$\begin{cases} \dot{x} = 0, \\ \wedge \\ \dot{y} = 0, \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\begin{cases} \dot{x} = 0, \\ \wedge \\ \dot{y} = 0, \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x(1-x) - \frac{xy}{1+x} = 0, \\ \wedge \\ y(x+1 - \frac{y}{x}) = 0, \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-x^3-x^2}{1+x} = 0, \quad \text{avec } x \neq -1, \\ \wedge \\ y(x+1 - \frac{y}{x}) = 0, \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \quad \vee \quad (x^2+x-1) = 0, \\ \wedge \\ y=0 \quad \vee \quad (x+1 - \frac{y}{x}) = 0, \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad \vee \quad y = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \\ \wedge \\ x=1 \quad \vee \quad y=0, \end{cases}\end{aligned}$$

donc les deux points critiques sont  $A = (1, 0)$ ,  $B = (0.61, 0.61)$  pour obtenir la matrice jacobienne dans chaque point d'équilibre on va remplacer chaque couple  $(x, y)$  Par ça valeur.

la matrice jacobienne dans  $A = (1, 0)$  est donne par :

$$J_A = \begin{pmatrix} -1 & -0.5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.20)$$

et la matrice jacobienne dans  $B = (0.61, 0.61)$  est donne par :

$$J_B = \begin{pmatrix} -0.47 & -0.38 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.21)$$

maintenant, pour étudier la stabilité au voisinage du points d'équilibres il faut calculer les valeurs propres de la matrice jacobienne.

1) Pour la matrice  $J_A$  :

$J_A - \lambda I_d = 0$  ce qui implique que :

$$(-1 - \lambda)(1 - \lambda) = 0$$

alors on a deux valeurs propres

$$\begin{cases} \lambda_1 = -1, \\ \lambda_2 = 1, \end{cases}$$

un vecteur propre associé à  $\lambda = -1$  :

on a  $J_A X = -X$  avec  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  donc :

$$\begin{cases} -x - 1/2y = -x, \\ y = -y, \end{cases}$$

par conséquence :  $(x, y) = (1, 0)$  est un vecteur propre associés à  $\lambda = 1$ .

On a  $J_A X = X$  avec  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  donc :

$$\begin{cases} -x - 1/2y = x, \\ y = y, \end{cases}$$

Donc :  $(x, y) = (-1/4, 1)$  par conséquence : le point critique  $A = (1, 0)$  est un point de selle.

2) Pour la matrice  $J_B$  :

De même manière pour la matrice  $J_B$  :

on trouve : les valeurs propres sont :  $\lambda = -0.73 \pm 0.55i$ .

le point  $B = (0.61, 0.61)$  est un foyer stable.

## 1.5 Courbes invariantes

Pour les systèmes différentiels, les parties invariantes jouent le même rôle que les connexes en topologie élémentaire : on restreint un flot à une partie invariante comme une application continue à une composante connexe, l'étude sur chaque composante est indépendante des autres. Elles jouent un rôle important dans l'intégrabilité des systèmes différentiels polynomiaux.

**Définition 1.19** [1] Soit  $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^1$  dans l'ouvert  $\Omega$ . L'ensemble

$$C_f = \{(x, y) \in \Omega / f(x, y) = 0\}$$

est dit *courbe invariante* s'il existe une fonction  $k(x, y)$  de classe  $C^1$  dans  $\Omega$ , appelée *co-facteur*, qui satisfait la relation suivante :

$$F(x, y) \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + G(x, y) \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = k(x, y) f(x, y) \quad (1.22)$$

pour tout  $(x, y) \in \Omega$ .

**Remarque 1.8** [6] L'identité précédant peut être écrite sous la forme suivante :

$$\nabla f \cdot F = kf \quad (1.23)$$

où  $F((x, y)) = (P(x, y), Q(x, y))$ ,  $\nabla f$  est le vecteur gradient de  $f(x, y)$ , c-à-d,  $\nabla f((x, y)) = (\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y))$  et "." désigne le produit scalaire. Nous désignons par  $\frac{\partial f}{\partial t}$  ou  $f'$  la fonction  $\nabla f \cdot F$  sur l'ensemble des solutions du système (1.1).

**Définition 1.20** [6] Une courbe invariante  $C_f$  est dite *algébrique* si  $f(x, y) \in \mathbb{R}[x, y]$  et elle est invariante pour le flot du système (1.1) dont le cofacteur  $k(x, y)$  est toujours un polynôme de degré  $\deg k(x, y) \leq n - 1$ .

**Définition 1.21** [6] Une courbe invariante  $U(x, y) = 0$  est dite *algébrique* de degré  $n$  si  $U(x, y)$  est un polynôme de degré  $n$  ; si non on dit qu'elle est *non algébrique*

**Proposition 1.1** [6] Soient  $f(x, y) = 0$  et  $g(x, y) = 0$  deux courbes algébriques invariantes du système (1.1) de cofacteurs respectifs  $k_f(x, y)$  et  $k_g(x, y)$  respectivement, alors le produit  $(fg)(x, y) = 0$  est aussi une courbe algébrique invariante du système (1.1) dont le cofacteur est  $k_f(x, y) + k_g(x, y)$ .

**Preuve 1** On a :

$$\begin{aligned} P\frac{\partial fg}{\partial x} + Q\frac{\partial fg}{\partial y} &= P\left(\frac{\partial f}{\partial x}g + \frac{\partial g}{\partial x}f\right) + Q\left(\frac{\partial f}{\partial x}g + \frac{\partial g}{\partial x}f\right) \\ &= g\left(P\frac{\partial f}{\partial x} + Q\frac{\partial f}{\partial y}\right) + f\left(P\frac{\partial g}{\partial x} + Q\frac{\partial g}{\partial y}\right) \end{aligned}$$

ce qui implique

$$P\left(\frac{\partial fg}{\partial x} + Q\frac{\partial fg}{\partial y}\right) = gK_f f + fK_g g$$

car  $f(x, y) = 0$  et  $g(x, y) = 0$  sont deux courbes algébriques invariantes du système (1.1).

Par conséquent,

$$P\left(\frac{\partial fg}{\partial x} + Q\frac{\partial fg}{\partial y}\right) = fg(K_f + K_g),$$

d'où le produit  $(fg)(x, y) = 0$  est une courbe algébrique invariante du cofacteur  $k_f(x, y) + k_g(x, y)$ .

**Théorème 1.22** [8] Considérons le système (1.1),  $\gamma(t)$  une orbite périodique de période  $T$  et supposons que  $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une courbe invariante telle que  $\gamma \subseteq \{(x, y)/f(x, y) = 0\}$  et  $k(x, y)$  est le cofacteur de la courbe invariante. Supposons que  $\nabla f(p) \neq 0, \forall p \in \gamma$ . Alors,

$$\int k(\gamma(t))dt = \int \text{div}(\gamma(t))dt.$$

**Remarque 1.9** La supposition  $\nabla f(p) \neq 0$  signifie que  $f$  ne contient pas des points singuliers.

**Exemple 10** On considère le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = F(x, y) = x^2 + y^2 + y - 1, \\ \dot{y} = G(x, y) = x^2 + y^2 - x - 1. \end{cases} \quad (1.24)$$

posons :

$$U(x, y) = x^2 + y^2 - 1.$$

on a :

$$\begin{aligned} F\frac{\partial U}{\partial x}(x, y) + G\frac{\partial U}{\partial y}(x, y) &= 2x(x^2 + y^2 + y - 1) + 2y(x^2 + y^2 - x - 1) \\ &= (2x + 2y)(x^2 + y^2 - 1) + 2xy - 2yx \\ &= (2x + 2y)(x^2 + y^2 - 1) \\ &= K(x, y)U(x, y). \end{aligned}$$

d'après (1.22) :  $U(x, y)$  est un courbe invariante et  $K(x, y) = 2x + 2y$  est le cofacteur du système (1.24).

**Exemple 11** [1] *Considérons le système à deux paramètres quintique :*

$$\begin{cases} \dot{x} = F_5(x, y), \\ \dot{y} = G_5(x, y), \end{cases} \quad (1.25)$$

où

$$F_5(x, y) = x + x(x^2 + y^2 - 1)(ax^2 - 4bxy + ay^2) + (x^2 + y^2)(-2x + 2y + x^3 + xy^2),$$

et

$$G_5(x, y) = y + y(x^2 + y^2 - 1)(ax^2 - 4bxy + ay^2) + (x^2 + y^2)(-2x - 2y + y^3 + x^2y),$$

dans lequel  $a \in \mathbb{R}_+^*$  et  $b \in \mathbb{R}^*$

posons  $U(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ , on a :

$$\begin{aligned} F_5 \frac{\partial U}{\partial x}(x, y) &= 2x [x + x(x^2 + y^2 - 1)(ax^2 - 4bxy + ay^2)] \\ &\quad + 2x [(x^2 + y^2)(-2x + 2y + x^3 + xy^2)] \\ G_5 \frac{\partial U}{\partial y}(x, y) &= 2y [y + y(x^2 + y^2 - 1)(ax^2 - 4bxy + ay^2)] \\ &\quad + 2y [(x^2 + y^2)(-2x - 2y + y^3 + x^2y)] \end{aligned}$$

On pose :

$$\begin{aligned} A &= (x^2 + y^2) \\ B &= (x^2 + y^2 - 1) \end{aligned}$$

Alors  $F_5 \frac{\partial U}{\partial x}(x, y) + G_5 \frac{\partial U}{\partial y}(x, y)$  devient :

$$\begin{aligned} &2x^2 + 2x^2B(ax^2 - 4bxy + ay^2) + 2A(-2x^2 + 2xy + x^4 + x^2y^2) \\ &+ 2y^2 + 2y^2B(ax^2 - 4bxy + ay^2) + 2A(-2xy - 2y^2 + y^4 + x^2y^2) \\ &= 2AB(ax^2 - 4bxy + ay^2 + x^2 + y^2 - 1) \\ &= 2AB[(a + 1)x^2 - 4bxy + (a + 1)y^2 - 1] \\ &= 2ABP_2. \end{aligned}$$

Donc  $(\gamma_1) \doteq x^2 + y^2 - 1 = 0$  est une courbe invariante pour ce système associée avec le cofacteur :

$$K(x, y) = 2(x^2 + y^2)P_2(x, y) \quad (1.26)$$

tel que

$$P_2(x, y) = (a + 1)x^2 - 4bxy + (a + 1)y^2 - 1.$$

## Chapitre 2

# Intégrabilité et cycle limite d'un système différentiel

### 2.1 L'intégrale première des systèmes différentielles

La notion d'intégrabilité pour un système différentiel est basée sur l'existence d'intégrales premières, donc la question qui se pose : Si on a un système différentiel, comment connaître s'il a une intégrale première? ou si on a une classe des systèmes différentiels dépendant de paramètres, comment déterminer les valeurs des paramètres pour lesquelles le système a une intégrale première? Malheureusement ces questions n'ont pas de bonnes réponses.

**Définition 2.1** (*Intégrale première*) [6] *Le système polynomial (1.1) est intégrable sur un sous-ensemble ouvert  $U$  de  $\mathbb{F}^2$  s'il existe une fonction non constante  $H : U \rightarrow \mathbb{F}$ , appelée première intégrale du système sur  $U$ , qui est constante sur toutes les courbes de solution  $(x(t), y(t))$  de système (1.1) contenu dans  $U$ ; soit  $H(x(t), y(t)) = \text{cste}$  pour toutes les valeurs de  $t$  pour laquelle la solution  $(x(t), y(t))$  est définie et contenue dans  $U$ . Clairement  $H$  est une **intégrale première** du système (1.1) sur  $U$  si et seulement si :*

$$F(x, y) \frac{\partial H}{\partial x}(x, y) + G(x, y) \frac{\partial H}{\partial y}(x, y) \equiv 0$$

sur  $U$ .

**Définition 2.2** *On dit que le système (1.1) est intégrable sur  $U$  ( $U$  est un ouvert du plan) s'il admet une intégrale première sur  $U$ .*

### 2.1.1 Orbite périodique

**Définition 2.3** [5] La solution  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$  du système différentiel autonome (1.15) est dit périodique s'il existe  $T > 0$  tel que :

$$\begin{cases} x(t+T) = x(t), \\ y(t+T) = y(t). \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R}_+ \quad (2.1)$$

$T$  est alors sa période. Dans le plan des phases une solution périodique est représentée par une courbe fermée, (**Orbite périodique**).

**Définition 2.4** soit :

$$\begin{cases} x = \Psi_1(t), \\ y = \Psi_2(t), \end{cases} \quad (2.2)$$

Une solution périodique du système (1.15) et  $\gamma$  la courbe représentative de cette solution, on dit que  $\gamma$  est une solution périodique isolée si :

$\exists \delta > 0, \forall M$  dans le plan des phases :  $d(\gamma, M) < \delta$ .

alors il n'existe pas d'autres solutions périodiques passant par  $M$ .

**Exemple 12** L'oscillateur harmonique est régi par l'équation différentielle

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0.$$

Cette équation équivaut au système :

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\omega^2 x. \end{cases} \quad (2.3)$$

Ce système s'intègre facilement puisque

$$\frac{dy}{dx} = -\omega^2 \frac{x}{y} \quad (2.4)$$

ce qui donne pour ensemble de solutions

$$y^2 + \omega^2 x^2 = C \quad (2.5)$$

Autrement dit, ce système possède une famille continue à un paramètre de solutions périodiques représentées dans le plans de phase par des ellipses.

## 2.2 Cycle limite

**Définition 2.5** *Un cycle limite du système (1.15) est une trajectoire périodique isolée dans l'ensemble de toutes les orbites périodiques de ce système.*

**Remarque 2.1** *La représentation géométrique d'un cycle limite dans le plan de phases est une courbe fermée régulière, qui entoure au moins un point d'équilibre.*

*Les cycles limites apparaissent seulement dans les systèmes différentiels non linéaires.*

**Exemple 13** *Soit le système :*

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x(1 - x^2 - y^2), \\ \dot{y} = x + x(1 - x^2 - y^2) \end{cases} \quad (2.6)$$

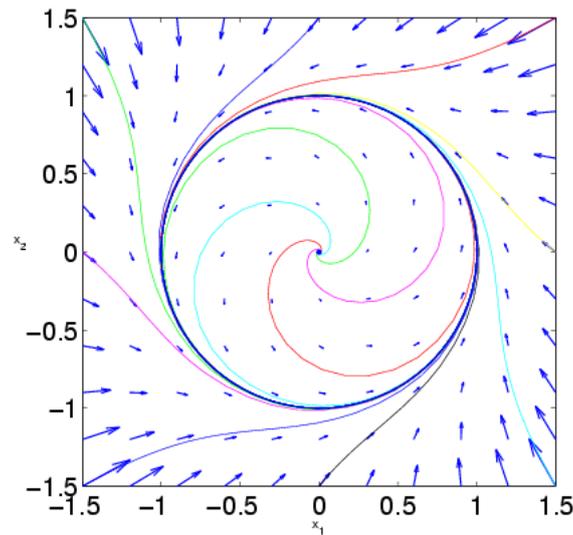


FIGURE 2.1 – Cycle limite du système (2.6) .

**Théorème 2.6** *Tout système polynomial (1.1) a au plus un nombre fini de cycles limites dans  $\mathbb{R}^2$ .*

**Preuve 2** voir : [6]

### 2.2.1 Cycle limite algébrique

**Définition 2.7** [12] *Si un cycle limite est contenu dans une courbe algébrique du plan, on dit que c'est algébrique, sinon on parle de non-algébrique.*

## 2.3 Existence et non-existence de cycles limites

### 2.3.1 Critères d'existence

**Théorème 2.8** (Premier critère)[10] On considère le système (1.1)  $F$  et  $G$  sont définies dans le sous-ensemble ouvert  $\omega$  de classe  $C^1$ , tel que  $(x(t), y(t))$  une solution périodique de période  $T$ , associée à ce système.

Supposons que  $U = U(x, y)$  est une solution  $C^1$  de l'équation linéaire au dérivée partiel :

$$F(x, y) \frac{\partial U}{\partial x}(x, y) + G(x, y) \frac{\partial U}{\partial y}(x, y) = K(x, y) U(x, y) \quad (x, y) \in \omega, \quad (2.7)$$

où le cofacteur  $K : \omega \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction de classe  $C^1$  vérifiant :

$$\int_0^T K(x(t), y(t)) dt \neq 0$$

alors la trajectoire fermée :  $\gamma = \{(x(t), y(t)) \in \omega : t \in [0, T]\}$ , est contenu dans :  $\Sigma = \{(x, y) \in \omega : U(x, y) = 0\}$ , et  $\gamma$  n'est pas contenu dans un anneau circulaire. De plus, si le champ de vecteurs  $\chi$  est analytique, alors  $\gamma$  est un cycle limite.

**Théorème 2.9** (Deuxième critère)[10] Considérons le système (1.1) et supposons que :

- 1)  $F, G$  de classe  $C^1$  ;
- 2)  $U = U(x, y)$  de classe  $C^1$  solution de l'équation linéaire aux dérivées partielles

$$F \frac{\partial U}{\partial x} + G \frac{\partial U}{\partial y} = \left( \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} \right) U$$

si  $\gamma$  est un cycle limite du système (1.1), alors  $\gamma$  est contenu dans

$$\Sigma = \{(x, y) \in \omega : U(x, y) = 0\}.$$

### 2.3.2 Critères de non existence

**Théorème 2.10** (critère de Bendixon) [5] Dans une région du plan de phases, la quantité :

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y}$$

garde un signe constant, il ne peut y avoir des orbites fermées dans ce domaine du système (1.1) : Donc le système (1.1) n'admet pas de cycle limite.

**Théorème 2.11** (Formule de Green-Riemann) Soit  $K$  un compact de  $\mathbb{R}^2$  dont la frontière  $\partial K$  est constituée d'une réunion finie de courbes de classe  $C^1$ . On oriente la frontière de  $K$  de sorte que en parcourant la frontière dans le sens de l'orientation,  $K$  soit constamment sur la gauche.

Soit de plus  $\vec{M} = (F, G)$  un champ de vecteurs  $C^1$  par morceaux sur  $K$ . Alors

$$\int_{\partial K} Fdx + Gdy = \int \int_K \left( \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y} \right) dx dy. \quad (2.8)$$

**Démonstration 1** Supposons que  $\gamma : X = X(t)$ ,  $0 \leq t \leq T$ , est une orbite fermée du système (1.1) contenue dans  $C$ , et que  $D$  désigne l'intérieur du  $\gamma$ , il s'en suit de la Formule de Green-Riemann que

$$\begin{aligned} \int \int_D \left( \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} \right) dx dy &= \oint_{\gamma} (Fdy - Gdx) \\ &= \int_0^T (Fdy - Gdx) \\ &= \int_0^T (Fy' - Gx') dt \\ &= \int_0^T (FG - GF) dt \end{aligned} \quad (2.9)$$

donc l'intégrale vaut 0, et si  $\text{div}(F, G)$  est non identiquement nulle et ne change pas de signe dans  $D$ , alors il s'en suit de la continuité de champ de vecteurs  $(F, G)$  dans  $D$  que l'intégrale double précédente est soit positive ou négative. Dans tous les cas, cela conduit à une contradiction.

Donc, il n'y a pas de cycles limite de (1.1) entièrement contenu dans  $C$ .

**Remarque 2.2** Le théorème a été formulé et prouvé pour les fonctions vectorielles dans  $\mathbb{R}^2$ .

La méthode la plus connue pour prouver la non-existence de cycles limites de manière simple est la méthode Bendixson – Dulac.

Le critère de Bendixson est un cas particulier du critère de Bendixson-Dulac comme le montre le théorème suivant :

**Théorème 2.12** (Critère de Bendixson-Dulac) [11] Soit le système différentiel polynomial (1.1) et soit la fonction  $B(x, y)$  de classe  $C^1$  sur un domaine simplement connexe  $C$  de  $\mathbb{R}^2$ . Si la quantité

$$\frac{\partial F}{\partial x} (BF) + \frac{\partial G}{\partial y} (BG)$$

est non identiquement nulle et de signe constant sur  $C$ , alors le système (1.1) n'admet pas de cycle limite dans  $C$ .

**Démonstration 2** *Sans perte de généralité, supposons qu'il existe une fonction  $B(x, y)$  telle que*

$$\frac{\partial BF}{\partial x} + \frac{\partial BG}{\partial y} > 0 \quad (2.10)$$

*dans une région simplement connexe  $C$ . Soit  $\gamma$  une trajectoire fermée du système autonome dans  $C$ . Soit  $D$  l'intérieur de  $\gamma$ . De la formule de Green, il s'en suit*

$$\begin{aligned} \int \int_D \left( \frac{\partial BF}{\partial x} + \frac{\partial BG}{\partial y} \right) dx dy &= \oint_{\gamma} (BF dy - BG dx) \\ &= \int_0^T (BF y' - BG x') dt \\ &= \int_0^T (BFG - BGF) dt \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

*C'est une contradiction, alors il ne peut y avoir une telle trajectoire fermée  $\gamma$ .*

Le théorème de Poincaré – Bendixson permet de montrer l'existence de cycles limites sous hypothèses pratiques.

**Théorème 2.13** *(Théorème de Poincaré-Bendixson)[3]*

*Soit  $f_1(x, y)$ ,  $f_2(x, y)$  et  $h(x, y)$  des fonctions  $C^1$  dans un domaine simplement connecté  $\omega \subset \mathbb{R}^2$  tel que  $\frac{\partial f_1 h}{\partial x} + \frac{\partial f_2 h}{\partial y}$  ne change pas de signe dans  $\omega$  et disparaît au plus sur l'ensemble de mesure zéro. Le système*

$$\begin{cases} x' = f_1(x, y), \\ y' = f_2(x, y), \end{cases} (x, y) \in \omega \quad (2.12)$$

*n'a pas d'orbites périodiques en  $\omega$*

*Selon le théorème de Poincaré-Bendixson, on peut prendre le quasi-différentiel suivant équation*

$$f_1 \frac{\partial h}{\partial x} + f_2 \frac{\partial h}{\partial y} = h \left( c - \left( \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} \right) \right), \quad (2.13)$$

*où  $h$  est une fonction de Dulac.*

**Théorème 2.14** *Considérons le système suivant :*

$$\begin{cases} \dot{x} = x (g_0(x) + g_1(x) y), \\ \dot{y} = y (h_0(x) + h_1(x) y), \end{cases} (x, y) > 0. \quad (2.14)$$

Si  $c = -h_0 + g_0 + xg_{0x} - g_0 \frac{(xg_1)'(x)}{g_1(x)} < 0$  alors le système de Kolmogorov admet une fonction du Dulac définie par :

$$h = \frac{1}{xg_1(x)y^2} \quad (2.15)$$

et il n'admet pas des orbites périodiques dans l'intérieure de premier quadrant.

**Preuve 3** Considérons le système (2.14), posons  $c = -h_0 + g_0 + xg_{0x} - g_0 \frac{(xg_1)'(x)}{g_1(x)}$  alors :  $h = \frac{1}{xg_1(x)y^2}$  en suit :

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial x} = -\frac{g_1(x)y^2 + xyg'(x)}{(xg_1(x)y^2)^2} \\ \frac{\partial h}{\partial y} = -\frac{2xg_1(x)y}{(xg_1(x)y^2)^2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f_1 \frac{\partial h}{\partial x} + f_2 \frac{\partial h}{\partial y} &= x(g_0(x) + g_1(x)y) \left( -\frac{g_1(x)y^2 + xyg'(x)}{(xg_1(x)y^2)^2} \right) \\ &+ y(h_0(x) + h_1(x)y) \left( -\frac{2xg_1(x)y}{(xg_1(x)y^2)^2} \right) \\ &= \frac{1}{xg_1(x)y^2} \left[ -(g_0(x) + g_1(x)y) \frac{xy^2g_1(x) + xg_1'(x)}{xy^2g_1(x)} \right] \\ &+ \frac{1}{xg_1(x)y^2} \left[ (h_0(x) + h_1(x)y) \frac{-2yxg_1(x)y^2}{xg_1(x)y^2} \right] \\ &= \frac{1}{xg_1(x)y^2} \left[ -x \frac{g_0(x)g'(x)}{g_1(x)} - yg_1(x) - xyg_1'(x) - 2h_0(x) - 2h_1(x)y \right] \\ &= \frac{1}{xg_1(x)y^2} \left[ -xg_0(x) \frac{g'(x)}{g_1(x)} - y(xg_1)_x y - 2h_0(x) - 2h_1(x)y \right] \end{aligned}$$

Alors :

$$\left( c - \left( \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} \right) \right) = -xg_0(x) \frac{g'(x)}{g_1(x)} - y(xg_1)_x y - 2h_0(x) - 2h_1(x)y.$$

En suit, si  $h = h(\omega)$  où  $\omega = g(x)y^2$  et d'après (2.14) :

$$\frac{\partial h}{\partial \omega} \left( f_1 \frac{\partial \omega}{\partial x} + f_2 \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) = h \left( c - \left( \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} \right) \right), \quad (2.16)$$

et  $f_1 \frac{\partial \omega}{\partial x} + f_2 \frac{\partial \omega}{\partial y} = xg_0(x) \frac{g'(x)}{g_1(x)} + y(xg_1)_x y + 2h_0(x) + 2h_1(x)y g(x)y^2$ , en conséquence,  $\frac{\partial h}{\partial \omega} = -\frac{h}{\omega}$ . alors :  $h = \frac{1}{\omega} = \frac{1}{g(x)y^2} = \frac{1}{xg(x)y^2}$

### 2.3.3 Stabilité du cycle limite

**Proposition 2.1** [11]

- Un cycle limite est dit **attractif** ou **stable** s'il existe un voisinage de ce cycle tel que toutes les trajectoires issues de ce voisinage tendent vers ce cycle, lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$ .

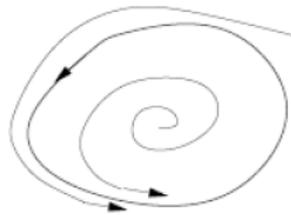


FIGURE 2.2 – Cycle limite stable.

- Un cycle limite est dit **répulsif** ou **instable** s'il existe un voisinage de ce cycle tel que toutes les trajectoires issues de ce voisinage s'éloignent de ce cycle, lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$ .

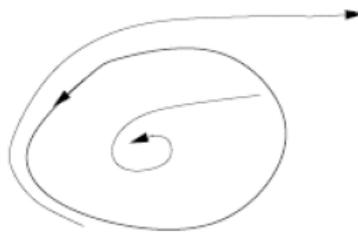


FIGURE 2.3 – Cycle limite instable.

- Un cycle limite est dit **semi-stable** s'il existe un voisinage de ce cycle tel que toutes les trajectoires issues de ce voisinage tendent vers ce cycle d'un côté de ce dernier et s'en éloignent de l'autre côté, lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$

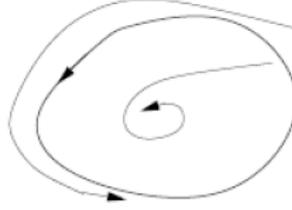


FIGURE 2.4 – Cycle limite semi-stable.

Le résultat suivant, donne une formule pour distinguer la stabilité d'un cycle limite

**Théorème 2.15** [11] Soit  $\gamma(t)$  une orbite périodique du système (1.1) de période  $T$ .

Alors  $\gamma$  est un : cycle limite stable si

$$\int_0^T \operatorname{div}(\gamma(t)) dt < 0.$$

et  $\gamma$  est instable si

$$\int_0^T \operatorname{div}(\gamma(t)) dt > 0.$$

Il peut être un cycle limite stable, instable ou semi-stable ou peut appartenir à une bande continue des cycles si

$$\int_0^T \operatorname{div}(\gamma(t)) dt = 0.$$

avec

$$\operatorname{div}(x, y) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$$

**Remarque 2.3** Lorsque la quantité  $\int_0^T \operatorname{div}(\gamma(t)) dt$  est différente de zéro, on dit que le cycle limite est hyperbolique.

**Exemple 14** Considérons le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x(1 - x^2 - y^2), \\ \dot{y} = x + y(1 - x^2 - y^2). \end{cases} \quad (2.17)$$

Le passage des coordonnées cartésiennes  $(x, y)$ , aux coordonnées polaires  $(x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, \tan \theta = \frac{x}{y})$  permet de résoudre le système (2.17) :

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial t} \\ \dot{y} = \frac{dy}{dt} = \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial t} \end{cases}$$

Cela veut dire que :

$$\begin{aligned} \dot{r} \cos \theta - \dot{\theta} r \sin \theta &= -r \sin \theta (1 - r^2), \\ \dot{r} \sin \theta + \dot{\theta} r \cos \theta &= r \cos \theta + r \cos \theta (1 - r^2). \end{aligned}$$

On obtient le système :

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = r - r^3, \\ \frac{d\theta}{dt} = 1. \end{cases} \quad (2.18)$$

le système (2.18) équivaut à l'équation suivante :

$$\frac{dr}{d\theta} = r - r^3$$

donc :

$$\dot{r} - r = -r^3 \quad (2.19)$$

C'est une équation de Bernoulli. On divise l'équation (2.19) par  $r^3$ , on obtient :

$$\dot{r} r^{-3} - r^{-2} = -1 \quad (2.20)$$

On pose :

$$z = r^{-2}$$

On dérive, pour obtenir :

$$\frac{dz}{d\theta} = -2r^{-3} \dot{r}$$

Ce qui implique que :

$$-\dot{z} - 2z = -2$$

C'est une équation différentielle linéaire en  $z$  et  $\dot{z}$  non homogène pour résoudre cette équation, on cherche la solution homogène pour résoudre cette équation. On considère l'équation homogène associée

$$-\frac{dz}{d\theta} - 2z = 0$$

On se ramène à une équation à variables séparées

$$\frac{dz}{z} = -2d\theta$$

En intégrant, on trouve

$$\begin{aligned} \ln z &= -2\theta + c_1 \\ z(\theta) &= c_2 e^{-2\theta} \end{aligned}$$

tel que

$$c_2 = e^{c_1}$$

On utilise la méthode de la variation de la constante arbitraire, on obtient

$$z(\theta) = c_2 e^{-2\theta}$$

En dérivant, on trouve

$$\frac{dz}{d\theta} = -2c_2 e^{-2\theta} + c_2' e^{-2\theta}$$

On substitue  $z$  et  $z'$  dans (2.18), on aura

$$\begin{aligned} -2 &= 2e^{-2\theta} c_2(\theta) - c_2' e^{-2\theta} - 2c_2 e^{-2\theta} \\ &= -e^{-2\theta} c_2'(\theta) \end{aligned}$$

Ce qui implique

$$c_2'(\theta) = 2e^{2\theta}$$

donc

$$c_2(\theta) = e^{2\theta} + c$$

On revient à la solution, on trouve

$$\begin{aligned} z(\theta) &= e^{-2\theta} (e^{2\theta} + c) \\ &= 1 + ce^{-2\theta} \end{aligned}$$

On a, d'après ce qui précède

$$z = \frac{1}{r^2}$$

ce qui implique

$$\begin{aligned} r^2 &= \frac{1}{z} \\ &= \frac{1}{1 + ce^{-2\theta}} \end{aligned}$$

On revient aux coordonnées cartésiennes

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{1 + ce^{-2 \arctan(\frac{y}{x})}}$$

$$\begin{aligned} U(x, y) &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 + y^2 - \frac{1}{1 + ce^{-2 \arctan(\frac{y}{x})}} &= 0 \end{aligned}$$

pour  $c = 0$ , dans le plan de phases, c'est le cercle d'équation  $x^2 + y^2 - 1 = 0$  et c'est un cycle limite. les autres solutions s'obtiennent par intégration du système. Lorsque  $t \rightarrow \infty$  toutes ces solutions s'approchent du cycle limite. Dans cet exemple, on a

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t)^T, \operatorname{div}(F, G) = 2 - 4x^2 - 4y^2 \quad (2.21)$$

et

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{div}(\gamma(t)) dt = \int_0^{2\pi} (2 - 4 \cos^2 t - 4 \sin^2 t) dt = -4\pi$$

Puisque  $\int_0^{2\pi} \operatorname{div}(\gamma(t)) dt < 0$ , le cycle limite  $\gamma(t)$  est stable.

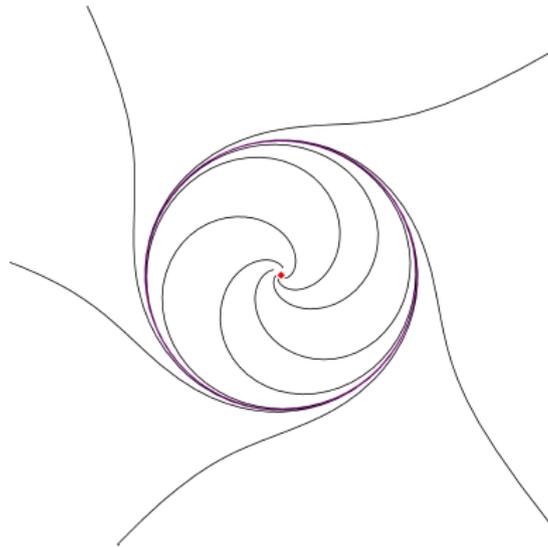


FIGURE 2.5 – Le cycle limite de de système (2.17) .

# Chapitre 3

## Sur deux classes de systèmes différentiels planaires

### 3.1 Systèmes différentiels à cycles limites explicites non algébriques

Dans cette section on expose et étudier une classe de système de degré trois. Étudier dans l'article de Rebiha BENTERKI, Jaume LIBRE, sous titre "Polynomial Differential systems with explicit non-algebraic limit cycles" Publier dans le journal : Electronic-Journal-of-differential-equation, vol 2012.

**Théorème 3.1** [12] *On considère le système différentiel polynomial .*

$$\begin{cases} \dot{x} = x + (y - x)(x^2 - xy + y^2), \\ \dot{y} = y - (y + x)(x^2 - xy + y^2). \end{cases} \quad (3.1)$$

le système (3.1) admet un unique cycle limite non-algébrique dont l'expression en coordonnées polaires donnée par :

$$r(\theta) = e^\theta \sqrt{r_*^2 - f(\theta)}, \quad (3.2)$$

où  $r_* = e^{2\pi} \sqrt{\frac{f(2\pi)}{e^{4\pi} - 1}}$  et  $f(\theta) = 4 \int_0^\theta \frac{e^{-2s}}{2 - \sin 2s} ds$ .

De plus, ce cycle limite est hyperbolique stable.

**Preuve 4** *Le système différentielle (3.1) en coordonnées polaires  $(r, \theta)$  définie par  $x = r \cos \theta$  et  $y = r \sin \theta$  avec  $\tan \theta = \frac{y}{x}$  devient :*

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial t} \\ \dot{y} = \frac{dy}{dt} = \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial t} \end{cases}$$

cela veut dire que :

$$\begin{cases} \dot{r} \cos \theta - \dot{\theta} r \sin \theta = r \cos \theta + (r \sin \theta - r \cos \theta)(r^2(1 - \cos \theta \sin \theta)) \\ \dot{r} \sin \theta + \dot{\theta} r \cos \theta = r \sin \theta - (r \sin \theta + r \cos \theta)(r^2(1 - \cos \theta \sin \theta)) \end{cases} \quad (3.3)$$

(3.1) devient : :

$$\begin{aligned} \dot{r} &= r \cos^2 \theta + r^3 \cos \theta (\sin \theta - \cos \theta)(1 - \cos \theta \sin \theta) \\ &+ r \sin^2 \theta - r^3 \sin \theta (\sin \theta + \cos \theta)(1 - \cos \theta \sin \theta) \\ &= r + r^3(1 - \cos \theta \sin \theta)(-1) \\ &= r + \frac{1}{2}(\sin(2\theta)) - 2r^3. \end{aligned}$$

et :

$$\begin{cases} -\dot{r} \cos \theta \sin \theta + r \dot{\theta} \sin^2 \theta = -r \cos \theta \sin \theta - r^3(\sin^2 \theta - \cos \theta \sin \theta)(1 - \cos \theta \sin \theta) \\ \dot{r} \cos \theta \sin \theta + r \dot{\theta} \cos^2 \theta = r \cos \theta \sin \theta - r^3(\sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta)(1 - \cos \theta \sin \theta) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} r \dot{\theta} &= -r^3(1 - \cos \theta \sin \theta) \\ \Leftrightarrow \dot{\theta} &= \frac{1}{2}r^2(\sin(2\theta) - 2). \end{aligned}$$

alors le système (3.1) devient :

$$\begin{cases} \dot{r} = r + \frac{1}{2}(\sin(2\theta) - 2)r^3. \\ \dot{\theta} = \frac{1}{2}r^2(\sin 2\theta - 2). \end{cases} \quad (3.4)$$

on prend la variable indépendant le coordonné  $\theta$ , ce système devient :

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\theta} &= \frac{r + \frac{1}{2}(\sin(2\theta) - 2)r^3}{\frac{1}{2}r^2(\sin 2\theta - 2)} \\ &= \frac{\frac{1}{2}r[2 + r^2(\sin 2\theta - 2)]}{\frac{1}{2}r[r(\sin 2\theta - 2)]} \end{aligned}$$

$$\frac{dr}{d\theta} = r + \frac{2}{r(\sin 2\theta - 2)} \quad (3.5)$$

Ce qui implique que :

$$\dot{r} = r + \frac{1}{r} \frac{2}{(\sin 2\theta - 2)}$$

alors :

$$r\dot{r} - r^2 = \frac{2}{(\sin 2\theta - 2)}$$

alors :

$$2r\dot{r} - 2r^2 = \frac{4}{(\sin 2\theta - 2)}$$

On pose que :

$$z = r^2 \implies \dot{z} = 2r\dot{r}$$

Pour résoudre cette équation on va chercher les solutions de l'équation homogène et la solution particulière associée :

1) - L'équation homogène associée à ce système est :

$$-\dot{z} - 2z = 0$$

donc :

$$z_h(\theta) = c_1 e^{2\theta} \quad c_1 \in \mathbb{R}.$$

2)- Solution particulière :

On va appliquer la méthode de variation de la constante, ie : On cherche une solution sous la forme

$$z_0(\theta) = c_1(\theta) e^{2\theta}.$$

On va chercher à quelle condition  $z_0(\theta)$  est une solution de (4) : On a :

$$\begin{cases} z_0(\theta) = c_1 e^{2\theta}, \\ \dot{z}(\theta) = c_1(\theta) (2e^{2\theta}) + e^{2\theta} \dot{c}_1(\theta). \end{cases}$$

On sait que :

$$-\dot{z} - 2z = \frac{4}{(\sin 2\theta - 2)}$$

la somme des solutions donne :

$$\begin{aligned} c_1(\theta) (2e^{2\theta}) + e^{2\theta} \dot{c}_1(\theta) - 2c_1 e^{2\theta} &= \frac{4}{(\sin 2\theta - 2)} \\ \Leftrightarrow \dot{c}_1(\theta) e^{2\theta} &= \frac{4}{(\sin 2\theta - 2)} \\ \Leftrightarrow \dot{c}_1(\theta) &= \frac{4e^{-2\theta}}{\sin(2\theta) - 2} \end{aligned}$$

on intègre et on trouve :

$$c_1(\theta) = 4 \int_0^\theta \frac{e^{-2s}}{\sin(2s) - 2} ds \quad (3.6)$$

donc :

$$z_0(\theta) = 4e^{2\theta} \int_0^\theta \frac{e^{-2s}}{\sin(2s) - 2} ds$$

$$z(\theta) = c_1 e^{2\theta} + 4e^{2\theta} \int_0^\theta \frac{e^{-2s}}{\sin(2s) - 2} ds$$

$$z = e^{2\theta} \left[ r_0^2 - 4 \int_0^\theta \frac{e^{-2s}}{(2 - \sin 2s)} ds \right]$$

on sait que  $z = r^2 \Rightarrow r = \sqrt{z}$  et alors :

$$r(\theta, r_0) = \sqrt{z} = e^\theta \sqrt{r_0^2 - 4 \int_0^\theta \frac{e^{-2s}}{(2 - \sin 2s)} ds}. \quad (3.7)$$

donc :

$$r(\theta, r_0) = \sqrt{z} = e^\theta \sqrt{r_0^2 - f(\theta)}. \quad (3.8)$$

avec

$$f(\theta) = 4 \int_0^\theta \frac{e^{-2s}}{2 - \sin(2s)} ds.$$

il est triviale de vérifier que l'unique point d'équilibre de système différentiel (3.1) est l'origine.

\* Une solution de l'équation (3.5) est  $r_0 = r_*$ , où  $r_*$  est défini dans l'énoncé du théorème (3.2). Alors si  $r(\theta, r_*) > 0$  pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$ , nous aurons  $r(\theta, r_*) > 0$  serait une orbite périodique, et par conséquent il est cycle limite. On va chercher  $r_*$  qui vérifie l'équation :  $r(2\pi, r_0) = r_0$ .

$$r(2\pi, r_0) = r_0 \quad (3.9)$$

$$\Leftrightarrow e^{2\pi} \sqrt{r_0^2 - f(2\pi)} = r_0$$

$$\Leftrightarrow r_0^2 = e^{4\pi} (r_0^2 - f(2\pi))$$

$$\Leftrightarrow r_0^2 (e^{4\pi} - 1) = e^{4\pi} f(2\pi)$$

$$\Leftrightarrow r_0^2 = \frac{e^{4\pi}}{(e^{4\pi} - 1)} f(2\pi)$$

$$\Leftrightarrow r_* = e^{2\pi} \sqrt{\frac{f(2\pi)}{e^{4\pi} - 1}}$$

$$\begin{aligned} r(\theta, r_*) &= e^\theta \sqrt{e^{4\pi} \frac{f(2\pi)}{e^{4\pi} - 1} - f(\theta)} \\ &= e^\theta \sqrt{\frac{e^{4\pi}}{e^{4\pi} - 1} \cdot f(2\pi) - f(\theta)} \\ &\geq e^\theta \sqrt{f(2\pi) - f(\theta)} \end{aligned}$$

alors :

$$\begin{aligned}
 f(2\pi) - f(\theta) &= 4 \left[ \int_0^\theta \frac{e^{-2s}}{2 - \sin(2s)} ds + \int_\theta^{2\pi} \frac{e^{-2s}}{2 - \sin 2s} ds \right] - 4 \int_0^\theta \frac{e^{-2s}}{2 - \sin 2s} ds \\
 f(2\pi) - f(\theta) &= 4 \int_\theta^{2\pi} \frac{e^{-2s}}{2 - \sin 2s} ds \\
 e^\theta \sqrt{f(2\pi) - f(\theta)} &= e^\theta \sqrt{4 \int_\theta^{2\pi} \frac{e^{-2s}}{2 - \sin 2s} ds} \\
 &= 2e^\theta \sqrt{\int_\theta^{2\pi} \frac{e^{-2s}}{2 - \sin 2s} ds}
 \end{aligned}$$

et comme :  $\frac{e^{-2s}}{2 - \sin 2s} > 0$   
alors  $r(\theta, r_*) > 0$

$$\begin{aligned}
 \frac{dr(2\pi, r_0)}{dr_0} &= \frac{d}{dr_0} \left( e^{2\pi} \sqrt{r_0^2 - f(2\pi)} \right) \\
 &= e^{2\pi} \frac{d}{dr_0} \left( \sqrt{r_0^2 - f(2\pi)} \right) \\
 &= e^{2\pi} \frac{2r_0}{2\sqrt{r_0^2 - f(2\pi)}} \\
 &= e^{2\pi} \frac{r_0}{\sqrt{r_0^2 - f(2\pi)}}
 \end{aligned}$$

Pour  $r_0 = r_*$

$$\begin{aligned}
 &= e^{2\pi} \frac{e^{2\pi} \sqrt{\frac{f(2\pi)}{e^{4\pi} - 1}}}{\sqrt{\frac{e^{4\pi} f(2\pi)}{e^{4\pi} - 1} - f(2\pi)}} \\
 &= e^{4\pi} \frac{\sqrt{\frac{f(2\pi)}{e^{4\pi} - 1}}}{\sqrt{\frac{e^{4\pi} f(2\pi) - e^{4\pi} f(2\pi) + f(2\pi)}{e^{4\pi} - 1}}} \\
 &= e^{4\pi} \frac{\sqrt{\frac{f(2\pi)}{e^{4\pi} - 1}}}{\sqrt{\frac{f(2\pi)}{e^{4\pi} - 1}}} \\
 &= e^{4\pi}
 \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} r(\theta) &= e^\theta \sqrt{r_*^2 - f(\theta)} \\ (r(\theta))^2 &= \left( e^\theta \sqrt{r_*^2 - f(\theta)} \right)^2 \\ &= e^{2\theta} (r_*^2 - f(\theta)) \end{aligned}$$

n'est pas algébrique, à cause de l'expression  $e^{2\theta} r_*^2$ . Plus précise, en coordonnées cartésiennes la courbe définie par ce cycle limite est :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = r^2, \\ \tan \theta = \frac{y}{x}. \end{cases}$$

donc :

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= e^{2 \arctan(\frac{y}{x})} \left( r_*^2 - 4 \int_0^{\arctan \frac{y}{x}} \frac{e^{-2s}}{2 - \sin 2s} ds \right) \\ \Leftrightarrow f(x, y) &= x^2 + y^2 - e^{2 \arctan(\frac{y}{x})} \left( r_*^2 - 4 \int_0^{\arctan \frac{y}{x}} \frac{e^{-2s}}{2 - \sin 2s} ds \right) = 0 \end{aligned}$$

on va dériver  $f(x, y)$  par rapport à  $x$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 2x - 2 \frac{-\frac{y}{x}}{1 + (\frac{y}{x})^2} e^{2 \arctan \frac{y}{x}} \left( r_*^2 - 4 \int_0^{\arctan \frac{y}{x}} \frac{e^{-2s}}{2 - \sin 2s} ds \right) \\ &\quad - e^{2 \arctan \frac{y}{x}} \left( -4 \frac{-\frac{y}{x}}{1 + (\frac{y}{x})^2} \right) \left( \frac{e^{-2 \arctan \frac{y}{x}}}{2 - \sin 2 \arctan \frac{y}{x}} \right) \\ &= 2x + \frac{2y}{x^2 + y^2} e^{2 \arctan \frac{y}{x}} \left( r_*^2 - 4 \int_0^{\arctan \frac{y}{x}} \frac{e^{-2s}}{2 - \sin 2s} ds \right) \\ &\quad - \frac{4y}{(x^2 + y^2) (2 - \sin 2 \arctan \frac{y}{x})} \end{aligned}$$

le courbe  $(r \cos \theta, r \sin \theta)$  dans le plan  $(x, y)$  avec :

$$r(\theta) = e^\theta \sqrt{r_*^2 - f(\theta)}$$

est non-algébrique.

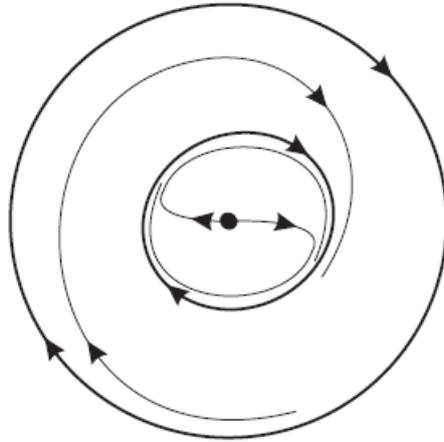


FIGURE 3.1 – Le portrait de phase dans le disque Poincaré du système (3.1).

### 3.2 Une classe de système de kolmogorov

Dans cette section on expose notre résultat sur l'intégrabilité et non existence des cycles limites de système de kolmogorov suivant. On dit qu'un système différentiel est de kolmogorov s'il est de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = x (F(x, y)), \\ \dot{y} = y (G(x, y)). \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = x \left( P(x, y) + R(x, y) e^{\frac{F(x, y)}{G(x, y)}} \right), \\ \dot{y} = y \left( Q(x, y) + R(x, y) e^{\frac{F(x, y)}{G(x, y)}} \right). \end{cases} \quad (3.10)$$

avec :  $n, \delta, m$  sont des entiers positives et  $P(x, y), Q(x, y), R(x, y), F(x, y), G(x, y)$  des polynômes homogènes de degré  $n, n, \delta, m, m$  respectivement, avec :  $h(\theta) = \sin \theta \cos \theta (Q(\cos \theta, \sin \theta) - P(\cos \theta, \sin \theta))$ .

**Théorème 3.2** *Considérons le système (3.10), les assertions suivantes sont vérifiées :*

(i) Si  $h(\theta) \neq 0$ , pour  $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$  et  $\delta - n \neq 0$  et  $G(x, y) \neq 0$ , alors le système (3.10) admet un intégrale première :

$$I(x, y) = (x^2 + y^2)^{\frac{n+\delta}{2}} \exp\left(- (n+\delta) \int_{\theta_0}^{\arctan \frac{y}{x}} \frac{f(s)}{h(s)} ds\right) - (n+\delta) \int_{\theta_0}^{\arctan \frac{y}{x}} \exp\left(- (n+\delta) \int_{v_0}^v \frac{f(s)}{h(s)} ds\right) \frac{g(v)}{h(v)} dv.$$

où  $\theta_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$ . De plus, le système (3.10) n'admet pas de cycle limite à l'intérieur du premier quadrant du plan.

(ii) Si  $h(\theta) \neq 0$ , pour  $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$  et  $\delta - n = 0$  et  $G(x, y) \neq 0$ , alors le système (3.10) admet une intégrale première :

$$L(x, y) = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \exp\left(- \int_{\theta_0}^{\arctan \frac{y}{x}} \left(\frac{f(u)}{h(u)} du + \frac{g(u)}{h(u)}\right) du\right).$$

où  $\theta_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$ . De plus, le système (3.10) n'admet pas d'orbite périodique à l'intérieur du premier quadrant du plan.

(iii) Si  $h(\theta) = 0$ , pour toute  $\theta \in [0, 2\pi]$  et  $G(x, y) \neq 0$ , alors le système (3.10) admet une intégrale première :  $T(x, y) = \frac{y}{x}$ . De plus, la système (3.10) n'admet pas de cycle limite.

**Preuve 5** Pour démontrer notre résultats, nous écrivons le système différentielle (3.10) en coordonnées polaires  $(r, \theta)$  définie par  $x = r \cos \theta$  et  $y = r \sin \theta$  on a.

$$\begin{aligned} \dot{r} \cos \theta - \dot{\theta} r \sin \theta &= r \cos \theta \left( r^n P(\cos \theta, \sin \theta) + r^\delta R(\cos \theta, \sin \theta) e^{\frac{F(\cos \theta, \sin \theta)}{G(\cos \theta, \sin \theta)}} \right) \\ \dot{r} \sin \theta + \dot{\theta} r \cos \theta &= r \sin \theta \left( r^n Q(\cos \theta, \sin \theta) + r^\delta R(\cos \theta, \sin \theta) e^{\frac{F(\cos \theta, \sin \theta)}{G(\cos \theta, \sin \theta)}} \right) \end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned} \dot{r} &= r^{n+1} (\cos^2 \theta P(\cos \theta, \sin \theta) + \sin^2 \theta Q(\cos \theta, \sin \theta)) \\ &\quad + r^{\delta+1} R(\cos \theta, \sin \theta) e^{\frac{F(\cos \theta, \sin \theta)}{G(\cos \theta, \sin \theta)}} \\ \dot{\theta} &= \sin \theta \cos \theta (Q(\cos \theta, \sin \theta) - P(\cos \theta, \sin \theta)) r^n \end{aligned}$$

soit :

$$\begin{aligned} f(\theta) &= \cos^2 \theta P(\cos \theta, \sin \theta) + \sin^2 \theta Q(\cos \theta, \sin \theta), \\ &\quad \frac{F(\cos \theta, \sin \theta)}{G(\cos \theta, \sin \theta)}, \\ g(\theta) &= R(\cos \theta, \sin \theta) e^{\frac{F(\cos \theta, \sin \theta)}{G(\cos \theta, \sin \theta)}}, \\ h(\theta) &= \sin \theta \cos \theta (Q(\cos \theta, \sin \theta) - P(\cos \theta, \sin \theta)). \end{aligned}$$

alors le système (3.10) devient :

$$\begin{cases} \dot{r} = f(\theta) r^{n+1} + g(\theta) r^{\delta+1}, \\ \dot{\theta} = h(\theta) r^n. \end{cases} \quad (3.11)$$

(a) Si  $h(\theta) \neq 0$ , pour  $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$  et  $\delta - n \neq 0$  et  $G(x, y) \neq 0$ .  
on prend comme une variable indépendante la coordonnée  $\theta$ , le système différentiel (3.11) est écrire sous la forme :

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{f(\theta)}{h(\theta)} r + \frac{g(\theta)}{h(\theta)} r^{\delta+1-n}$$

qui est une équation de Bernoulli. On prend une nouvelle variable  $\rho = r^{n+\delta}$  on obtient l'équation linéaire :  $n + \delta = (q - p)n + \delta$

$$\frac{d\rho}{d\theta} = (n + \delta) \left( \frac{f(\theta)}{h(\theta)} \rho + \frac{g(\theta)}{h(\theta)} \right) \quad (3.12)$$

la solution générale de l'équation linéaire (3.12) est :

$$\begin{aligned} \rho(\theta) &= \left( k + (n + \delta) \int_{\theta_0}^{\theta} \exp \left( -(n + \delta) \int_{v_0}^v \frac{f(s)}{h(s)} ds \right) \frac{g(v)}{h(v)} dv \right) \\ &\times \exp \left( (n + \delta) \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{f(s)}{h(s)} ds \right); \end{aligned}$$

Où  $k \in \mathbb{R}$ , qui a la première intégrale :

$$\begin{aligned} I(x, y) &= (x^2 + y^2)^{\frac{n + \delta}{2}} \exp \left( -(n + \delta) \int_{\theta_0}^{\arctan \frac{y}{x}} \frac{f(s)}{h(s)} ds \right) \\ &- (n + \delta) \int_{\theta_0}^{\arctan \frac{y}{x}} \exp \left( -(n + \delta) \int_{v_0}^v \frac{f(s)}{h(s)} ds \right) \frac{g(v)}{h(v)} dv. \end{aligned}$$

Les courbes  $I = l$  avec  $l \in \mathbb{R}$ ; sont créées par des trajectoires du système différentielle (3.10). Ces équations de trajectoires peuvent être écrites en coordonnées cartésiennes comme suit :

$$x^2 + y^2 = \left( \left( l + (n + \delta) \int_{\theta_0}^{\arctan \frac{y}{x}} \exp \left( -(n + \delta) \int_{v_0}^v \frac{f(s)}{h(s)} ds \right) \frac{g(v)}{h(v)} dv \right) \times \right)^{\frac{2}{n+\delta}} \exp \left( ((n + \delta)) \int_{\theta_0}^{\arctan \frac{y}{x}} \frac{f(s)}{h(s)} ds \right)$$

Donc, l'orbite périodique F est contenue dans l'équation de la courbe :

$$(\Lambda) : x^2 + y^2 = \left( (l_F + ((n + \delta)) \int_{\theta_0}^{\arctan \frac{y}{x}} \exp \left( -(n + \delta) \int_{v_0}^v \frac{f(s)}{h(s)} ds \right) \frac{g(v)}{h(v)} dv \right) \times \right)^{\frac{2}{n+\delta}} \exp \left( ((n + \delta)) \int_{\theta_0}^{\arctan \frac{y}{x}} \frac{f(s)}{h(s)} ds \right)$$

Mais la courbe  $(\Lambda)$  Ne peut pas contenir l'orbite périodique  $\mathbb{F}$  et donc pas de cycle limite contenu dans le premier quadrant de le plan, car la courbe est réaliste le quadrant a-t-il ne contient qu'un seul point ou aucun point sur chaque ligne droite  $(\Lambda_\lambda) : y = \lambda x$  pour toute  $\lambda > 0$ .

(b) Si  $h(\theta) \neq 0, \delta - n = 0$ .

En prenant comme variable indépendante la coordonnée  $\theta$ , puis le système différentiel (2)

$$\frac{dr}{d\theta} = \left( \frac{f(\theta)}{h(\theta)} + \frac{g(\theta)}{h(\theta)} \right) r. \quad (3.13)$$

La solution générale de l'équation (3.13) est

$$r(\theta) = k \exp \left( \int_{\theta_0}^{\theta} \left( \frac{f(u)}{h(u)} + \frac{g(u)}{h(u)} \right) du \right)$$

où  $k \in \mathbb{R}$ ; qui a la première intégrale

$$L(x, y) = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \exp \left( - \int_{\theta_0}^{\arctan \frac{y}{x}} \left( \frac{f(u)}{h(u)} + \frac{g(u)}{h(u)} \right) du \right)$$

Les courbes  $L = l$  avec  $l \in \mathbb{R}$  sont créées par les trajectoires du système différentiel (3.10). Ces trajectoires peuvent être écrites en coordonnées cartésiennes comme suit :

$$(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} = k \exp \left( \int_{\theta_0}^{\arctan \frac{y}{x}} \left( \frac{f(u)}{h(u)} + \frac{g(u)}{h(u)} \right) du \right)$$

Par conséquent, l'orbite périodique  $(\Sigma)$  est contenue dans la courbe :

$$(C) : (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} = k_{\Sigma}^2 \exp \left( \int_{\theta_0}^{\arctan \frac{y}{x}} \left( \frac{f(u)}{h(u)} + \frac{g(u)}{h(u)} \right) du \right)^2$$

Mais la courbe  $(C)$  ne peut contenir l'orbite périodique  $(\Sigma)$  et donc pas cycle limite contenu dans le premier quadrant du plan, car la courbe  $(C)$  dans le quadrant réaliste a au plus un point unique sur chaque ligne droite  $y = \lambda x$  pour tout  $\lambda > 0$ .

(c) Si  $h(\theta) = 0$  pour tout  $\theta \in [0; 2\pi]$ , alors à partir de (2) il s'ensuit que  $\dot{\theta} = 0$ . Alors les lignes droites passant par l'origine des coordonnées du système différentiel (3.10) sont invariants par le flux de ce système. Par conséquent,  $T(x, y) = \frac{y}{x}$  est une première intégrale du système. Puis, puisque toutes les lignes droites à l'origine sont créées par trajectoires, qui peuvent être écrites en coordonnées cartésiennes comme  $y = \gamma x$  où  $\gamma \in \mathbb{R}$ . Donc, il n'y a pas de cycle limite.

**Exemple 15** Si :

$$\begin{aligned} P(x, y) &= 2xy, \\ Q(x, y) &= 6xy, \\ R(x, y) &= x^2y + y^3, \\ F(x, y) &= x + 3, \\ G(x, y) &= -3x + 6. \end{aligned}$$

où :  $n = 2, \delta = 3, m = 2$ , le système (3.10) devient :

$$\begin{cases} \dot{x} = x(2x + (x^2y + y^3)e^{-3x+6}), \\ \dot{y} = y(6xy + (x^2y + y^3)e^{-3x+6}). \end{cases} \quad (3.14)$$

et :

$$\begin{aligned} h(\theta) &= \sin \theta \cos \theta ((6r^2 \cos \theta \sin \theta) - (2r^2 \cos \theta \sin \theta)) \\ &= 4r^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta \neq 0. \end{aligned}$$

de plus :  $\delta - n \neq 0$  et  $G(r \cos \theta, r \sin \theta) \neq 0$ , alors le système (3.10) admet une intégrale premier :

$$\begin{aligned} I(x, y) &= (x^2 + y^2)^{\frac{n+\delta}{2}} \exp \left( - (n + \delta) \int_{\theta_0}^{\arctan \frac{y}{x}} \frac{8r^2 \cos s \sin s}{4r^2 \cos^2(s) \sin^2(s)} ds \right) \\ &- (n + \delta) \int_{\theta_0}^{\arctan \frac{y}{x}} \exp \left( - (n + \delta) \int_{v_0}^v \frac{8r^2 \cos s \sin s}{4r^2 \cos^2(s) \sin^2(s)} ds \right) \\ &\quad \frac{\cos(v) + 3}{r^3 (\cos^2(v) \sin(v) + \sin^3(v)) e^{-3 \cos(v) + 6}} \\ &\quad \frac{1}{4r^2 \cos^2(v) \sin^2(v)} dv. \end{aligned}$$

de plus : il n'admet pas de cycle limite à l'intérieur du premier quadrant plan.

# Bibliographie

- [1] A. Bendjeddou and R. Cheurfa, Coexistence of algebraic and non-algebraic limit cycles for quintic polynomial differential systems , *Elect. J. of Diff. Equ.*, vol.2017 (2017),No.71, 1-7.
- [2] A.Bendjeddou and R. Cheurfa, Cubic and quartic planar differential systems with exact algebraic limit cycles, *Elect. J. of Diff. Equ.*, no15 (2011), 1-12.
- [3] A. M. Marin, R. D. Ortiz and S. B. Gutierrez. Stability in a Holling-Tanner Predator-Prey Model Like a Kolmogorov System without Periodic Orbits via Dulac Functions. *Cont Eng Sc*, Vol. 11, 2018, no. 45, 2219 - 2224
- [4] C.Marle. Systèmes dynamiques et champs de vecteurs. Universitext, Springer-Verlag 2005.
- [5] F. Verhulst, *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*, Universitext. Springer. New York. 1996.
- [6] F. Dumortier, J. Llibre and J.C. Artés, *Qualitative theory of planar differential systems*, Universitext, Springer-Verlag 2006.
- [7] J.Libre,A.E. Teruel .Introduction to the Qualitative Theory of Differential Systems Jaume Llibre Planar, Symmetric and Continuous Piecewise Linear Systems.Springer Basel , New York, 2014.
- [8] J. Giné, Maite Grau, A note on : Relaxation oscillators with exact limit cycles, *J. Math. Anal. Appl.* 324 (2006) 739-745

- [9] J.Pierre Demailly. Analyse numérique et équations différentielles.
- [10] H Giacomini, J Llibrez and M Viano. On the nonexistence, existence and uniqueness of limit cycles. *Nonlinearity* 9 (1996) 501–516.
- [11] L. Perko, *Differential equations and dynamical systems*, Third edition. *Texts in Applied Mathematics*, 7. Springer-Verlag, New York, 2001.
- [12] R. Benterki, J. Libre, Polynomial differential systems with explicit non-algebraic limit cycles, *Elect. J. of Diff. Equ.*, vol.2012 (2012), No.78, 1-6.
- [13] Y. Yuana, H. Chenc, C. Duc, d, Y. Yuan, The limit cycles of a general Kolmogorov system, *J. Math. Anal. Appl.* 392 (2012) 225–237
- [14] Z. Zhi-fen, D. Tong-ren, H. Wen-zao, D. Zhen-xi, *Qualitative theory of Differential equations*, Translation by Mathematical Monographs.