

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université de Ghardaïa



Faculté des Sciences et Technologies  
Département d'automatique et électromécanique



Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

**MASTER**

**Domaine :** *Sciences et Technologies*

**Filière :** Automatique

**Spécialité :** Automatique et système

**Par :** BOUALLAOUI Boubakar

BOUAMER Mohammed

**Thème**

**COMMANDE PAR INTERVALLE FLOU D'UN SYSTEME LINEAIRE**

**Soutenu publiquement Le 27/06/2019**

**Devant le jury :**

<b>M.EKKAR Belgacem</b>	M.A.A	Université de Ghardaïa	<b>Président</b>
<b>M.BENCHAABANE Achour</b>	M.A.A	Université de Ghardaïa	<b>Examineur</b>
<b>M.SADOUNI Redouane</b>	M.C.B	Université de Ghardaïa	<b>Examineur</b>
<b>M.BECHOUAT Mohcene</b>	M.C.B	Université de Ghardaïa	<b>Encadreur</b>
<b>M.BOUARROUDJ Noureddine</b>	M.C.B	Université de Ghardaïa	<b>Co-Encadreur</b>

*Année universitaire 2018/2019*

N° d'ordre :

N° de série :

# Dédicaces

Nous dédions ce travail :

A nos parents en témoignage de leurs sacrifices et  
leurs encouragements.

A nos sœurs et frères pour leurs soutiens.

A nos amis en souvenirs des bons moments  
passées ensemble.

*BOUALLAOUI Boubakar et BOUAMER Mohammed*

# REMERCIEMENTS

Nous tenons tout d'abord à remercier Dieu le tout puissant, qui nous a donné la force et la patience d'accomplir ce Modeste travail.

En second lieu, nous tenons à remercier notre encadreur

Docteur : Bechouat Mohcene pour ses précieux conseils et son aide durant toute la période du travail.

Nos vifs remerciements vont également aux membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont porté à notre recherche en acceptant d'examiner notre travail et de l'enrichir par leurs propositions.

Enfin, nous tenons également à remercier toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

الهدف من هذا العمل هو دراسة وتوضيح تأثير المدخلات غير الدقيقة على أداء خوارزميات التحكم التقليدية. نقوم في هذا العمل بتطبيق نظرية المجال الضبابي في نطاق تعريف الأنظمة غير الخطية والتحكم فيها، مثل نظام النواس الدوار المقلوب الذي أجرينا عليه المحاكاة. أظهرت نتائج المحاكاة كفاءة التحكم بالمجال الضبابي وقوته.

**الكلمات المفتاحية:** منطق ضبابي، مجال ضبابي، نظام خطي، نواس دوار مقلوب، التحكم بالمجال الضبابي.

## Résumé

L'objectif de ce travail consiste à étudier et illustrer l'influence des entrées imprécises sur les performances des algorithmes de commande conventionnelle. Dans ce travail, nous considérons l'application de la théorie des intervalles flous dans le domaine de l'identification et la commande des systèmes non linéaires, telle que le système pendule inversé rotatif que nous avons simulé. Les résultats de simulation ont démontré l'efficacité et la robustesse de la commande par intervalles flous.

**Mots-clés :** logique flou, intervalle flou, système linéaire, pendule inversé rotatif, commande par intervalles flous.

## Abstract

The objective of this work is to study and illustrate the influence of imprecise inputs on the performance of conventional control algorithms. In this work, we consider the application of fuzzy interval theory in the field of identification and control of nonlinear systems, such as the rotary inverted pendulum system that we have simulated. The simulation results demonstrated the efficiency and robustness of the fuzzy interval control.

**Keywords:** fuzzy logic, fuzzy interval, linear system, rotary inverted pendulum, fuzzy interval control.

## SOMMAIRE

Dédicaces .....	i
REMERCIEMENTS .....	ii
Résumé.....	iii
LISTE DES TABLEAUX.....	vii
LISTE DES FIGURES .....	viii
LISTE DES SYMBOLES.....	ix
INTRODUCTION GENERALE .....	1
CHAPITRE I. THEORIE DE LA LOGIQUE FLOU.....	2
I.1. Introduction .....	2
I.2. Apparence de la logique flou et ses applications.....	2
I.3. Les ensembles flous.....	2
I.3.1. Sous ensemble flou .....	3
I.3.2. Caractéristiques des ensembles flous .....	3
I.3.3. Opérations sur la logique floue .....	4
I.3.4. Propriétés des ensembles flous.....	6
I.4. Concepts flous .....	6
I.4.1. Convexité .....	6
I.4.2. Le produit cartésien .....	6
I.4.3. Le principe d'extension .....	7
I.5. Systèmes flous .....	7
I.5.1. Variables linguistiques.....	7
I.5.2. Fuzzification .....	8
I.5.3. Base des règles .....	8
I.5.4. Inférence floue .....	8
I.5.4.1. Inférences floues de Mamdani (MAX-MIN) .....	9
I.5.4.2. Inférences floues de Sugeno .....	9

<b>I.5.5. Défuzzification</b> .....	<b>9</b>
<b>I.6. Arithmétique floue</b> .....	<b>10</b>
<b>I.6.1 Quantités et intervalles flous</b> .....	<b>10</b>
<b>I.7 Nombres flous</b> .....	<b>10</b>
<b>I.7.1. Définition</b> .....	<b>11</b>
<b>I.7.2. Types des nombres flous</b> .....	<b>11</b>
<b>I.7.2.1. Nombre triangulaire floue (Nombre flou linéaire)</b> .....	<b>11</b>
<b>I.7.2.2. Nombre flou Gaussien</b> .....	<b>12</b>
<b>I.7.2.3. Singleton flou</b> .....	<b>13</b>
<b>I.7.3. Opérations arithmétiques élémentaires flous</b> .....	<b>14</b>
<b>I.8. Les nombres flous décomposés</b> .....	<b>18</b>
<b>I.8.1. Décomposition des nombres flous</b> .....	<b>18</b>
<b>I.8.2. L'arithmétique des intervalles</b> .....	<b>19</b>
<b>I.9. L'arithmétique floue avancée-La méthode de transformation</b> .....	<b>21</b>
<b>I.9.1. Simulation et analyse des modèles incertains</b> .....	<b>21</b>
<b>I.9.2. Simulation par la méthode de transformation</b> .....	<b>22</b>
<b>I.9.2.1. La décomposition des entrées flous</b> .....	<b>22</b>
<b>I.9.2.2. Transformation des intervalles d'entrée</b> .....	<b>23</b>
<b>I.9.2.3 Evaluation du modèle</b> .....	<b>24</b>
<b>I.9.2.4 La transformation inverse de la sortie</b> .....	<b>25</b>
<b>I.9.2.5 Reconstruction de la sortie</b> .....	<b>25</b>
<b>Conclusion</b> .....	<b>26</b>
<b>CHAPITRE II. MODÉLISATION DE PENDULE INVERSÉ ROTATIF</b> .....	<b>27</b>
<b>II.1. Introduction</b> .....	<b>27</b>
<b>II.2. Définitions</b> .....	<b>27</b>
<b>II.2.1. Modélisation</b> .....	<b>27</b>
<b>II.2.2. Les actions mécaniques</b> .....	<b>27</b>

II.2.3. Les systèmes non linéaires .....	28
II.2.4. Linéarisation .....	28
II.2.5. Formalisme de Lagrange .....	29
II.3. Application.....	30
II.3.1. Présentation de pendule inversé rotatif.....	30
II.3.2. Les équations du mouvement .....	31
II.3.2.1. l' énergie cinétique du système.....	31
II.3.2.2. L' énergie potentielle du système .....	31
II.3.3. Equations d'Euler-Lagrange.....	32
II.3.4. Linéarisation .....	34
II.3. 5. Démonstration .....	35
II.4. Modèle linéaire en espace d'état.....	36
Conclusion.....	39
<b>CHAPITRE III. RESULTATS DE SIMULATION .....</b>	<b>40</b>
III.1. Introduction .....	40
III.2. Conception du contrôleur .....	40
III.2.1. Conception du LQR flou pour le système incertain .....	41
III.3. Défuzzification de vecteur de retour d'état $k$ .....	42
III.4. Résultats de simulation .....	42
III.4.1. Paramètres pour la conception LQR classique.....	42
III.4.2. Paramètres pour la conception LQR combiné avec l'arithmétique flou.....	43
III.4.3. Paramètres supplémentaires .....	43
III.5. Interprétation des résultats .....	47
<b>CONCLUSION GENERALE.....</b>	<b>48</b>
<b>BIBLIOGRAPHIE .....</b>	<b>49</b>

# LISTE DES TABLEAUX

<b>Tableau.1.1.</b> évaluation du principe d'extension pour l'exemple 1 étape 1 .....	16
<b>Tableau.1.2.</b> évaluation du principe d'extension pour l'exemple 1 étape 2 .....	17
<b>Tableau.II.1.</b> Les paramètres du moteur et du pendule inversé rotatif .....	34
<b>Tableau.III.1.</b> Paramètres du modèle avec leurs valeurs réelles .....	42
<b>Tableau.III.2.</b> Les valeurs moyennes et les écarts-types des fonctions d'appartenances pour les paramètres du modèle incertain .....	43

# LISTE DES FIGURES

## Chapitre I

<b>Figure.I.1.</b> un ensemble flou avec sa caractéristique : noyau, hauteur, support et $\alpha$ - coupes....	4
<b>Figure.I.2.</b> L'intersection de $A$ et $B$ .....	5
<b>Figure.I.3.</b> L'union de $A$ et $B$ .....	5
<b>Figure.I.4.</b> Le complément de $A$ .....	6
<b>Figure.I.5.</b> Défuzzification par la méthode de centre de gravité .....	9
<b>Figure.I.6.</b> nombre flou avec $\alpha$ -coupe.....	10
<b>Figure.I.7.</b> (a) Nombre flou triangulaire (b) Nombre flou Gaussien .....	12
<b>Figure.I.8.</b> Singleton flou.....	13
<b>Figure.I.9.</b> Evaluation du principe d'extension pour la multiplication de deux nombres flous .....	15
<b>Figure.I.10.</b> Décomposition d'un nombre flou $B_i$ dans les intervalles.....	19
<b>Figure.I.11.</b> Décomposition d'un nombre flou.....	24

## Chapitre II

<b>Figure II.1.</b> Système Pendule inversé rotatif .....	30
<b>Figure.II.2.</b> Modèle de Pendule inversé rotatif.....	31

## Chapitre III

<b>Figure.III.1.</b> L'angle de bras $\theta t$ pour les deux commandes : LQR classique et LQR flou .....	45
<b>Figure. III.2.</b> L'angle de pendule $\alpha t$ pour les deux commandes : LQR classique et LQR flou .....	45
<b>Figure.III.3.</b> La vitesse angulaire de bras $\dot{\theta} t$ pour les deux commandes : LQR classique et LQR flou .....	46
<b>Figure.III.4.</b> La vitesse angulaire de pendule $\dot{\alpha} t$ pour les deux commandes : LQR classique et LQR flou .....	46
<b>Figure.III.5.</b> La commande appliquée au pendule.....	47

## LISTE DES SYMBOLES

$A$	Un sous-ensemble flou
$Supp(A)$	Le support d'un sous-ensemble flou $A$
$h(A)$	La hauteur d'un sous-ensemble flou $A$
$Noy(A)$	Le noyau d'un sous-ensemble flou $A$
$ A $	La cardinalité d'un sous-ensemble flou $A$
$\mu_A(x)$	La fonction d'appartenance d'un sous-ensemble flou $A$
$A_\alpha$	$\alpha$ -coupe d'un sous-ensemble flou $A$
$\tilde{P}$	Un nombre flou
$\bar{x}$	Valeur modale
$a_L$ et $a_R$	Les écarts gauche et droite par rapport à la valeur modale
$E$	Fonction symbolise l'une des opérations arithmétiques élémentaires
$m$	Nombre de la décomposition
$f$	Expression rationnelle floue
$P_i$	Représentations décomposées
$X_i^{(j)}$	Les intervalles des représentations décomposées
$\hat{X}_i^{(j)}$	Tableau de transformation
$\hat{Z}_i^{(j)}$	Tableau de retransformation
$L$	Lagrangien
$E_c$	L'énergie cinétique
$E_p$	L'énergie potentielle
$\tilde{q}$	Sortie floue
$k$	Le gain de Kalman
$Q$ et $R$	Matrices de pondération définies positives
$J$	Critère à minimiser

## INTRODUCTION GENERALE

L'automaticien résout le problème de la commande des systèmes pour lequel cherche à atteindre de bonnes performances en termes de temps de réponse, de précision et de stabilité. Ces systèmes sont représentés par des modèles qui s'accordent avec les observations constatées et leur analyse. Ils peuvent être construits comme un ensemble d'équations différentielles linéaires ou non linéaires reliant les entrées, les états et les sorties, qui sont importants pour la synthèse de la loi de commande.

La majorité des stratégies de commande sont appliquées sur des systèmes représentés par des modèles fixes c'est-à-dire des entrées précises cependant les informations délivrées par les organes de mesure sont par nature imprécises. Dans ce contexte, si on place dans un schéma de commande représentée par régulateur linéaire quadratique LQR, il serait intéressant d'analyser et d'intégrer les effets induits par l'utilisation des incertitudes sur les entrées imprécises par la théorie de l'intervalle flou dans la stratégie de commande et sur le comportement dynamique du système.

Nous avons considéré un système mécanique qui est le pendule inversé rotatif comme modèle pour le commander par la méthode dite LQR (régulateur linéaire quadratique) qui est l'une des commandes plus utilisées d'un part, et une autre combinée par l'arithmétique flou appelée LQR Flou basée sur la méthode de transformation avancée qui faire la simulation et l'analyse des systèmes incertains d'autre part.

Notre mémoire est composé de trois chapitres :

Dans le premier chapitre, nous avons présenté d'une façon générale les notions de base de la logique flou ensuite, nous avons aussi donné une description générale de l'arithmétique flou et l'arithmétique flou avancée présenté par la méthode de transformation.

Le deuxième chapitre présente une modélisation du système pendule inversé rotatif sujet de notre étude. Nous utiliserons le formalisme d'Euler Lagrange pour établir les équations dynamiques du système, nous allons faire la linéarisation du modèle non linéaire obtenu.

Dans le troisième chapitre, nous avons évalué les performances et l'efficacité de la commande par intervalle flou.

Pour finir, nous proposons une conclusion générale dans laquelle seront soulignés les principaux résultats de ce travail.

# CHAPITRE I. THEORIE DE LA LOGIQUE FLOU

## I.1. Introduction

De nos jours, la logique flou (en anglais « fuzzy logic ») est un axe de recherche important sur lequel se focalisent de nombreuses recherches scientifiques. Des retombées technologiques sont d'ores et déjà disponibles, tant dans le domaine grand public (appareils photos, machines à laver, ...) que dans le domaine industriel (réglage et commande de processus complexes liés à l'énergie, aux transports, à la transformation de la matière, à la robotique, aux machines-outils) [1]. Dans ce chapitre nous représentons les éléments de base de la théorie de la logique flou, ainsi les principaux outils algébriques utilisés par l'arithmétique flou, l'arithmétique des intervalles et la méthode de transformation.

## I.2. Apparence de la logique flou et ses applications

Le terme « ensemble flou » est apparu pour la première fois en 1965 lorsque le professeur Lotfi A. Zadeh de l'université de Berkeley, aux États-Unis, a publié un article intitulé « Ensembles flous ». Depuis lors, il a réalisé de nombreuses majeures théories avancées dans ce domaine, et a été rapidement rejoint par de nombreux chercheurs développant des travaux théoriques [2].

En 1975, le professeur Mamdani, de Londres, a développé une stratégie de contrôle des processus et publia les résultats encourageants qu'il avait obtenus pour le contrôle d'un moteur à vapeur. En 1978, la société danoise F.L. Smidth, atteint le contrôle d'un four à ciment. Ce fut la première véritable application industrielle de la logique flou [2].

## I.3. Les ensembles flous

Dans la théorie des ensembles classiques, il n'y a que deux situations acceptables pour un élément, appartenir ou ne pas appartenir à un sous-ensemble. Le mérite de Zadeh a été de tenter de sortir de cette logique booléenne en introduisant la notion d'appartenance pondérée : permettre des graduations dans l'appartenance d'un élément à un sous-ensemble, c'est-à-dire d'autoriser un élément à appartenir plus moins fortement à ce sous-ensemble [3].

### I.3.1. Sous ensemble flou

**Définition** : Un sous-ensemble flou  $A$  de  $X$  est caractérisé par une fonction d'appartenance  $\mu_A(x)$  qui associe à chaque point  $x$  de  $X$  un réel dans l'intervalle  $[0,1]$  ;  $\mu_A(x)$  représente le degré d'appartenance de  $x$  à  $A$  :

$$\mu_A(x) : X \rightarrow [0,1] \quad (\text{I.1})$$

Ainsi un sous-ensemble flou  $A$  dans  $X$  peut être représenté par un ensemble de couples ordonnés.

$$A = \{(x, \mu_A(x) / x \in X)\} \quad (\text{I.2})$$

### I.3.2. Caractéristiques des ensembles flous

Un sous-ensemble flou est complètement défini par la donnée de sa fonction d'appartenance. A partir d'une telle fonction, un certain nombre de caractéristiques du sous-ensemble flou peuvent être étudiées [3].

#### A-Support

Le support d'un sous-ensemble flou  $A$  de  $X$ , noté  $Supp(A)$ , est l'ensemble de tous les éléments qui lui appartiennent au moins un petit peu.

$$Supp(A) = \{x \in X / \mu_A(x) > 0\} \quad (\text{I.3})$$

#### B-Hauteur

La hauteur du sous-ensemble flou  $A$  de  $X$ , notée  $h(A)$ , est le plus fort degré avec lequel un élément de  $X$  appartient à  $A$ .

$$h(A) = \sup (\mu_A(x) / x \in X) \quad (\text{I.4})$$

#### C-Noyau

Un sous-ensemble flou est normalisé si sa hauteur  $h(A) = 1$ . Le noyau d'un sous-ensemble flou  $A$  de  $X$ , noté  $Noy(A)$ , est l'ensemble de tous les éléments qui lui appartiennent totalement (avec un degré 1).

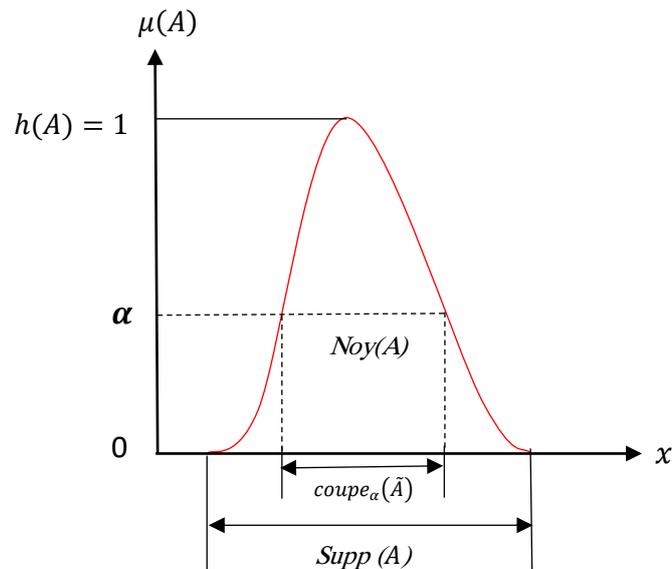
$$Noy(A) = \{x \in X / \mu_A(x) = 1\} \quad (\text{I.5})$$

**D. Cardinalité**

La cardinalité d'un sous-ensemble flou  $A$  de  $X$ , noté  $|A|$ , est le nombre d'éléments appartenant à  $A$  pondéré par leur degré d'appartenance.

$$|A| = \sum (\mu_A(x) / x \in X) \tag{I.6}$$

Si  $A$  est sous-ensemble ordinaire de  $X$ , sa cardinalité est le nombre d'éléments qui le composent, selon la définition classique [3].



**Figure.I.1.** un ensemble flou avec sa caractéristique : noyau, hauteur, support et  $\alpha$ - coupes

**I.3.3. Opérations sur la logique floue**

Les opérations logiques : d'union, d'intersection et de complémentarité peuvent être appliquées aux ensembles flous, Comme dans le cas des ensembles « classiques ».

**Inclusion** :  $A$  est dit inclus dans  $B$ , propriété que l'on note  $A \subseteq B$ , si tout élément  $x$  de  $X$  qui appartient à  $A$  appartient aussi à  $B$  avec un degré au moins aussi grand :

$$\forall x \in X : \mu_A(x) \leq \mu_B(x) \tag{I.7}$$

**Intersection** : L'intersection de  $A$  et  $B$ , que l'on note  $A \cap B$ , est le sous-ensemble flou constitué des éléments de  $X$  affectés du plus petit des deux degrés d'appartenance  $\mu_A(x)$  et  $\mu_B(x)$

$$\forall x \in X: \mu_{A \cap B} = \min (\mu_A(x), \mu_B(x)) = A(x) \wedge B(x). \tag{I.8}$$

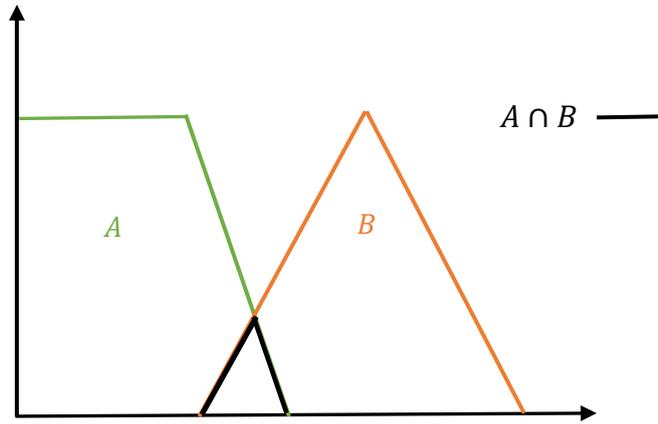


Figure.I.2. L'intersection de A et B

**Union :** L'union de A et B, que l'on note  $A \cup B$ , est le sous-ensemble flou constitué des éléments de X affectés du plus grand des deux degrés d'appartenance  $\mu_A(x)$  et  $\mu_B(x)$ .

$$\forall x \in X : \mu_{A \cup B} = \max(\mu_A(x), \mu_B(x)) = A(x) \vee B(x). \tag{I.9}$$

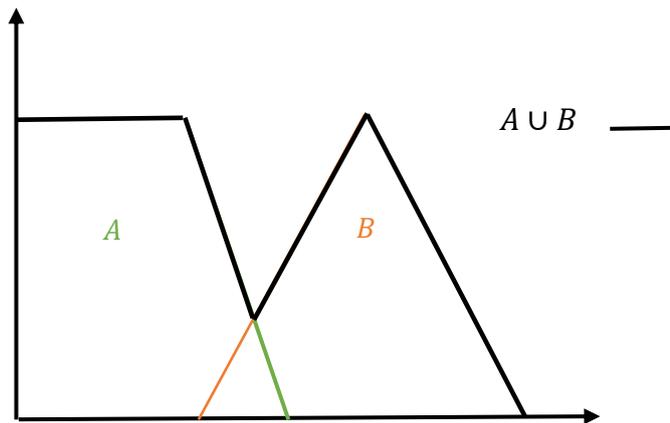
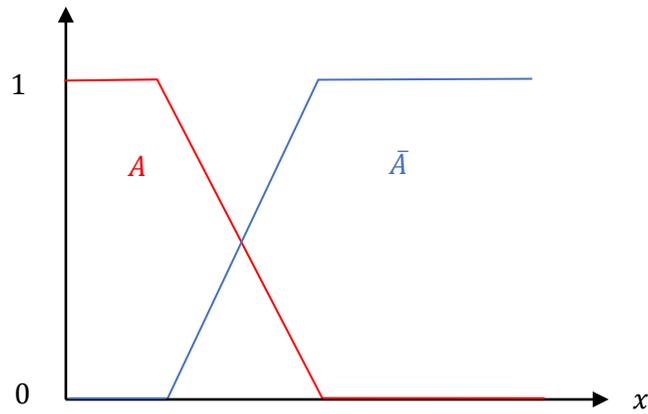


Figure.I.3. L'union de A et B

**Complément :** Le complément de A, que l'on note  $A^c$ , est le sous-ensemble flou de X constitué des éléments x lui appartenant d'autant plus qu'ils appartiennent peu à A :

$$\forall x \in X : \mu_{A^c}(x) = 1 - \mu_A(x) \tag{I.10}$$

Figure.I.4. Le complément de  $A$ 

### I.3.4. Propriétés des ensembles flous

Les propriétés de l'ensemble classique conviennent également à celles des ensembles flous. Les propriétés importantes, de l'ensemble flou sont les suivantes :

$$\text{Commutativité :} \quad A \cup B = B \cup A, \quad (\text{I.11})$$

$$A \cap B = B \cap A, \quad (\text{I.12})$$

$$\text{Associativité :} \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C, \quad (\text{I.13})$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C, \quad (\text{I.14})$$

$$\text{La distributivité :} \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \quad (\text{I.15})$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C). \quad (\text{I.16})$$

## I.4. Concepts flous

### I.4.1. Convexité

Un sous-ensemble flou  $A$  de  $\mathbb{R}$  est dit convexe si sa fonction d'appartenance est convexe [7].

### I.4.2. Le produit cartésien

Le produit cartésien de deux sous-ensemble flous  $A_1$  et  $A_2$  est défini par [7] :

$$A = A_1 \times A_2 ; \forall x = (x_1, \dots, x_n) \in X, \quad (\text{I.17})$$

$$\mu_A(x) = \min (\mu_{A_1}(x), \dots, \mu_{A_n}(x)) \quad (\text{I.18})$$

### I.4.3. Le principe d'extension

Proposé initialement par Zadeh [4], est un des outils fondamentaux de la théorie des sous-ensembles flous ; il est à l'origine de beaucoup de définitions. Pour toute relation exacte  $\varphi$  entre deux sous-ensembles  $A$  et  $B$ , ce principe permet la généralisation au flou d'un certain nombre de concepts.

En particulier l'image par  $\varphi$  (opération / relation) d'un sous ensemble flou  $A$  est un sous ensemble flou  $C$  défini par la formule suivante  $\mu_C(z) = \varphi(\mu_A(x))$ . Dans le cas où  $\varphi$  est injective, et si plusieurs éléments de l'ensemble de départ  $E$  admettent la même image alors  $\mu_C(z) = \sup \{\mu_A(x) / \varphi(x) = z\}$ , ce qui signifie que pour toutes valeurs de  $z$  de l'ensemble d'arrivée son degré d'appartenance par  $\varphi$  est le meilleur des degrés d'appartenance de tous les  $x$  tel que  $\varphi(x) = z$ .

Dans le cas général le principe d'extension permet d'obtenir l'image  $C$  de deux sous-ensembles flous  $A$  et  $B$  par la fonction  $\varphi$ .

Le résultat  $C = \mu_{\varphi(A,B)}$  par  $\varphi$  de  $A$  et  $B$  est défini par l'équation :

$$\mu_{\varphi(A,B)}(z) = \sup \{ \min(\mu_A(x), \mu_B(y)) \mid \varphi(x, y) = z \} \quad (I.19)$$

Sur  $\mathbb{R}$ , on définit donc conformément au principe d'extension une somme ( $\varphi = +$ ) par :

$$\mu_{A+B}(z) = \sup \{ \min(\mu_A(x), \mu_B(y)) \mid x + y = z \} \quad (I.20)$$

Chaque fois que  $z$  est obtenu comme somme, son degré d'appartenance est le meilleur parmi les décompositions [5].

## I.5. Systèmes flous

Un système flou est basé sur une expertise humaine que l'on veut exploiter et introduire dans un système automatique. Il est formé de trois étapes, la première étape c'est la fuzzification qui transforme les valeurs numériques en degrés d'appartenance aux différents ensembles flous. L'étape deuxième concerne le module d'inférence, qui est constitué de deux blocs, le moteur d'inférence et la base des règles. Enfin, l'étape de défuzzification qui transforme le degré d'appartenance aux différents ensembles flous de la partition vers des valeurs numériques.

### I.5.1. Variables linguistiques

Une variable linguistique est représentée par le triplet  $V, X, TV$  où :

- $V$  : une variable définie sur  $X$  (e.g : la température, l'âge, la pression ...),
- $X$  : un ensemble de référence,
- $Tv$  :  $Tv = \{A_1, A_2, \dots\}$  un ensemble fini ou dénombrable de sous-ensembles flous normalisés, utilisés pour caractériser  $V$  [16].

### **I.5.2. Fuzzification**

La fuzzification a pour but de transformer les variables numériques provenant des entrées en variables linguistique flous, la fuzzification consiste à définir les fonctions d'appartenance pour les différentes variables d'entrées.

Pour fuzzifier il faut donner :

- . L'univers de discours (intervalle de variations possibles des entrées et des sorties).
- . Une répartition en classe flou de cet univers.
- . Les fonctions d'appartenance de chacune de ces classes.

### **I.5.3. Base des règles**

Le but des bases de règles est de formaliser et de mettre en œuvre la méthode de raisonnement d'un être humain. En tant que tel, il peut être classé dans le domaine de l'intelligence artificielle.

Une règle est de la forme :                   SI "condition" ALORS "conclusion".

Par exemple : SI "haute température et haute pression" ALORS "forte ventilation et vanne grande ouverte".

### **I.5.4. Inférence floue**

L'inférence floue est la logique de prise de décision est le cerveau du système flou. Elle est capable de simuler la prise de décision de l'être humain, en se basant sur le raisonnement flou et l'ensemble des règles flous qui forment la base des règles.

On utilise souvent les inférences floues définies par (les deux type suivants) : (Mamdani et Sugeno) [16].

### I.5.4.1. Inférences floues de Mamdani (MAX-MIN)

Cette méthode réalise l'opérateur ET entre les conclusions des conditions de chaque règle par la fonction MIN, et l'opérateur OU par la fonction MAX pour la liaison (l'agrégation) entre tous les règles.

Le processus d'inférence entre deux règles est décrit par :

$$\text{Si } (x \text{ est } A1) \text{ ET } (y \text{ est } B1) ; \text{ alors } (z \text{ est } C1) \quad (\text{I.21})$$

OU

$$\text{Si } (x \text{ est } A2) \text{ ET } (y \text{ est } B2) ; \text{ alors } (z \text{ est } C2) \quad (\text{I.22})$$

Notant que la méthode de Mamdani est la plus utilisé[16].

### I.5.4.2. Inférences floues de Sugeno

La méthode d'inférence de Sugeno utilise des règles conditionnelles comme celui de Mamdani, mais la conclusion est de forme polynomiale, ce qui est de la forme :

$$\text{Si } (x \text{ est } A1) \text{ ET } (y \text{ est } B1) ; \text{ alors } (z \text{ est } f(x, y)) \text{ [16]}. \quad (\text{I.23})$$

### I.5.5. Défuzzification

À la fin de l'inférence, l'ensemble flou de sortie est déterminé, mais ne peut pas être utilisé directement pour fournir à l'opérateur des informations précises ou pour commander un actionneur. Nous devons passer du « monde flou » au « monde réel », c'est ce qu'on appelle la défuzzification.

Il existe de nombreuses méthodes de défuzzification, la méthode la plus utilisée en commande flou est le centre de gravité.

La méthode dite du centre de gravité consiste à calculer l'abscisse du centre de gravité de la surface définie par la fonction d'appartenance de la partie floue considérée, soit une partie floue  $B$  d'un ensemble  $Y$ , le centre de gravité est donné par :

$$y_d = \frac{\int_y \mu_B(y) \cdot y \cdot dy}{\int_y \mu_B(y) \cdot dy} \quad (\text{I.24})$$

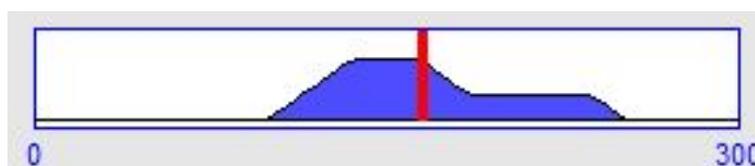


Figure.I.5. Défuzzification par la méthode de centre de gravité

## I.6. Arithmétique floue

### I.6.1 Quantités et intervalles flous

Définition 1 : Une quantité floue est un sous-ensemble flou normalisé  $Q$  de  $R$ . Une valeur modale de  $Q$  est un élément  $m$  de  $R$  tel que  $\mu_Q(m) = 1$  [9].

Définition 2 : Un intervalle flou  $I$  est une quantité floue convexe [9].

Définition 3 : Pour toute valeur  $\alpha$  de l'intervalle  $[0, 1]$ , on appelle  $\alpha$ -coupe d'un sous-ensemble flou  $A$  de  $X$ , le sous-ensemble noté  $A_\alpha$  des éléments de  $X$  pour lesquels la fonction d'appartenance est supérieure ou égale à  $\alpha$  :

$$A_\alpha = \{x \in X | \mu_A(x) \geq \alpha\} \quad (\text{I.25})$$

Caractéristiques des  $\alpha$ -coupes [7] :

- $(A \cap B)_\alpha = A_\alpha \cap B_\alpha$ .
- $(A \cup B)_\alpha = A_\alpha \cup B_\alpha$ .
- $A \subset B \Rightarrow A_\alpha \subset B_\alpha$ .
- $A_1 = \text{noyau}(A)$
- $A_0 = X$ .

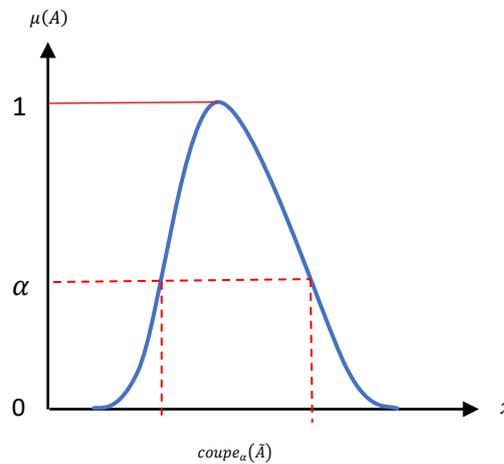


Figure.I.6. nombre flou avec  $\alpha$ -coupe

## I.7 Nombres flous

Parmi les différents types d'ensembles flous, ceux qui sont définis sur l'ensemble des nombres réels  $\mathbb{R}$  sont revêtent une importance particulière. Dans certaines conditions, ils

peuvent être considérés comme des nombres flous, qui reflètent la perception humaine d'une quantification numérique incertaine [7].

### I.7.1. Définition

Un ensemble flou  $\tilde{P} \in \tilde{\rho}(\mathbb{R})$  est appelé un nombre flou  $\tilde{\rho}$  s'il satisfait aux conditions suivantes:

1.  $\tilde{P}$  est normal, c'est-à-dire que  $H(\tilde{P}) = 1$ .
2.  $\tilde{P}$  est convexe.
3. Il y a exactement un  $\bar{x} \in \mathbb{R}$  avec  $\mu_{\tilde{P}}(\bar{x}) = 1$ , c'est-à-dire  $\sup(\tilde{P}) = \bar{x}$ .
4. La fonction d'appartenance  $\mu_{\tilde{P}}(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , est au moins continue par morceaux.

La valeur  $\bar{x} = \sup(\tilde{P})$ , qui indique le degré maximal d'appartenance  $\mu_{\tilde{P}}(\bar{x}) = 1$ , est appelée la valeur modale du nombre flou  $\tilde{P}$ , la valeur modale peut également être appelée valeur crête, valeur centrale ou valeur moyenne, les deux dernières expressions étant utilisées de préférence pour des nombres flous symétriques [17].

### I.7.2. Types des nombres flous

Parmi le nombre infini d'ensembles flous possibles dans  $\tilde{P} \in \tilde{\rho}(\mathbb{R})$  qui sont considérés comme des nombres flous, certains types de fonctions d'appartenance  $\mu_{\tilde{P}}(x)$  sont d'une importance particulière, notamment en ce qui concerne l'utilisation de nombres flous dans l'arithmétique floue appliquée.

#### I.7.2.1. Nombre triangulaire floue (Nombre flou linéaire)

En raison de sa fonction d'appartenance plutôt simple de type linéaire, le nombre flou triangulaire ou le nombre flou linéaire est l'un des nombres flous le plus fréquemment utilisé. En forme abrégé, on peut introduire la notation :

$$\tilde{\rho} = tfn(\bar{x}, a_L, a_R) \quad (\text{I.26})$$

Pour définir un nombre flou triangulaire  $\tilde{\rho} \in \tilde{P}'(\mathbb{R})$  avec la fonction d'appartenance :

$$\mu_{\tilde{\rho}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x \leq \bar{x} - a_L \\ 1 + \frac{(x - \bar{x})}{a_L} & \text{pour } \bar{x} - a_L < x < \bar{x} \\ 1 - \frac{(x - \bar{x})}{a_R} & \text{pour } \bar{x} < x < \bar{x} + a_R \\ 0 & \text{pour } x \geq \bar{x} + a_R \end{cases} \quad (\text{I.27})$$

$$\mu_{\tilde{p}}(x) = \min \left\{ \max \left[ 0, 1 + \frac{(x-\bar{x})}{a_L} \right], \max \left[ 0, 1 - \frac{(x-\bar{x})}{a_R} \right] \right\} \forall x \in \mathbb{R} \quad (I.28)$$

Le paramètre  $\bar{x}$  désigne la valeur modale du nombre flou, et  $a_L$  et  $a_R$  sont les écarts gauche et droite par rapport à la valeur modale.

L'ensemble des valeurs visées par le nombre flou est appelé intervalle  $W$  du nombre flou  $\tilde{p}$  et doit être défini comme :

$$W = [\omega_L, \omega_R] = [\bar{x} - a_L, \bar{x} + a_R] = \text{sup}(\tilde{p}) \cup \{\bar{x} - a_L, \bar{x} + a_R\} \quad (I.29)$$

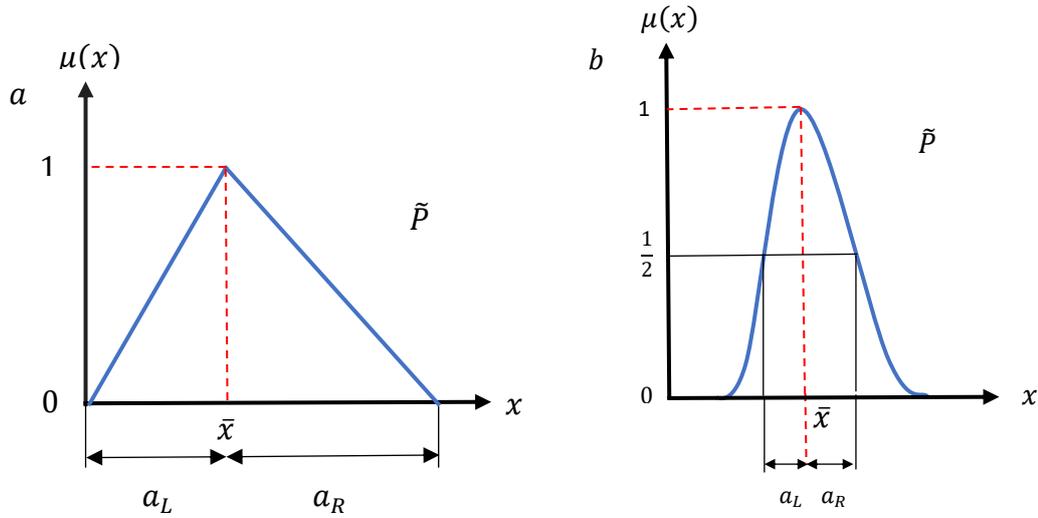


Figure.I.7. (a) Nombre flou triangulaire (b) Nombre flou Gaussien

### I.7.2.2. Nombre flou Gaussien

Un autre type important de nombre flou est le nombre flou gaussien, ou la fonction d'appartenance est caractérisée par une distribution gaussienne. Nous pouvons introduire une notation réduite sous la forme :

$$\tilde{p} = gfn(\bar{x}, a_L, a_R) \quad (I.30)$$

Pour définir un nombre flou gaussienne  $\tilde{p} \in \tilde{P}'(\mathbb{R})$  avec la fonction d'appartenance :

$$\mu_{\tilde{p}}(x) = \begin{cases} \exp \left[ -\frac{(x-\bar{x})^2}{2a_L^2} \right] & \text{pour } x < \bar{x} \\ \exp \left[ -\frac{(x-\bar{x})^2}{2a_R^2} \right] & \text{pour } x \geq \bar{x} \end{cases} \forall x \in \mathbb{R} \quad (I.31)$$

La valeur modale est désignée par le paramètre  $\bar{x}$  et  $a_L$  et  $a_R$  correspondant l'écart-type de la distribution gaussienne.

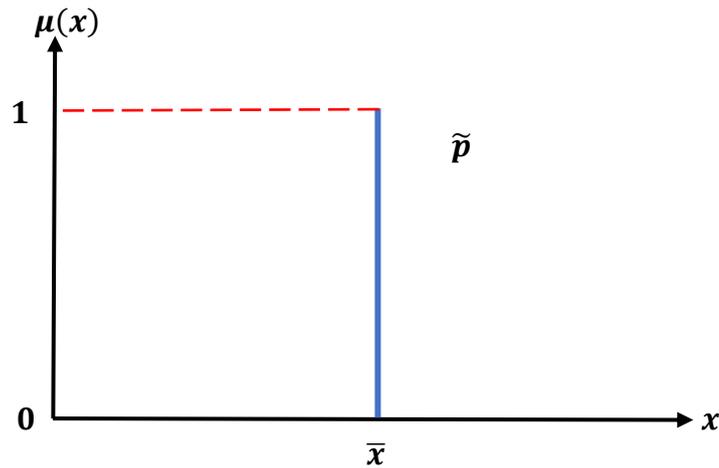
**I.7.2.3. Singleton flou**

Conformément la théorie des ensembles flous ou les ensembles classiques sont inclus dans la classe des super coordonnées des ensembles flous, les nombres nets, peuvent être considérés comme un cas particulier des nombres flous, car ils possèdent toutes leurs propriétés.

Dans ce contexte, un certain nombre net  $\bar{x}$  peut-être exprimé par un nombre flou défini par la fonction d'appartenance :

$$\mu_{\tilde{p}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < \bar{x} \\ 1 & \text{pour } x = \bar{x} \\ 0 & \text{pour } x > \bar{x} \end{cases} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (\text{I.32})$$

Lorsque les nombres nets sont considérés comme des nombres flous, ils sont généralement appelés singletons flous.



**Figure.I.8.** Singleton flou

**I.7.2.4. Nombre flou quasi-Gaussien :** Nous pouvons introduire une notation de la forme

$$\tilde{p} = qgfn(\bar{x}, a_L, a_R) \quad (\text{I.33})$$

$$\mu_{\tilde{p}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x \leq \bar{x} - 3a_L \\ \exp\left[-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\rho_L^2}\right] & \text{pour } \bar{x} - 3a_L < x < \bar{x} \\ \exp\left[-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\rho_R^2}\right] & \text{pour } \bar{x} < x < \bar{x} + 3a_L \\ 0 & \text{pour } x \leq \bar{x} + 3a_R \end{cases} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (\text{I.34})$$

### I.7.3. Opérations arithmétiques élémentaires flous

Le but principal de l'arithmétique flou est de définir les opérations arithmétiques élémentaires floues comme homologues appropriés des opérations élémentaires : l'addition, soustraction, multiplication et division des nombres nets [6].

Etant donné deux nombres flous  $\tilde{p}_1$  et  $\tilde{p}_2$  avec leurs fonctions d'appartenances

$$\mu_{\tilde{p}_1}(x_1), x_1 \in \mathbb{R}, \text{ et } \mu_{\tilde{p}_2}(x_2), x_2 \in \mathbb{R}$$

L'objectif de l'arithmétique élémentaire flou est de déterminer la fonction d'appartenance  $\mu_{\tilde{q}}(z)$ ,  $z \in \mathbb{R}$ ; du nombre flou :

$$\tilde{q} = E(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2) \quad (\text{I.35})$$

Lorsque la fonction  $E$  symbolise l'une des opérations arithmétiques élémentaires :

$$E_+(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2) = \tilde{P}_1 + \tilde{P}_2 \quad (\text{I.36})$$

$$E_-(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2) = \tilde{P}_1 - \tilde{P}_2 \quad (\text{I.37})$$

$$E_\times(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2) = \tilde{P}_1 \times \tilde{P}_2 \quad (\text{I.38})$$

$$E_\div(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2) = \tilde{P}_1 \div \tilde{P}_2 \quad (\text{I.39})$$

Une approche formelle de la solution de ce problème est fournie par le principe d'extension de Zadeh, qui permet l'évaluation des fonctions arbitraires avec des ensemble flous comme leurs valeurs d'arguments.

En remplaçons  $\tilde{P}_1$  et  $\tilde{P}_2$  dans I.19 comme arguments et prenons l'opération binaire  $E$  comme cartographie fonctionnelle, la fonction d'appartenance  $\mu_{\tilde{q}}(z)$  du nombre flou  $\tilde{q}$  qui en résulte peut être obtenue à partir :

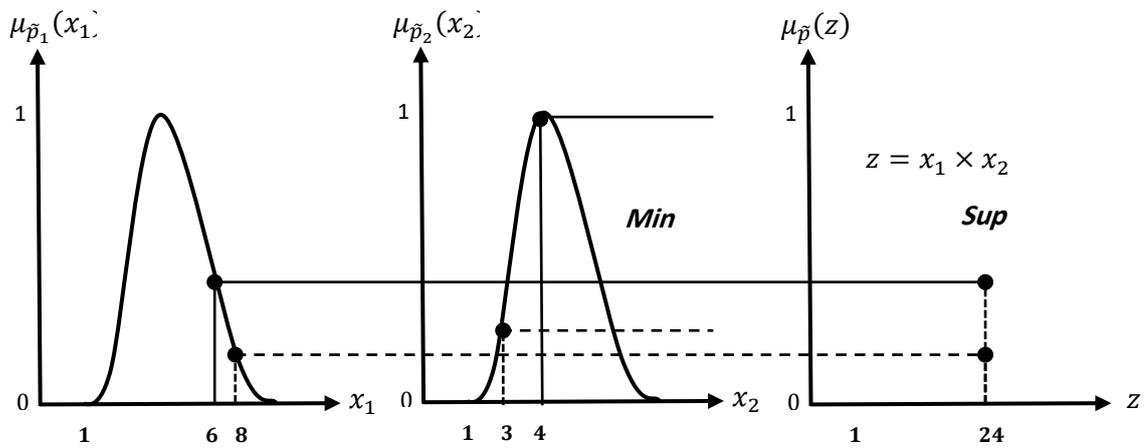
$$\mu_{\tilde{q}}(z) = \sup \min\{\mu_{\tilde{p}_1}(x_1), \mu_{\tilde{p}_2}(x_2)\} \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \quad (\text{I.40})$$

Par conséquent, une définition effective de l'arithmétique flou élémentaire exige la mise en œuvre pratique de 1.28 pour les opérations arithmétiques élémentaires  $E_+$ ,  $E_-$ ,  $E_\times$ , et  $E_\div$  et pour les nombres flous  $\tilde{P}_1$  et  $\tilde{P}_2$  avec des fonctions d'appartenances arbitraires  $\mu_{\tilde{p}_1}(x_1)$  et  $\mu_{\tilde{p}_2}(x_2)$ .

Pour illustrer la méthode d'évaluation du principe d'extension pour les opérations arithmétiques élémentaires entre les nombres flous, considérons la multiplication  $\tilde{q} = E_\times(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2) = \tilde{P}_1 \times \tilde{P}_2$  de deux nombres flous  $\tilde{P}_1$  et  $\tilde{P}_2$ , comme indiqué sur la figure 1.9.

Lorsqu'on a sélectionné les valeurs d'entrées  $x_1 = 8$  et  $x_2 = 3$  on obtient la valeur de sortie  $z = x_1 \times x_2 = 24$  avec un degré d'appartenance intermédiaire donnée par  $\min \{ \mu_{\tilde{p}_1}(x_1 = 8), \mu_{\tilde{p}_2}(x_2 = 3) \}$  tel qu'illustré par les lignes horizontales pointillés sur la figure.I.9.

Toutefois, la même valeur de sortie  $z = 24$  peut être obtenue par d'autres combinaisons des valeurs d'entrées, conduisant alors à des degrés d'appartenances intermédiaires de valeurs différentes. Par exemple, la combinaison  $x_1 = 6$  et  $x_2 = 4$  conduits au degré d'appartenance intermédiaire  $\min \{ \mu_{\tilde{p}_1}(x_1 = 6), \mu_{\tilde{p}_2}(x_2 = 4) \}$  comme illustré par les lignes horizontales continues dans la figure 1.6 [6].



**Figure.I.9.** Evaluation du principe d'extension pour la multiplication de deux nombres flous

**Exemple 1 :** nous considérons deux nombres flous discrets triangulaires positif  $\tilde{A}_1$  et  $\tilde{A}_2$  proposés par :

$$\tilde{A}_1 = \{(1,0.0), (1.5,0.5), (2,1.0), (2.5,0.5), (3,0.0)\} \tag{I.41}$$

$$\tilde{A}_2 = \{(2,0.0), (3,0.5), (4,1.0), (6,0.5), (8,0.0)\} \tag{I.42}$$

Considérons l'addition  $z = E_+(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2) = \tilde{A}_1 + \tilde{A}_2$  de deux nombres flous discrets  $\tilde{A}_1$  et  $\tilde{A}_2$ , à partir de principe d'extension nous obtenons :

$$z = \tilde{A}_1 + \tilde{A}_2 = \{(3,0.0), (3.5,0.0), (4,0.0), (4.5,0.5), (5,0.5), (5.5,0.5), (6,1.0), (6.5,0.5), (7,0.0), (7.5,0.5), (8,0.5), (8.5,0.5), (9,0.0), (9.5,0.0), (10,0.0), (10.5,0.0), (11,0.0)\} \tag{I.43}$$

$z$  peut alors évalue en appliquant le principe d'extension avec des nombres flous discrets  $\tilde{A}_1$  et  $\tilde{A}_2$  comme arguments est présenté dans les tableaux 1 et 2 Dans la colonne la plus à gauche et dans la ligne du haut du tableau I.1, les ensembles flous d'origine  $\tilde{A}_1$  et  $\tilde{A}_2$  sont répertoriés

avec les degrés d'appartenance correspondants en tant qu'indices en exposants placés entre Parenthèses.

Les entrées intérieures du tableau I.1 comprennent les éléments  $z$  résultant de l'évaluation de l'opération  $z = E_+(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2)$ . Les exposants des éléments  $z$  donnent la valeur minimale  $\min\{\mu_{\tilde{A}_1}(x_1), \mu_{\tilde{A}_2}(x_2)\}$  des degrés d'appartenance de  $x_1$  et  $x_2$  fournissant un degré intermédiaire d'appartenance aux éléments  $z$ . Enfin, toutes les valeurs possibles de  $z$  sont répertoriées dans le tableau I.2 avec leurs valeurs d'appartenance intermédiaires. En cas d'occurrences multiples, il faut former le plus grand nombre de degrés intermédiaires d'appartenance pour que chaque élément  $z$  obtienne sa valeur finale d'appartenance [6].

**Tableau I.1** : évaluation du principe d'extension pour l'exemple 1 étape 1

$x_2 \mu_{\tilde{A}_2}(x_2)$ $x_1 \mu_{\tilde{A}_1}(x_1)$					
	$1(0.0)$	$1.5(0.5)$	$2(1.0)$	$2.5(0.5)$	$3(0.0)$
$2(0.0)$	$3(0.0)$	$3.5(0.0)$	$4(0.0)$	$4.5(0.0)$	$5(0.0)$
$3(0.5)$	$4(0.0)$	$4.5(0.5)$	$5(0.5)$	$5.5(0.5)$	$6(0.0)$
$4(1.0)$	$5(0.0)$	$5.5(0.5)$	$6(1.0)$	$6.5(0.5)$	$7(0.0)$
$6(0.5)$	$7(0.0)$	$7.5(0.5)$	$8(0.5)$	$8.5(0.5)$	$9(0.0)$
$8(0.0)$	$9(0.0)$	$9.5(0.0)$	$10(0.0)$	$10.5(0.0)$	$11(0.0)$

**Tableau I.1:** évaluation du principe d'extension pour l'exemple 1 étape 2

$z = \tilde{A}_1 + \tilde{A}_2$	$\min\{\mu_{\tilde{A}_1}(x_1), \mu_{\tilde{A}_2}(x_2)\}$	max
3	0.0	0.0
3.5	0.0	0.0
4	0.0 0.0	0.0
4.5	0.5 0.0	0.5
5	0.5 0.0 0.0	0.5
5.5	0.5 0.5	0.5
6	1.0 0.0	1.0
6.5	0.5	0.5
7	0.0 0.0	0.0
7.5	0.5	0.5
8	0.5 0.5	0.5
8.5	0.5	0.5
9	0.0 0.0	0.0
9.5	0.0	0.0
10	0.0	0.0
10.5	0.0	0.0
11	0.0	0.0
$z$	$\mu_{\mu_B}(z)$	

## I.8. Les nombres flous décomposés

### I.8.1. Décomposition des nombres flous

Fondamentalement, le concept de décomposition des nombres flous découle du théorème de décomposition tel qu'il est formulé pour les réguliers, à une dimension de sous-ensembles flous affirme que tout ensemble flou  $A$  peut uniquement être représenté par la séquence associée de ces  $\alpha$  - coupe ( $\tilde{A}$ ) par la formule :

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \sup_{\alpha \in [0,1]} \alpha \mu_{\text{coupe}-\alpha(\tilde{A})}(x) \quad (\text{I.44})$$

$\alpha \mu_{\text{coupe}-\alpha(\tilde{A})}$  est la fonction caractéristique de l'ensemble classique  $\alpha$ - coupe ( $\tilde{A}$ ).

Dans la même mesure, ce théorème est valable pour tout nombre  $\tilde{B}_i$  comme un cas particulier d'un ensemble flou, peut être réécrite sous la forme :

$$\mu_{\tilde{B}_i}(x) = \sup_{\alpha \in [0,1]} \alpha \mu_{\text{coupe}-\alpha(\tilde{B}_i)}(x) \quad (\text{I.45})$$

Pour rendre ce théorème de décomposition utilisables pour des applications pratiques, le nombre infini résultant d'un  $\alpha$ - coupe d'une  $\alpha \in [0, 1]$  doit être réduite à un nombre fini des coupures en ne permettant qu'une séquence des valeurs discrètes  $\alpha_j = \mu_j$  être sélectionnés pour  $\alpha$ .

A cette fin, nous supposons l'intervalle  $[0, 1]$  pour être subdivisé en  $m$  intervalles de la longueur  $\Delta\mu$  :

$$\Delta\mu = \frac{1}{m} \quad (\text{I.46})$$

Similaires à la subdivision de l'axe- $\mu$  de la notion des nombres flous discrétisés. Les valeurs discrètes  $\mu_j$ , sont alors données par :

$$\mu_j = \frac{j}{m}, \quad j = 0, 1, \dots, m \quad (\text{I.47})$$

Le paramètre,  $m$  qui caractérise le degré de raffinement de la décomposition est dénommé le nombre de décomposition.

L'application du théorème de décomposition au nombre fini d'une  $e$ -coupe, le nombre flou peut être représenté sous sa forme décomposée par l'ensemble :

$$B_i = \{x_i^{(0)}, x_i^{(1)}, \dots, x_i^{(m)}\} \quad (\text{I.48})$$

De  $(m+1)$  intervalles

$$X_i^{(j)} = [a_i^{(j)}, b_i^{(j)}] = \text{coupe}_{\mu_j}(\tilde{B}_i), \text{ avec } a_i^{(j)} \leq b_i^{(j)}, \text{ pour } j = 0, 1, \dots, m. \quad (I.49)$$

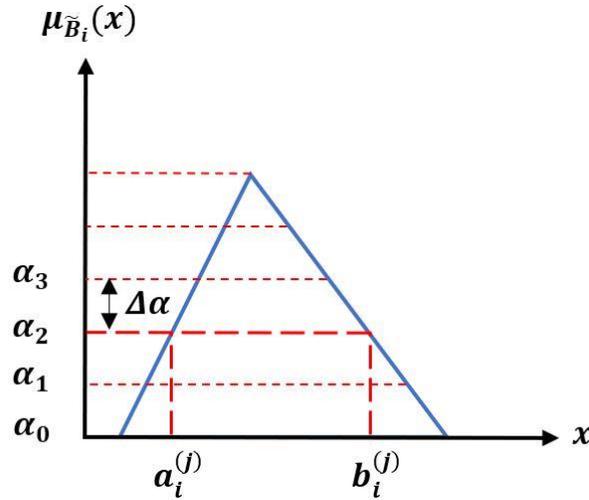


Figure.I.10. Décomposition d'un nombre flou  $\tilde{B}_i$  dans les intervalles.

$$X_i^{(0)} = [a^{(j)}, b^{(j)}] = [\omega_{l_i}, \omega_{r_i}] \text{ avec } [\omega_{l_i}, \omega_{r_i}] = \text{supp}(\tilde{B}_i). \quad (I.50)$$

Depuis coupe<sub>0</sub> ( $\tilde{B}_i$ ) est infini et égal à  $\mathbb{R}$  l'intervalle  $X_i^{(0)}$  attribué au plus bas degré de la fonction d'appartenance  $\mu_0$  est défini par l'intervalle des déviations maximums  $[\omega_{l_i}, \omega_{r_i}]$  avec  $[\omega_{l_i}, \omega_{r_i}] = \text{coupe}_0 + (\tilde{B}_i) = \text{supp}(\tilde{B}_i)$ . En outre, il convient de noter que dans la représentation décomposée  $B_i$  du nombre flou  $\tilde{B}_i$ , dans 1.46, l'affiliation de  $(m + 1)$  intervalles  $X_i^{(j)}$  au degré réel de la fonction d'appartenance  $\mu_j, j = 0, 1, \dots, m$ . est inhérent à l'ordre des éléments d'intervalle estimé de  $B_i$  C'est le premier élément de  $\tilde{B}_i$  correspond au plus bas degré de la fonction d'appartenance, et le dernier au plus haut. En outre, le coupe- $X_i^{(m)}$  correspond le haut degré de la fonction d'appartenance  $\mu_m = 1$  est exprimée par un intervalle de longueur zéro dégénère cause de l'égalité de  $a_i^{(m)}$  et  $b_i^{(m)}$ , [7].

### I.8.2. L'arithmétique des intervalles

L'objectif fondamentale de l'arithmétique d'intervalles classiques est de redéfinir les opération élémentaires d'addition, soustraction, multiplication et division pour les opérands intervalle de grande valeur, qui est, pour déterminer le résultat de :

$$[a_1, b_1] * [a_2, b_2] = \{x_1 * x_2 \mid a_1 \leq x_1 \leq b_1, \mid a_2 \leq x_2 \leq b_2\} \quad (I.51)$$

$$* \in \{+, -, \times, \div\}.$$

Lorsque l'expression  $[a_1, b_1] \div [a_2, b_2]$  n'est pas définie si  $0 \in [a_2, b_2]$ , nous pouvons donner les définitions suivantes pour les opérations élémentaires de l'arithmétique d'intervalles, qui sont équivalentes à I.51 et disposent d'une structure algébrique par rapport les intervalles résultant aux limites :

Addition

$$[a_1, b_1] + [a_2, b_2] = [a_1 + a_2, b_1 + b_2] \quad (I.52)$$

Soustraction

$$[a_1, b_1] - [a_2, b_2] = [a_1 - b_2, b_1 - a_2] \quad (I.53)$$

Multiplication

$$[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] = [\min(M), \max(M)] \quad (I.54)$$

$$M = \{a_1 \times a_2, a_1 \times b_2, b_1 \times a_2, b_1 \times b_2\} \quad (I.55)$$

Division

$$[a_1, b_1] \div [a_2, b_2] = [\min(N), \max(N)] \quad (I.56)$$

$$N = \{a_1 \div a_2, a_1 \div b_2, b_1 \div a_2, b_1 \div b_2\} \quad (I.57)$$

$$\text{Avec } 0 \notin [a_2, b_2]$$

Exemple 2 : On considère à nouveau deux nombres flous triangulaires positifs  $\tilde{A}_1$  et  $\tilde{A}_2$  propose par :

$$\tilde{A}_1 = \text{tfn}(5,2,2) \text{ et } \tilde{A}_2 = \text{tfn}(7,2,3) \quad (I.58)$$

Nous définissons le nombre de décomposition comme  $m=2$ , ce qui correspond à un espacement de degré d'appartenance discret par  $\Delta\mu = 0.5$ . A la suite de la décomposition, nous obtenons l'ensemble des intervalles :

$$\tilde{A}_1 = \{[3,7], [4,6], [5,5]\} \text{ et } \tilde{A}_2 = \{[5,10], [6,8.5], [7,7]\} \quad (I.59)$$

L'opération élémentaire de la multiplication :

$$\tilde{q} = Em(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2) = \tilde{A}_1 \times \tilde{A}_2$$

Peut alors être évaluée en appliquant l'arithmétique d'intervalles séparément à chaque degré d'appartenance  $\mu_j, j = 0,1,2$ :

$$\mu_0 = 0,0: Z^{(0)} = X_1^{(0)} X_2^{(0)} = [3,7][5,10] = [15,70] \quad (I.60)$$

$$\mu_1 = 0,5: Z^{(1)} = X_1^{(1)} X_2^{(1)} = [4,6][6,8.5] = [24,51] \quad (\text{I.61})$$

$$\mu_2 = 1,0: Z^{(2)} = X_1^{(2)} X_2^{(2)} = [5,5][7,7] = [35,35] \quad (\text{I.62})$$

On obtient le produit  $\tilde{q} = Em(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2) = \tilde{A}_1 \times \tilde{A}_2$  dans sa forme décomposée :

$$Q = P_1 \times P_2 = \{Z^{(0)}, Z^{(1)}, Z^{(2)}\} = \{[15,70], [24,51], [35,35]\} \quad (\text{I.63})$$

### I.9.L'arithmétique floue avancée-La méthode de transformation

Fondamentalement, les incertitudes sur les paramètres du modèle peuvent être classées dans différents types selon leur origine. Ces incertitudes peuvent surgir en raison des imprécisions ou d'un manque de l'information, soit si l'information disponible est incomplète (imprécise, vague, ...) ou si l'information disponible est contradictoire (variabilité, conflit), d'autre part, il semble illusoire de considérer une absolue précision des données. De ce fait, tout système de mesure a ses limites en termes de précision, plutôt que de masquer le problème, il peut paraître intéressant au contraire d'intégrer la connaissance que l'on a de l'imprécision dans l'analyse. Nous pensons que le cadre le plus adapté à la représentation et la manipulation des mesures imprécises est celui des ensembles flous [7].

Ainsi, on voit se développer depuis quelques années un intérêt croissant pour des méthodes d'analyse de données imparfaites. Nous présentons Dans cette section une approche très pratique pour la simulation des systèmes à paramètres incertains qui est la représentation des paramètres du modèle sous forme de nombres flous [8] suivie de l'utilisation de l'arithmétique floue basée sur la méthode de transformation. [6.11.19] pour effectuer l'évaluation des équations du modèle.

#### I.9.1. Simulation et analyse des modèles incertains

Dans cette section, nous étudions les modèles de type linéaires et non linéaires à paramètres incertains. Nous nous intéresserons aux modèles incertains de la forme suivante :

$$\tilde{q} = F(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \dots, p_n) \quad (\text{I.64})$$

La seule information disponible réside dans la connaissance des bornes des intervalles auquel appartiennent ces paramètres  $\tilde{P}_i \cdot i = 1, 2, \dots, n$ .

### I.9.2. Simulation par la méthode de transformation

La transformation flou a été fortement théorisée par Hans-Michael [6], elle peut être vue comme la décomposition d'un modèle incertain. Le calcul arithmétique sur les nombres flous peut alors être utilisé pour réaliser des opérations approximatives sur les intervalles décomposés aboutissant à leur modification ou à leur analyse.

La transformation inverse permet alors de recomposer le système original après certaines manipulations.

Autrement dit, la méthode de transformation a été proposée comme un outil pour la simulation et l'analyse des systèmes incertains. Jusqu'à présent, cette méthode a été connue sous deux formes : une forme générale, et une forme réduite, ce qui permet de réduire le coût de calcul.

#### I.9.2.1. La décomposition des entrées flous

Pour simuler un modèle flou paramétré à l'aide de la méthode de transformation réduite, chaque paramètre flou est tout d'abord décomposé en  $\alpha$ -coupe.

L'idée des nombres flous décomposés est de représenter un nombre flou par l'ensemble de ses  $\alpha$ -coupe. L'arithmétique flou se réduit alors à l'arithmétique des intervalles appliqués à différents degrés d'appartenance.

- Dans la première étape l'intervalle  $[0, 1]$  de l'axe  $\mu$  est divisé en  $m$  intervalles de longueur équidistante  $\Delta\mu = 1/m$  (Figure 3.1) où  $m$  est le facteur de décomposition, la valeur discrète des fonctions d'appartenances  $\mu_j$ , des  $(m + 1)$  intervalles est donnée par :

$$\mu_j = \frac{j}{m}, \quad j = 0, 1, \dots, m. \quad (\text{I.65})$$

- Dans la seconde étape les paramètres flous du modèle  $\tilde{P}_i \cdot i = 1, 2, \dots, n$ , sont décomposés en  $\alpha$ -coupe conduisant à la représentation suivante :

$$P_i = \{X_i^{(0)}, X_i^{(1)}, \dots, X_i^{(m)}\}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (\text{I.66})$$

Ou chaque ensemble  $P_i$  est composé de  $(m + 1)$  intervalles.

$$X_i^{(j)} = [a_i^{(j)}, b_i^{(j)}] = \text{coupe}_{\mu_j}(\tilde{p}_i), \quad \text{avec } a_i^{(j)} \leq b_i^{(j)}, \quad \text{pour } j = 0, 1, \dots, m. \quad (\text{I.67})$$

$$X_i^{(0)} = [a_i^{(0)}, b_i^{(0)}] = [\omega_{l_i}, \omega_{r_i}] \quad \text{avec } ]\omega_{l_i}, \omega_{r_i}[ = \text{supp}(\tilde{p}_i). \quad (\text{I.68})$$

La figure I.10 illustre une décomposition en un ensemble de  $m$   $\alpha$ -coupes, cette décomposition offre l'avantage de capturer systématiquement le noyau des ensembles flous, assurant une représentation cohérente.

### I.9.2.2. Transformation des intervalles d'entrée

Dans le cas de la méthode de transformation réduite, les intervalles  $X_i^{(j)}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  de chaque degré de la fonction d'appartenance  $\mu_j$ ,  $j = 0, 1, \dots, m$  sont transformés en tableaux  $\tilde{X}_i^{(j)}$  :

$$\hat{X}_i^{(j)} = \begin{bmatrix} [a_i^{(0)} , b_i^{(0)}] \\ [a_i^{(1)} , b_i^{(1)}] \\ [a_i^{(2)} , b_i^{(2)}] \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ [a_i^{(m)} , b_i^{(m)}] \end{bmatrix} \quad (I.69)$$

De la forme :

$$\tilde{X}_i^{(j)} = \overbrace{\left( (\alpha_i^{(j)}, \beta_i^{(j)}), (\alpha_i^{(j)}, \beta_i^{(j)}), \dots, (\alpha_i^{(j)}, \beta_i^{(j)}) \right)}^{2^{i-1} \text{ paires}} \quad (I.70)$$

Avec :

$$\alpha_i^{(j)} = \underbrace{(a_i^{(j)}, \dots, a_i^{(j)})}_{2^{n-i} \text{ elements}}, \beta_i^{(j)} = \underbrace{(b_i^{(j)}, \dots, b_i^{(j)})}_{2^{n-i} \text{ elements}} \quad (I.71)$$

On remarque que seulement les bornes  $a_i^{(j)}$  et  $b_i^{(j)}$  de l'intervalle  $X_i^{(j)}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $j = 0, 1, \dots, m$ , sont utilisées dans ce schéma de transformation.

Dans le cas contraire, la méthode de transformation générale est recommandée. Dans ce cas des points supplémentaires au sein des intervalles  $X_i^{(j)}$  sont ajoutés dans la transformation, ainsi les intervalles  $X_i^{(j)}$  sont transformés en tableaux  $\tilde{X}_i^{(j)}$  de la forme suivante :

$$\tilde{X}_i^{(j)} = \underbrace{\left( (\gamma_{1,i}^{(j)}, \gamma_{2,i}^{(j)}, \dots, \gamma_{(m+j-1),i}^{(j)}), \dots, (\gamma_{1,i}^{(j)}, \gamma_{2,i}^{(j)}, \dots, \gamma_{(m+j-1),i}^{(j)}) \right)}_{(m-j+1)^{n-i} \text{ éléments}} \quad (1.72)$$

Avec :

$$\gamma_{l,i}^{(j)} = \underbrace{(c_{l,i}^{(j)}, \dots, c_{l,i}^{(j)})}_{(m-j+1)^{n-i} \text{ éléments}} \quad (I.73)$$

Et :

$$c_{l,i}^{(j)} = \begin{cases} a_i^{(j)} & \text{pour } l = 1 \text{ et } j = 0, 1, \dots, m \\ \frac{1}{2}(c_{l-1,i}^{(j+1)} + c_{l,i}^{(j+1)}) & \text{pour } l = 2, 3, \dots, m - j \text{ et } j = 0, 1, \dots, m - 2 \\ b_i^{(j)} & \text{pour } l = m - j + 1 \text{ et } j = 0, 1, \dots, m \end{cases} \quad (I.74)$$

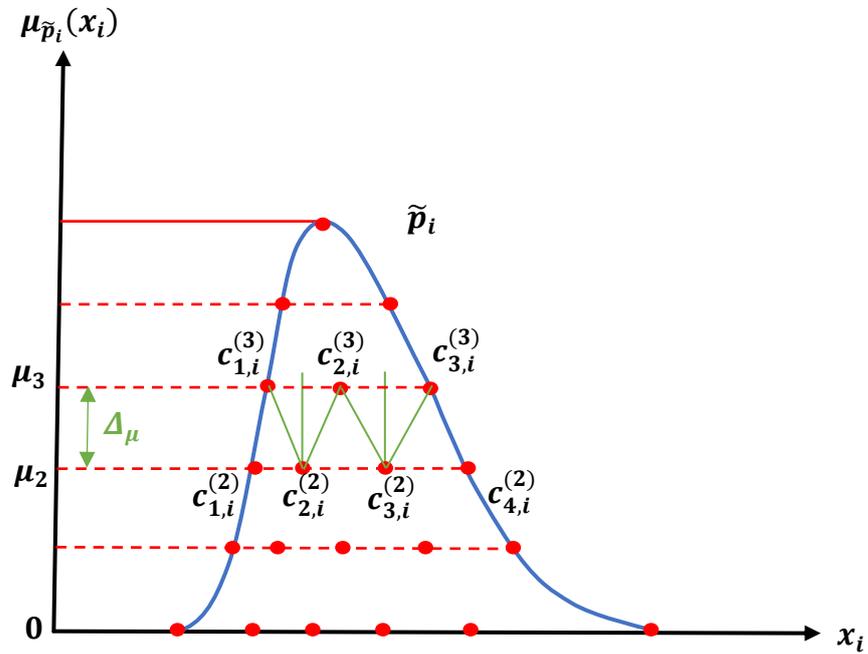


Figure.I.11. Décomposition d'un nombre flou.

### I.9.2.3 Evaluation du modèle

En supposant que le modèle flou paramétré soit donné par l'expression fonctionnelle  $F$  dans l'équation 1.64, son estimation sera effectuée en évaluant l'expression de chacune des colonnes des tableaux séparément, en utilisant l'arithmétique classique pour les nombres réels.

Ainsi, la sortie décomposée du système  $\tilde{q}$  peut être transformé par le tableau  $\hat{z}^{(j)}$   $j = 0, 1, \dots, m$  le  $k^{\text{ème}}$  élément  $k_{\hat{z}^{(j)}}$  du tableau  $\hat{z}^{(j)}$  est donné par :

$$k_{\hat{z}^{(j)}} = F(k_{\hat{x}_1^{(j)}}, k_{\hat{x}_2^{(j)}}, \dots, k_{\hat{x}_n^{(j)}}) \quad (I.75)$$

Ou  $k_{\hat{x}_i^{(j)}}$  désigne le  $k^{\text{ème}}$  élément du tableau  $\hat{X}_i^{(j)}$ .

### I.9.2.4 La transformation inverse de la sortie

Comme son nom l'indique, la transformation flou inverse doit être perçue comme l'inversion de l'équation I.64. Elle consiste en fait à obtenir une estimation du modèle.

La représentation décomposée de la sortie du modèle flou  $\tilde{q}$ , exprimée par l'ensemble

$$Q = \{z^{(0)}, z^{(1)}, \dots, z^{(m)}\} \quad (I.76)$$

Qui est constitué de  $(m+1)$  intervalles, avec :

$$z^{(j)} = [a^{(j)}, b^{(j)}] = \text{coupe}_{\mu_j}(\tilde{q}), \text{ avec } a^{(j)} \leq b^{(j)}, \text{ pour } j = 1, 2, \dots, m, \quad (I.77)$$

$$z^{(0)} = [a^{(0)}, b^{(0)}] = [\omega_{l_i}, \omega_{r_i}] \text{ avec } [\omega_{l_i}, \omega_{r_i}] = \text{supp}(\tilde{q}). \quad (I.78)$$

Peut être obtenue par retransformation du tableau  $\hat{z}^{(j)}$  en utilisant les équations récurrentes suivantes :

$$a^{(j)} = \min_k(a^{(j+1)}, k\hat{z}^{(j)}) \quad \text{et} \quad b^{(j)} = \max_k(a^{(j+1)}, k\hat{z}^{(j)}) \quad (I.79)$$

$$j = 0, 1, \dots, m - 1,$$

Avec :

$$a^{(m)} = \min_k(k\hat{z}^{(m)}) = \max_k(k\hat{z}^{(m)}) = b^{(m)} \quad (I.80)$$

$$\hat{Z}_i^{(j)} = \begin{bmatrix} [f(a_i^{(0)}) , f(b_i^{(0)})] \\ [f(a_i^{(1)}) , f(b_i^{(1)})] \\ [f(a_i^{(2)}) , f(b_i^{(2)})] \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ [f(a_i^{(m)}) , f(b_i^{(m)})] \end{bmatrix} \quad (I.81)$$

### I.9.2.5 Reconstruction de la sortie

La reconstruction de la sortie, est obtenue en recomposant les intervalles  $z^{(j)}, j = 0, 1, \dots, m$ , de l'ensemble Q en fonction de leurs degrés d'appartenance  $\mu_j$ , Donc une approximation de la sortie flou du modèle  $\tilde{q}$  est atteint [18].

**Conclusion**

Dans ce chapitre, nous avons présenté d'une façon générale les notions principales de la logique floue. Ensuite nous avons donné des définitions générales sur le sous-ensemble flou, certaines caractéristiques et les opérations principales, ensuite la structure de base d'un système flou. Enfin, on a donné une description générale de l'arithmétique floue et l'arithmétique floue avancée présentée par la méthode de transformation. Dans les chapitres suivants, on va voir l'application de cette théorie sur un système non linéaire présenté par un pendule inversé rotatif.

## CHAPITRE II. MODÉLISATION DE PENDULE INVERSÉ ROTATIF

### II.1. Introduction

Dans ce chapitre on s'intéresse à l'étude du pendule inversé rotatif. Tout d'abord Nous expliquons son principe de fonctionnement, par la suite nous élaborons son modèle mathématique en se basant sur le formalisme d'Euler-Lagrange. Enfin nous présentons ce système par un modèle dans l'espace d'état.

### II.2. Définitions

Avant de passer à la modélisation, on est amené à prendre en compte plusieurs aspects ou particularités dans notre étude, comme suit :

#### II.2.1. Modélisation

« Modéliser, c'est convertir un problème concret, issu du monde réel en termes de nature mathématique. C'est transformer un besoin plus ou moins bien exprimé en équations.

En Automatique, le modèle mathématique d'un système dynamique est défini comme un ensemble d'équations qui représentent le comportement dynamique du système avec la précision souhaitée. Le processus de modélisation consiste premièrement en l'identification du système et de ses composants élémentaires. Le modèle mathématique idéal est obtenu en écrivant les lois physiques régissant le comportement du système. Quelle que soit la nature physique du système à 'étudier, cette étape résulte en l'écriture des équations différentielle et algébriques (linéaires, non linéaires, à coefficients constants ou variant dans le temps) qui forment l'expression mathématique du comportement idéal du système [13].

#### II.2.2. Les actions mécaniques

Une action mécanique peut être exercée sur un solide S1 pour le maintenir au repos, le déplacer ou le déformer. On peut par exemple recenser : le pied d'un footballeur qui frappe un ballon, les champs électriques et magnétiques qui dévient l'électron, le rotor qui entraîne l'axe d'une turbine. Ces actions sont exercées par S2 sur S1.

**Définition 1** Deux solides S1 et S2 sont en interaction si on peut trouver dans l'un une modification de position d'orientation qui entraîne une modification dans l'autre.

**Définition 2** On appelle force la grandeur vectorielle décrivant une interaction capable de produire un mouvement ou de créer une déformation. On dit alors que S2 exerce une action mécanique sur S1 si relativement à un référentiel les mouvements (ou déformations) de S1 par rapport à ce référentiel sont différents selon que S2 est présent ou absent [12].

### II.2.3. Les systèmes non linéaires

Un système non linéaire est un système dont le théorème de superposition n'est pas vérifié.

$$f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y) \quad (2)$$

Où  $x$  et  $y$  sont des vecteurs d'entrée,  $\lambda$  et  $\mu$  sont des scalaires et  $f$  la sortie du système,

Lors de l'étude des systèmes non linéaires on se heurte à plusieurs difficultés, comme :

-L'analyse par des fonctions de transfert est impossible,

-La notion des pôles disparaît,

-Un système non linéaire possède en général plusieurs points d'équilibre et l'étude de leur stabilité est plus complexe que dans le cas linéaire pour lequel le concept de stabilité est global.

La non linéarité d'un système peut être intrinsèque ou peut être isolée, c'est-à-dire que l'on peut avoir une association d'éléments à caractéristiques non linéaires à un système linéaire.

Comme pour les systèmes linéaires, il est possible de distinguer, aussi les modèles non linéaires par les caractères suivants :

-à temps continu / à temps discret

-invariants dans le temps / variants dans le temps

-mono variables / multi variables

-déterministes / stochastiques [19].

### II.2.4. Linéarisation :

Soit  $f(x, y)$  une fonction non linéaire algébrique alors autour de point de fonctionnement  $(x_0, y_0)$ .

La linéarisation de  $f(x, y)$  déterminé par application du théorème de Taylor on a

$$f_{lin}(x, y) = f(x_0, y_0) + \left( \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right) \Big|_{x_0, y_0} (x - x_0) + \left( \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right) \Big|_{x_0, y_0} (y - y_0) + \dots \quad (3)$$

### II.2.5. Formalisme de Lagrange

La méthode de Lagrange, mise de l'avant en 1788 dans son célèbre traité la mécanique analytique, a pour but d'établir de manière systématique les équations différentielles déterminant le mouvement du système mécanique étudiée en fonction des coordonnées généralisées, à partir simplement de l'expression de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle. En un sens, elle schématise au maximum l'étude des problèmes mécaniques en offrant le chemin le plus court et le plus sûr vers les équations du mouvement [14].

Ce formalisme repose sur la fonction de Lagrange  $L = E_c - E_p$  qui correspond à la différence entre l'énergie cinétique totale du système  $E_c$  et l'énergies potentielles du système  $E_p$

Équations d'Euler-Lagrange : ce sont les équations du mouvement du système s'écrit :

$$\sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} \right\} = Q_i \quad (\text{II.1})$$

$L$  : Fonction de Lagrange ou Lagrangien.

$E_c$  : L'énergie cinétique du système.

$E_p$  : L'énergie potentielle du système.

$q_i$  : est la coordonnée généralisée et  $\dot{q}_i$  est la vitesse généralisée du système.

$Q_i$  : la force généralisée.

## II.3. Application

### II.3.1. Présentation de pendule inversé rotatif

Le système, illustré à la figure II.1, se compose d'un pendule vertical, un bras horizontal, une chaîne à engrenages et un servomoteur qui entraîne le pendule à travers le système de transmission à engrenages. Le bras rotatif est monté sur le pignon de sortie de la chaîne à engrenages. Un codeur est fixé à l'arbre du bras pour mesurer l'angle de rotation du bras. Au bout du bras rotatif se trouve une charnière instrumentée avec un codeur. Le pendule est attaché à la charnière [15].



**Figure II.1.** Système Pendule inversé rotatif

Le modèle Pendule Inversé Rotatif (PIR) est représenté à la figure II.2. Le pivot du bras rotatif est fixé à la base de moteur et est actionné. Le bras a une longueur  $L_r$ , un moment d'inertie de  $J_r$ , et son angle  $\theta$  augmente positivement lorsqu'il est tourné dans le sens anti-horaire. Le servo et le bras doivent tourner dans le sens anti-horaire lorsque la tension de commande est positive.

Le pendule inversé est relié à l'extrémité du bras rotatif. Il a une longueur totale de  $L_p$  et son centre de masse est  $L_p/2$ . Le moment d'inertie autour de son centre de masse est  $J_p$ . L'angle du pendule inversé  $\alpha$  est nul lorsqu'il est parfaitement droit en position verticale et augmente positivement lorsqu'il est tourné dans le sens anti-horaire [15].

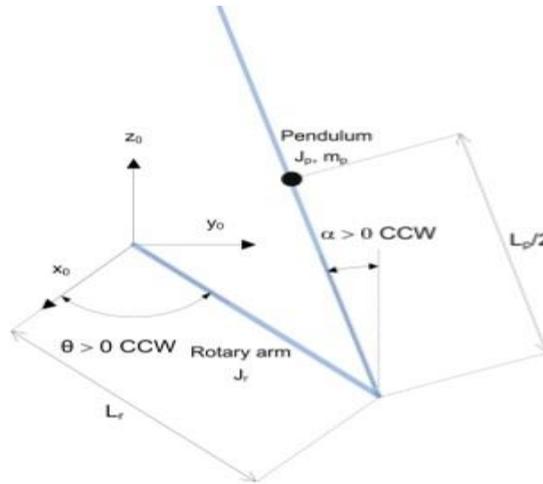


Figure.II.2. Modèle de Pendule inversé rotatif

### II.3.2. Les équations du mouvement

Il existe deux méthodes de détermination des équations du mouvement d'un pendule inversé: celle de la loi fondamentale de la dynamique (LFD) de Newton qui est basée sur le concept de force, et celle de formalisme d'Euler-Lagrange, qui est basée sur le principe de la conservation d'énergie mécanique. Dans ce travail on s'intéresse au formalisme d'Euler-Lagrange dans lequel le Lagrangien ( $L$ ) est défini comme une différence entre l'énergie cinétique ( $E_c$ ) et l'énergie potentielle ( $E_p$ ) du système :

$$L = E_c - E_p \tag{II.2}$$

#### II.3.2.1. l' énergie cinétique du système

L'énergie cinétique totale du système est :

$$E_c = E_{c \text{ pend}} + E_{c \text{ bras}} = \frac{1}{2} m_p v^2 + \frac{1}{2} J_p \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} J_r \dot{\theta}^2 \tag{II.3}$$

#### II.3.2.2. L'énergie potentielle du système

L'énergie potentielle totale du système est :

$$E_p = \frac{1}{2} m_p g L_p \cos \alpha \tag{II.4}$$

Pour atteindre la vitesse de centre du pendule, les coordonnées de centre de masse  $P$  du pendule sont déterminées dans l'équation. (II.5) à l'équation (II.7).

$$P_x = L_r \cos(\theta) + \frac{1}{2} L_p \sin(\alpha) \sin(\theta) \quad (\text{II.5})$$

$$P_y = L_r \sin(\theta) - \frac{1}{2} L_p \sin(\alpha) \cos(\theta) \quad (\text{II.6})$$

$$P_z = \frac{1}{2} L_p \cos(\alpha) \quad (\text{II.7})$$

En prenant des dérivées des positions, on trouve la vitesse de centre de masse  $P$ , donc l'équation de Lagrange devient comme :

$$L = \frac{1}{2} \left( J_r + m_p L_r^2 + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \sin^2(\alpha) \right) \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \left( J_p + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \right) \dot{\alpha}^2 - \frac{1}{2} m_p L_r L_p \cos \alpha \dot{\theta} \dot{\alpha} - \frac{1}{2} m_p g L_p \cos \alpha \quad (\text{II.8})$$

### II.3.3. Equations d'Euler-Lagrange

Les équations de mouvement du système pendulaire ont été développées à l'aide de la méthode d'Euler-Lagrange. Cette méthode systématique est souvent utilisée pour modéliser des systèmes complexes tels que des manipulateurs de robots à plusieurs articulations.

Plus précisément, les équations décrivant le mouvement du bras rotatif et du pendule par rapport à la tension du servomoteur seront obtenues à l'aide de l'équation d'Euler-Lagrange :

$$\frac{\partial^2 L}{\partial t \partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \quad (\text{II.9})$$

Les coordonnées généralisées  $q_i$ . Pour le système, posons

$$q(t)T = [\theta(t) \alpha(t)] \quad (\text{II.10})$$

Où  $\theta(t)$  est l'angle du bras rotatif et  $\alpha(t)$  est l'angle du pendule. Les équations d'Euler-Lagrangien du pendule rotatif sont

$$\frac{\partial^2 L}{\partial t \partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = Q_1 \quad (\text{II.11})$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial t \partial \dot{\alpha}} - \frac{\partial L}{\partial \alpha} = Q_2 \quad (\text{II.12})$$

Les forces généralisées  $Q_i$  sont utilisées pour décrire les forces non conservatives appliquées au système par rapport aux coordonnées généralisées. Dans ce cas, la force généralisée agissant sur le bras rotatif est :

$$Q_1 = \tau - B_r \dot{\theta} \quad (\text{II.13})$$

et agissant sur le pendule est :

$$Q_1 = -B_p \dot{\alpha} \quad (\text{II.14})$$

Les équations d'Euler-Lagrange sont une méthode systématique pour trouver les équations de mouvement de Pendule inversé rotatif. Une fois que l'énergie cinétique et potentielle est obtenue et que le lagrangien est trouvé, la tâche consiste à calculer diverses dérivées pour obtenir les équations de mouvement. Après avoir suivi ce processus, les équations de mouvement non linéaires du pendule inversé rotatif sont les suivantes :

$$\left( m_p L_r^2 + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \sin(\alpha)^2 + J_r \right) \ddot{\theta} - \left( \frac{1}{2} m_p L_p L_r \cos(\alpha) \right) \ddot{\alpha} + \left( \frac{1}{2} m_p L_p^2 \sin(\alpha) \cos(\alpha) \right) \dot{\theta} \dot{\alpha} + \left( \frac{1}{2} m_p L_p L_r \sin(\alpha) \right) \dot{\alpha}^2 = \tau - B_r \dot{\theta} \quad (\text{II.15})$$

$$- \frac{1}{2} m_p L_p L_r \cos(\alpha) \ddot{\theta} + \left( J_p + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \right) \ddot{\alpha} - \frac{1}{4} m_p L_p^2 \cos(\alpha) \sin(\alpha) \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} m_p L_p g \sin(\alpha) = -B_p \dot{\alpha} \quad (\text{II.16})$$

Le couple appliqué à la base du bras rotatif (c'est-à-dire au pignon de charge) est généré par le servomoteur, tel que décrit par l'équation :

$$\tau = \frac{\eta_g k_g \eta_m k_t (v_m - k_g k_m \dot{\theta})}{R_m} \quad (\text{II.17})$$

Les paramètres du moteur et du pendule inversé rotatif sont donnés avec leurs unités dans le Tableau II.1.

**Tableau.II.1** : Les paramètres du moteur et du pendule inversé rotatif

Paramètres	Symboles	Unités	Les valeurs
L'efficacité du Garbox	$\eta_g$	-	-
L'efficacité du moteur	$\eta_m$	-	-
Couple moteur constant	$k_t$	N.m/A	0.042
Rapport de vitesse total	$k_g$	-	
Constant arrière-EMF de moteur	$k_m$	V·s/rad	0.042
Masse du pendule	$m_p$	Kg	0.024
Longueur de Bras total	$L_r$	m	0.085
Longueur de pendule total	$L_p$	m	0.129
Moment d'inertie du bras	$J_r$	Kg·m <sup>2</sup>	
Moment d'inertie pendulaire	$J_p$	Kg·m <sup>2</sup>	
Coefficient d'amortissement visqueux équivalent du bras	$B_r$	N·m·s/rad	0.0015
Coefficient d'amortissement visqueux équivalent du pendule	$B_p$	N·m·s/rad	0.0005
La gravité	$g$	Kg·m <sup>2</sup>	9.81
Résistance de l'induit du moteur	$R_m$	$\Omega$	8.4

### II.3.4. Linéarisation

Les équations non linéaires (II.15) et (II.16) sont linéarisées autour du point de fonctionnement  $[\theta, \alpha, \dot{\theta}, \dot{\alpha}, \ddot{\theta}, \ddot{\alpha}] = [0,0,0,0,0,0]$ ,

Les équations du mouvement linéaires résultantes du pendule inversé sont définies comme suit :

$$(m_p L_r^2 + J_r) \ddot{\theta} - \frac{1}{2} m_p L_p L_r \ddot{\alpha} = \tau - B_r \dot{\theta} \quad (\text{II.18})$$

$$\frac{1}{2} m_p L_r L_p \ddot{\theta} + \left( J_p + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \right) \ddot{\alpha} + \frac{1}{2} m_p L_p g \alpha = -B_p \dot{\alpha} \quad (\text{II.19})$$

### II.3. 5. Démonstration

Linéarisation de la première équation non linéaire de pendul inversé rotatif, (II.15). Les conditions initiales pour toutes les variables sont zéro, c'est-à-dire  $\theta_0 = 0, \alpha_0 = 0, \dot{\theta} = 0, \dot{\alpha} = 0$ :

Soit la variable  $z$

$Z^T = [\theta, \alpha, \dot{\theta}, \dot{\alpha}, \ddot{\theta}, \ddot{\alpha}]$  et  $Z_0^T = [0,0,0,0,0,0]$ , Le côté gauche de l'équation II.15 est déjà linéaire.

la fonction non linéaire est sous la forme:

$$f(z) = \left( m_p L_r^2 + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \sin(\alpha)^2 + J_r \right) \ddot{\theta} - \left( \frac{1}{2} m_p L_p L_r \cos(\alpha) \right) \ddot{\alpha} + \left( \frac{1}{2} m_p L_p^2 \sin(\alpha) \cos(\alpha) \right) \dot{\theta} \dot{\alpha} + \left( \frac{1}{2} m_p L_p L_r \sin(\alpha) \right) \dot{\alpha}^2 = \tau - B_r \dot{\theta} \quad (\text{II.20})$$

À partir de (2), la fonction linéarisée est sous la forme

$$f_{lin}(z) = f(0) + \left( \frac{\partial f(z)}{\partial \ddot{\theta}} \right) \Big|_{z=z_0} \ddot{\theta} + \left( \frac{\partial f(z)}{\partial \ddot{\alpha}} \right) \Big|_{z=z_0} \ddot{\alpha} + \left( \frac{\partial f(z)}{\partial \dot{\theta}} \right) \Big|_{z=z_0} \dot{\theta} + \left( \frac{\partial f(z)}{\partial \dot{\alpha}} \right) \Big|_{z=z_0} \dot{\alpha} + \left( \frac{\partial f(z)}{\partial \theta} \right) \Big|_{z=z_0} \theta + \left( \frac{\partial f(z)}{\partial \alpha} \right) \Big|_{z=z_0} \alpha \quad (\text{II.21})$$

La linéarisation de  $f(z)$  par rapport à  $\ddot{\theta}$  donne

$$\left( \frac{\partial f(z)}{\partial \ddot{\theta}} \right) \Big|_{z=z_0} = m_p L_r^2 + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \sin(0)^2 + J_r = m_p L_r^2 + J_r \quad (\text{II.22})$$

En linéarisant  $f(z)$  par rapport à  $\ddot{\alpha}$  on obtient

$$\left( \frac{\partial f(z)}{\partial \ddot{\alpha}} \right) \Big|_{z=z_0} = \frac{1}{2} m_p L_p L_r \cos(0) = \frac{1}{2} m_p L_p L_r \quad (\text{II.23})$$

Tous les autres termes sont les suivants :

$$\left( \frac{\partial f(z)}{\partial \dot{\theta}} \right) \Big|_{z=z_0} = 0 \quad , \quad \left( \frac{\partial f(z)}{\partial \dot{\alpha}} \right) \Big|_{z=z_0} = 0 \quad (\text{II.24})$$

$$\left( \frac{\partial f(z)}{\partial \theta} \right) \Big|_{z=z_0} = 0 \quad , \quad \left( \frac{\partial f(z)}{\partial \alpha} \right) \Big|_{z=z_0} = 0 \quad , \quad \text{et} \quad f(0) = 0 \quad (\text{II.25})$$

En évaluant l'équation (II.21) on obtient :

$$f_{lin}(z) = (m_p L_r^2 + J_r) \ddot{\theta} - \frac{1}{2} m_p L_p L_r \ddot{\alpha} \quad (\text{II.26})$$

En intégrant cela dans l'équation d'origine, nous obtenons l'équation du mouvement linéaire suivante :

$$(m_p L_r^2 + J_r) \ddot{\theta} - \frac{1}{2} m_p L_p L_r \ddot{\alpha} = \tau - B_r \dot{\theta} \quad (\text{II.27})$$

Linéarisez la deuxième équation du pendule inversé rotatif non linéaire, équation II.16, avec les conditions initiales  $\theta_0 = 0, \alpha_0 = 0, \dot{\theta} = 0, \dot{\alpha}_0 = 0$

Les mêmes principes que ceux utilisés pour linéariser la première l'équation du mouvement non linéaire peuvent être utilisés à cet effet. Le côté gauche de l'équation II.16 est :

$$f(z) = -\frac{1}{2} m_p L_p L_r \cos(\alpha) \ddot{\theta} + \left( J_p + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \right) \ddot{\alpha} - \frac{1}{4} m_p L_p^2 \cos(\alpha) \sin(\alpha) \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} m_p L_p g \sin(\alpha) \quad (\text{II.28})$$

La linéarisation donnée dans l'équation II.21 est utilisée pour cette équation, la solution aux dérivés à base de  $\ddot{\theta}, \ddot{\alpha}$  et  $\alpha$  est :

$$\left( \frac{\partial f(z)}{\partial \ddot{\theta}} \right) |_{z=z_0} = -\frac{1}{2} m_p L_p L_r \quad (\text{II.29})$$

$$\left( \frac{\partial f(z)}{\partial \ddot{\alpha}} \right) |_{z=z_0} = J_p + \frac{1}{4} m_p L_p^2, \text{ et} \quad (\text{II.30})$$

$$\left( \frac{\partial f(z)}{\partial \alpha} \right) |_{z=z_0} = -\frac{1}{2} m_p L_p g \quad (\text{II.31})$$

Les autres dérivés à base de  $\dot{\theta}, \dot{\alpha}$  et  $\theta$  sont zéro et  $f(z_0) = 0$ . En évaluant la fonction  $f_{lin}(z)$ , on obtient

$$f_{lin}(z) = -\frac{1}{2} m_p L_p L_r \ddot{\theta} + J_p + \left( \frac{1}{4} m_p L_p^2 \right) \ddot{\alpha} - \frac{1}{2} m_p L_p g \alpha \quad (\text{II.32})$$

Qui est le côté gauche linéarisé de l'équation II.16. La deuxième équation du mouvement linéaire est donc :

$$-\frac{1}{2} m_p L_p L_r \ddot{\theta} + J_p + \left( \frac{1}{4} m_p L_p^2 \right) \ddot{\alpha} - \frac{1}{2} m_p L_p g \alpha = -B_p \dot{\alpha} \quad (\text{II.33})$$

#### II.4. Modèle linéaire en espace d'état

Les équations linéaires en espace d'état sont :

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (\text{II.34})$$

$$y = Cx + Du \quad (\text{II.35})$$

Soit  $x$  est l'état,  $u$  est l'entrée de contrôle.  $A, B, C, D$  sont les matrices d'état, pour le système à pendule inversé rotatif, les équations d'état et de sortie sont définies comme suit :

$$x^T = [\theta \ \alpha \ \dot{\theta} \ \dot{\alpha}] \quad (\text{II.36})$$

$$y^T = [x_1 \ x_2] \quad (\text{II.37})$$

A partir de la définition généralisée des coordonnées dans l'équation II.10 et les équations linéaires Équation II.27 et Équation II.33, la matrice deviens :

$$\begin{bmatrix} m_p L_r^2 + J_r & -\frac{1}{2} m_p L_p L_r \\ -\frac{1}{2} m_p L_p L_r & J_p + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_r & 0 \\ 0 & B_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} m_p L_p g \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.38})$$

Réorganiser la matrice II.38 pour obtenir

$$\begin{bmatrix} m_p L_r^2 + J_r & -m_p L_p L_r \\ -\frac{1}{2} m_p L_p L_r & J_p + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau - B_r \dot{\theta} \\ \frac{1}{2} m_p L_p g \alpha - B_p \dot{\alpha} \end{bmatrix} \quad (\text{II.39})$$

L'inverse de la matrice est

$$\begin{bmatrix} m_p L_r^2 + J_r & -\frac{1}{2} m_p L_p L_r \\ -\frac{1}{2} m_p L_p L_r & J_p + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{J_T} \cdot \begin{bmatrix} J_p + \frac{1}{4} m_p L_p^2 & \frac{1}{2} m_p L_p L_r \\ \frac{1}{2} m_p L_p L_r & m_p L_r^2 + J_r \end{bmatrix} \quad (\text{II.40})$$

Le déterminant de la matrice est égal à :

$$\frac{1}{J_T} = (m_p L_r^2 + J_r) (J_p + \frac{1}{4} m_p L_p^2) - \frac{1}{4} m_p^2 L_p^2 L_r^2 = J_p m_p L_r^2 + J_r J_p + \frac{1}{4} J_r m_p L_p^2 \quad (\text{II.41})$$

Résoudre les conditions d'accélération :

$$\begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} = \frac{1}{J_T} \cdot \begin{bmatrix} J_p + \frac{1}{4} m_p L_p^2 & \frac{1}{2} m_p L_p L_r \\ \frac{1}{2} m_p L_p L_r & m_p L_r^2 + J_r \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tau - B_r \dot{\theta} \\ \frac{1}{2} m_p L_p g \alpha - B_p \dot{\alpha} \end{bmatrix} \quad (\text{II.42})$$

De la multiplication matricielle, la première équation est :

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{J_T} (J_p + \frac{1}{4} m_p L_p^2) (\tau - B_r \dot{\theta}) + \frac{1}{2 J_T} m_p L_p L_r (\frac{1}{2} m_p L_p g \alpha - B_p \dot{\alpha}). \quad (\text{II.43})$$

Élargir l'équation et collecter des termes similaires nous donne :

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{J_T} (- (J_p + \frac{1}{4} m_p L_p^2) B_r \dot{\theta} - \frac{1}{2} m_p L_p L_r B_p \dot{\alpha} + \frac{1}{4} m_p^2 L_p^2 L_r g \alpha + (J_p + \frac{1}{4} m_p L_p^2) \tau). \quad (\text{II.44})$$

Pour la deuxième équation, la multiplication de la matrice conduit à

$$\ddot{\alpha} = \frac{1}{2 J_T} m_p L_p L_r (\tau - B_r \dot{\theta}) + \frac{1}{J_T} (J_r + m_p L_r^2) (\frac{1}{2} m_p L_p g \alpha - B_p \dot{\alpha}) \quad (\text{II.45})$$

$$\ddot{\alpha} = \frac{1}{J_T} \left( -\frac{1}{2} m_p L_p L_r B_r \dot{\theta} - (J_r + m_p L_r^2) B_p \dot{\alpha} + \frac{1}{2} m_p L_p g (J_r + m_p L_r^2) \alpha + \frac{1}{2} m_p L_p L_r \tau \right) \quad (\text{II.46})$$

Pour obtenir l'espace d'état linéaire du système pendule inversé rotatif. Il faut trouver les matrices  $A$  et  $B$ ,  $C$  et  $D$ .

À partir de l'état défini dans l'équation II.36, il est donné que  $\dot{x}_1 = x_3$  et  $\dot{x}_2 = x_4$ . Nous remplaçons l'état  $x$  par les équations du mouvement trouvées,

Où (comme indiqué dans l'équation II.36, nous avons  $\theta = x_1$ ,  $\alpha = x_2$ ,  $\dot{\theta} = x_3$ ,  $\dot{\alpha} = x_4$ . Les matrices  $A$  et  $B$  pour  $\dot{x} = Ax + Bu$  peuvent alors être trouvées.

La substitution de  $x$  dans l'équation II.44 et l'équation II.46 donne :

$$\dot{x}_3 = \frac{1}{J_T} \left( -\left( J_p + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \right) B_r x_3 - \frac{1}{2} m_p L_p L_r B_p x_4 + \frac{1}{4} m_p^2 L_p^2 L_r g x_2 + \left( J_p + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \right) u \right). \quad (\text{II.47})$$

Et

$$\dot{x}_4 = \frac{1}{J_T} \left( -\frac{1}{2} m_p L_p L_r B_r x_3 - (J_r + m_p L_r^2) B_p x_4 + \frac{1}{2} m_p L_p g (J_r + m_p L_r^2) x_2 + \frac{1}{2} m_p L_p L_r u \right) \quad (\text{II.48})$$

Les matrices  $A$  et  $B$  dans l'équation  $\dot{x} = Ax + Bu$  sont :

$$A = \frac{1}{J_T} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{4} m_p^2 L_p^2 L_r g & -\left( J_p + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \right) B_r & -\frac{1}{2} m_p L_p L_r B_p \\ 0 & \frac{1}{2} m_p L_p g (J_r + m_p L_r^2) & -\frac{1}{2} m_p L_p L_r B_r & -(J_r + m_p L_r^2) B_p \end{bmatrix} \quad (\text{II.49})$$

Et

$$B = \frac{1}{J_T} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ J_p + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \\ \frac{1}{2} m_p L_p L_r \end{bmatrix} \quad (\text{II.50})$$

Dans l'équation de sortie, seules les positions des angles de bras et de liaison sont mesurées.

Sur cette base, les matrices  $C$  et  $D$  de l'équation de sortie sont :

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.51})$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.52})$$

**Conclusion**

Dans ce chapitre, nous avons présenté une modélisation du système pendule inversé rotatif. Ensuite nous avons utilisé le formalisme de Euler-Lagrange pour établir les équations dynamiques du système. Enfin nous avons présenté ce système par un modèle dans l'espace d'état par la linéarisation du modèle autour du point d'équilibre.

Dans le chapitre suivant, nous appliquons deux structures de commande basées sur la commande par LQR classique et la commande par LQR flou sur le pendule inversé rotatif.

## CHAPITRE III. RESULTATS DE SIMULATION

### III.1. Introduction

Dans ce chapitre, On parle de la commande linéaire quadratique LQR, puis nous représentons une nouvelle méthodologie qui est l'approche proposée par Hanss et Kistner [10].

Elle aborde le problème du régulateur quadratique linéaire (LQR) pour la conception de système structurés, avec des incertitudes paramétriques, et fournit une solution qui est basé sur une combinaison de conception de contrôleur classique et l'arithmétique flou.

Explicitement, nous considérons le problème d'un pendule inversé rotatif, qui doit être contrôlé dans sa position désire.

L'incertitude sera incorporée sous la forme de valeurs flous pour plusieurs paramètres du modèle, tels que la masse, le moment d'inertie, la friction dans le bras et le pendule, et leurs longueurs.

Par la suite, les équations de la conception LQR flou seront évalués au moyen de la méthode de transformation, conduisant un vecteur de retour d'état optimal flou [7].

Puis on exposera les résultats de simulation obtenus suite à l'application de cette commande au système étudié.

### III.2. Conception du contrôleur

La commande optimale Linéaire Quadratique (LQ ou LQR : Linear Quadratic Regulator) consiste en la recherche d'une matrice de gain de retour  $k$ , telle que la commande par retour d'état  $u = -k^T x(t)$  minimise le critère :

$$J = \frac{1}{2} \int [x(t)^T Q x(t) + u(t)^T R u(t)] dt \quad (\text{III.1})$$

Ou  $Q$  et  $R$  sont des matrices de pondération définies positives. Ce problème  $LQ$  dispose d'une solution unique obtenue par l'utilisation des principes d optimalité et donnée par :

$$u(t) = -R^{-1} P^T B x(t) = k^T x(t) \quad (\text{III.2})$$

Ou  $k$  est le gain de Kalman et  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est une matrice symétrique définie positive, qui est alors obtenue en résolvant l'équation algébrique de Riccati suivante :

$$A^T P + P A - R^{-1} P B B^T P^* + Q = 0 \quad (\text{III.3})$$

L'un des intérêts de la commande optimale  $LQ$  consiste à garantir une bonne robustesse vis-à-vis des erreurs. Cependant il n'est pas possible d'imposer a priori les dynamiques en boucles fermées qui correspondent à l'optimalité d'un critère quadratique.

### III.2.1. Conception du LQR flou pour le système incertain

Suite à l'approche de l'arithmétique flou, l'incertitude dans les paramètres du modèle est prise en compte sous la forme de paramètres flous.

Les matrices dans les équations de la conception LQR flou sont ensuite évaluées, et la méthode de transformation doit être appliquée pour déterminer le vecteur optimal de retour d'état ou  $k$ . Les équations correspondantes, peuvent se présenter comme :

$$\tilde{A}^T \tilde{P} + \tilde{P} \tilde{A} - \tilde{R}^{-1} \tilde{P} \tilde{B} \tilde{B}^T \tilde{P} + Q = 0 \quad (\text{III.4})$$

$$\tilde{k} = \tilde{R}^{-1} \tilde{P}^T \tilde{B} \quad (\text{III.5})$$

Le contrôleur qui résulte de ce concept est dérivé à partir des équations de la conception LQR classique d'une part, et se caractérise par des paramètres flous, d'autre part, il est appelé contrôleur optimal a paramètres flous.

L'opérateur de défuzzification qui est utilisé dans ce contexte repose sur les définitions suivantes :

-La méthode de transformation réduite :

$$v^\circ = \frac{1}{2^{n(m+1)}} \sum_{j=0}^m \sum_{k=1}^{2^n} k_{\tilde{v}}(j) \quad (\text{III.6})$$

-La méthode de transformation générale :

$$v^\circ = \frac{1}{(m+1-j)^{n(m+1)}} \sum_{j=0}^m \sum_{k=1}^{(m+1-j)^n} k_{\tilde{v}}(j) \quad (\text{III.7})$$

Ou  $k_{\tilde{v}}(j)$  désigne le  $k^{\text{émé}}$  élément du tableau  $\hat{X}_i^{(j)}$ .

-Pour un nombre flou indépendante  $\tilde{p}_i, i = 1, 2, \dots, n$ , la valeur défuzzifié est

$$v^\circ = \text{defuzz}(\tilde{p}_i) = \frac{1}{2^{(m+1)}} \sum_{j=0}^m a_i^{(j)} + b_i^{(j)} \quad (\text{III.8})$$

Avec

$$\left[ a_i^{(j)}, b_i^{(j)} \right] = \text{coupe}_{\mu_j}(\tilde{p}_i), \mu_j = \frac{j}{m}, j = 1, 2, \dots, m, \quad (\text{III.9})$$

### III.3. Défuzzification de vecteur de retour d'état $k$

Le vecteur de retour d'état flou  $\tilde{k}$  peut-être défuzzifié comme suit :

$$k^\circ = defuzz(\tilde{k}) \quad (III.10)$$

$$k^\circ = \frac{1}{2^n(m+1)} \sum_{j=0}^m \sum_{k=1}^{2^n} k_{\tilde{v}}(j) \quad (III.11)$$

Avant son incorporation dans la loi de commande. Une sortie du régulateur peut alors être obtenue :

$$u(t) = -k^{\circ T} x(t) = defuzz(\tilde{k}^T)x(t). \quad (III.12)$$

### III.4. Résultats de simulation

Pour illustrer la performance de l'approche LQR pour les systèmes incertains en évitant les effets indésirables, tels que le bruit, et en garantissant des conditions égales pour tous les tests, nous avons appliqué le contrôleur flou a de simulation numérique du modèle non-linéaire du pendule inversé rotatif

Les paramètres suivants du modèle, cependant, sont : les masses  $m_r$  et  $m_p$ , les facteurs de friction  $B_r$  et  $B_p$ , les Longueurs totales  $L_r$  et  $L_p$  de bras et le pendule respectives, le couple moteur constant  $k_t$  et le constant arrière-EMF de moteur  $k_m$ .

**Tableau .III.1.** Paramètres du modèle avec leurs valeurs réelles

Paramètre	Valeur réelle
$p_1 = m_r$	0.095 kg
$p_2 = m_p$	0.024 kg
$p_3 = L_r$	0.085 m
$p_4 = L_p$	0.129 m
$p_5 = B_r$	0.0015 Nm s rad <sup>-1</sup>
$p_6 = B_p$	0.0005 Nm s rad <sup>-1</sup>
$p_7 = k_t$	0.042 N.m/A
$p_8 = k_m$	0.042 V.S/rad

#### III.4.1. Paramètres pour la conception LQR classique

Les paramètres réels du modèle sont disponibles dans le tableau III.1, et la conception LQR classique peut être effectuée avec ces paramètres d'être incorporés dans l'équation II.49 et II.50.

Le contrôleur obtenu par la conception LQR classique servira en tant que contrôleur de référence, et les signaux qui en résultent pour les angles de bras et du pendule sont dénotés par  $\theta(t)$  et  $\alpha(t)$ .

**III.4.2. Paramètres pour la conception LQR combiné avec l’arithmétique flou.**

Dans la conception classique LQR les valeurs réelles fournir directement les paramètres, mais ces valeurs ne représentent que les valeurs modales des nombres flous utilisés pour représenter les paramètres du modèle incertain dans la conception LQR combiné avec l’arithmétique flou.

Les paramètres  $p_1, p_2, p_3, \dots, p_8$  du modèle sont remplacés par les paramètres incertaines  $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{p}_3, \dots, \tilde{p}_8$  qui sont considérés comme  $n = 8$  paramétrés indépendants du modèle. Ils sont quantifiés par nombre flou quasi-gaussienne (I.34) de la forme :

$$\tilde{p}_i = gfn(\bar{x}, a_L, a_R) \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \tag{III.13}$$

**Tableau. III.2.** Les valeurs moyennes et les écarts-types des fonctions d’appartenances pour les paramètres du modèle incertain

Paramètre	$\bar{x}_i$	$\sigma_{l_i}$	$\sigma_{r_i}$	$W_i = [w_{l_i}, w_{r_i}]$
$\tilde{p}_1 = \tilde{m}_r$	0.095 kg	1% $\bar{x}_1$	10% $\bar{x}_1$	[0.0922, 0.1235]
$\tilde{p}_2 = \tilde{m}_p$	0.024 kg	10% $\bar{x}_2$	10% $\bar{x}_2$	[0.0168, 0.0312]
$\tilde{p}_3 = \tilde{L}_r$	0.085 m	30% $\bar{x}_3$	1% $\bar{x}_3$	[0.0085, 0.0876]
$\tilde{p}_4 = \tilde{L}_p$	0.129 m	10% $\bar{x}_4$	10% $\bar{x}_4$	[0.0903, 0.1677]
$\tilde{p}_5 = \tilde{B}_r$	0.0015 Nm s rad <sup>-1</sup>	10% $\bar{x}_5$	10% $\bar{x}_5$	[0,0015 ,0.0020]
$\tilde{p}_6 = \tilde{B}_p$	0.0005 Nm s rad <sup>-1</sup>	10% $\bar{x}_6$	10% $\bar{x}_6$	[4.85e - 4 , 6.5e - 4]
$\tilde{p}_7 = \tilde{k}_t$	0.042 N.m/A	1% $\bar{x}_7$	10% $\bar{x}_6$	[5.7e - 6 , 2.3e - 4]
$\tilde{p}_8 = \tilde{k}_m$	0.042 V.S/rad	1% $\bar{x}_8$	10% $\bar{x}_6$	[3.3e - 6 , 1.3e - 4]

En utilisons les paramètres  $\bar{x}_i, \sigma_{l_i}$  et  $\sigma_{r_i}$ , ainsi que les intervalles  $W_i$ , énumérés dans le tableau III.2, et intégré les paramètres flous  $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{p}_3, \dots, \tilde{p}_8$  dans la matrices  $A$  et  $B$  de II.49 et II.50, un contrôleur flou peut être atteint, après la défuzzification en appliquant III.10. Les signaux résultent pour les angles du bras et du pendule sont :  $\theta(t)$  et  $\alpha(t)$ .

**III.4.3. Paramètres supplémentaires**

Les matrices des pondérations  $Q$  et  $R$  dans les équations de la conception du contrôleur sont choisis comme :

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } R = 1;$$

Où  $Q$  désigne la matrice identité. Et  $m$  est le nombre de décomposition ( $m = 10$ ).

On va déterminer grâce à l'instruction `lqr` de Matlab le gain optimal  $K$  de la matrice de Riccati. On aura aussi les pôles du système en boucle fermé qu'on peut obtenir également avec la fonction `eig` ( $P = \text{eig}(A-B*K)$ ). On utilise `[K P] = lqr(A, B, Q, R)` avec

–  $K$  : Gain optimal de la matrice de Riccati.

–  $P$  : pôles du système en boucle fermée.

On trouve :

$$k_{classic} = [1.000 \quad -4.0577 \quad 0.8190 \quad -0.3005] \quad P_c = \begin{bmatrix} -70.0810 + 0.0000i \\ -0.95860 + 0.0000i \\ -3.99910 + 8.2729i \\ -3.99910 - 8.2729i \end{bmatrix}$$

$$k_{flou} = [1.000 \quad -4.1039 \quad 0.8284 \quad -0.2560] \quad P_{flou} = \begin{bmatrix} -461.14 + 0.0000i \\ -1.0100 + 0.0000i \\ -3.5700 + 12.9100i \\ -3.5700 - 12.9100i \end{bmatrix}$$

La méthode de transformation est appliquée dans sa forme réduite. Le temps de simulation est choisi comme  $t_{sim} = 20s$ , et le temps d'échantillonnage  $t = 0.01 s$ .

Les courbes comparatives des réponses de l'angle du bras et pendule et leurs vitesses avec la commande sont présentés dans les figure III.1 à III.5.

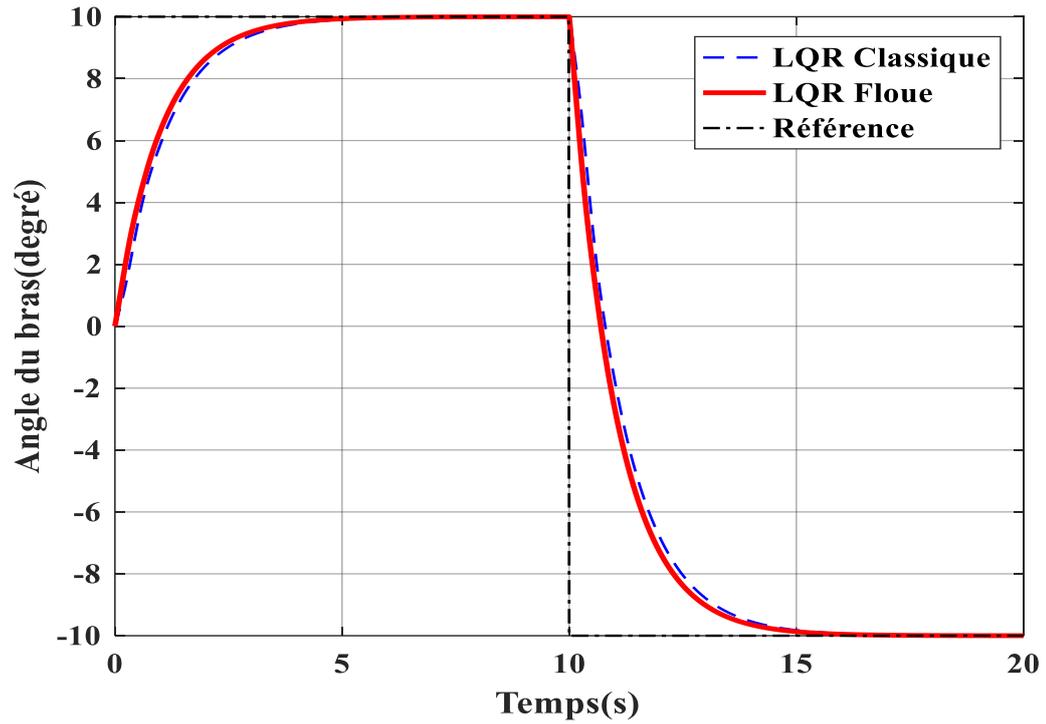


Figure.III.1. L'angle de bras  $\theta(t)$  pour les deux commandes : LQR classique et LQR flou

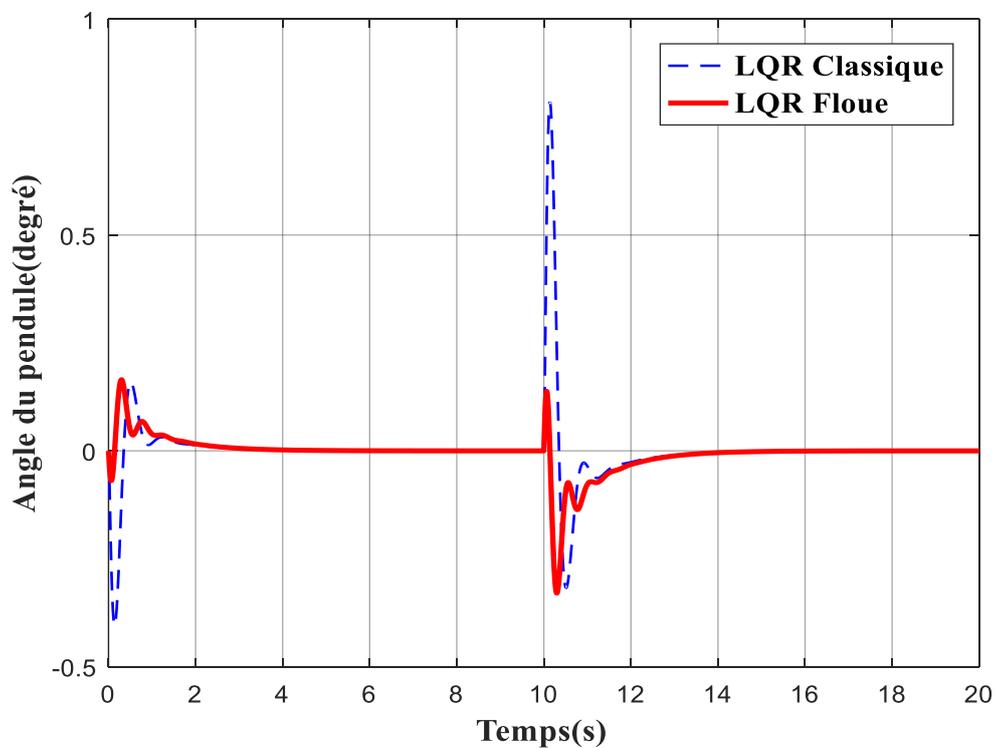
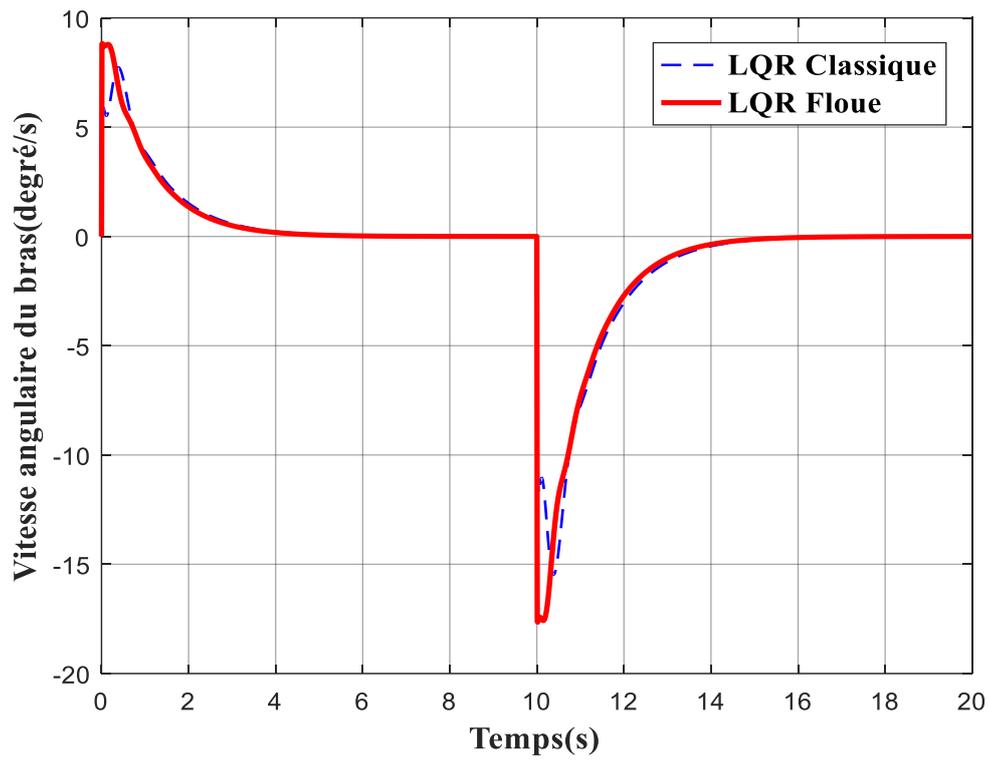
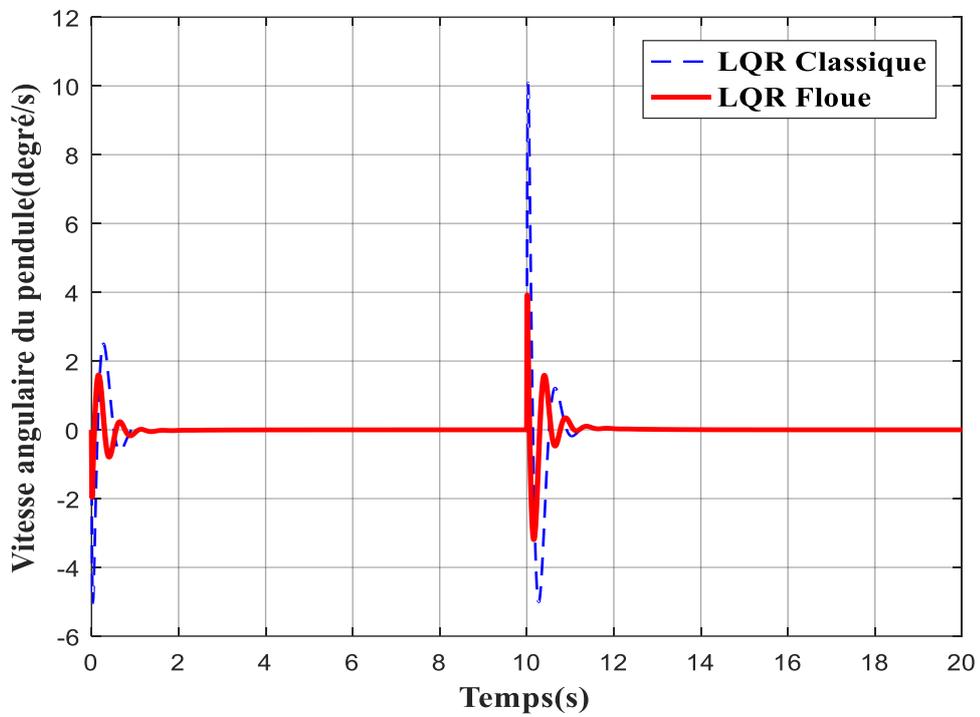


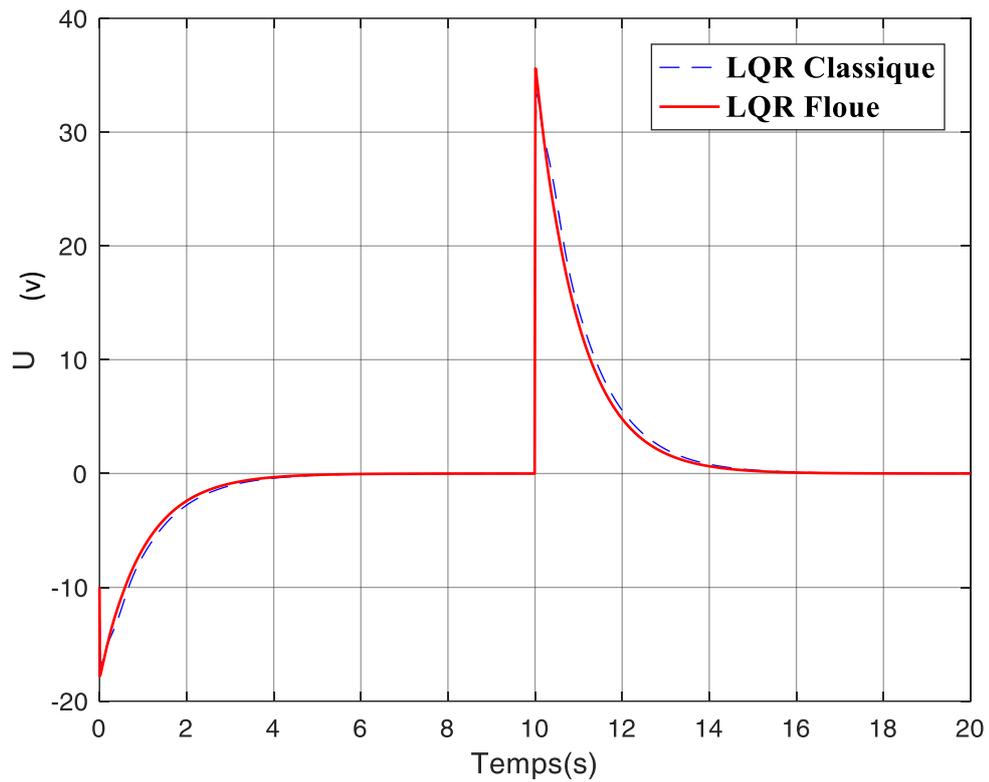
Figure. III.2. L'angle de pendule  $\alpha(t)$  pour les deux commandes : LQR classique et LQR flou



**Figure.III.3.** La vitesse angulaire de bras  $\dot{\theta}(t)$  pour les deux commandes : LQR classique et LQR flou



**Figure.III.4.** La vitesse angulaire de pendule  $\dot{\alpha}(t)$  pour les deux commandes : LQR classique et LQR flou



**Figure.III.5.** La commande appliquée au pendule.

### III.5. Interprétation des résultats

Comme on peut le voir à partir de ces courbes, le contrôleur LQR flou montre une performance mieux par rapport le contrôleur LQR classique, le bras, qui caractérisé par l'angle  $\theta(t)$  accueillant la position souhaitée dans un temps plus court.

## **CONCLUSION GENERALE**

Dans notre travail nous avons appliqués la théorie des intervalles flous pour l'identification et la commande des systèmes. Dans le premier chapitre, nous avons introduit les éléments de base de la théorie, par la suite nous avons accompli une étude détaillée sur la méthode de transformation avancée.

Après avoir modélisé le pendule inversé rotatif et atteint leur représentation sous forme d'espace d'état dans le deuxième chapitre, nous lui avons commandé par la commande linéaire quadratique et la commande par intervalles flous avec succès dans le troisième chapitre.

Les résultats de notre étude comparative entre ces commandes confirment que la commande par intervalles flous est plus performante par rapport au contrôleur LQR classique.

En perspective il serait intéressant de poursuivre ce travail en approfondissant l'application de cette technique (méthode de transformation) sur un autre système à paramètres incertains (génie mécanique, énergétique).

# BIBLIOGRAPHIE

1. Wei WU. Synthèse d'un contrôleur flou par Algorithme Génétique Application au réglage dynamique des paramètres d'un système. *thèser, l'université de Lille 1*, Décembre 1998.
2. Chevrerie, F. and Guély, F., 1998. La logique flou. *Cahier technique*, 191.
3. Dr. Mohamed assaad HAMIDA ..note cours Introduction aux Méthodes de Contrôle, *l'université de ourgla ,2014/2015*
4. L Zadeh. Fuzzy sets. *Information and control*, vol. 8 (1965), pp. 338–353.-
5. Paul-Antoine bisgambiglia, P.A., 2008. *Approche de modélisation approximative pour des systèmes à événements discrets: Application à l'étude de propagation de feux de forêt* (Doctoral dissertation, Université Pascal Paoli).
6. Hanss, M., 2005. *Applied fuzzy arithmetic*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
7. Kahla, S., 2013. *commande par intrvalle des systemes linéairs* (Doctoral dissertation, Université Larbi Tebessi de Tébessa).
8. Sandri, S., 1991. *La combinaison de l'information incertaine et ses aspects algorithmiques* (Doctoral dissertation, Toulouse 3).
9. Ourda ziane, Sur les nombres flous et ses opérations, *Mémoire de mastère, université de m'sila*
10. M.Hanss, and A.Kistner. *LQR design for systems with uncertain parameters*. In *Proc .of the 48th International Scientic Colloqium*. Ilmenau, 2003(CD-ROM).
11. Hanss, M., 1999, July. *On the implementation of fuzzy arithmetical operations for engineering problems*. In *18th International Conference of the North American Fuzzy Information Processing Society-NAFIPS* (Cat. No. 99TH8397)(pp. 462-466). IEEE.
12. Yves, B. Mécanique des solides rigides. *Notes de cours, Licence mécanique-UE201, université de Pierre et Marie curie, Septembre 2006*.
13. Bernard Beauzamy, *PDG de la Société de Calculs Mathématiques* ( février 2001)
14. Aklouche, N. Introduction aux équations de Lagrange. *Notes de cours, université Sétif, 2016*.
15. Documents Quenser. *QUBE-SERVO 2 Workbook - Student*. [www.quanser.com](http://www.quanser.com).
16. Merabti halim. *Etude des systèmes flous à intervalle, Mémoire de magistère, université de Constantine, 03/12/2008*

17. K. Zhou, J.C. Doyle, and K. Glover. *Robust and Optimal Control*. Prentice Hall, New Jersey, 1995.
18. M.Hanss and A.Klimke. *On the reliability of the inuence measure in the trasformation method of fuzzy arithmetic* .*Fuzzy Sets and Systems*,143(3) :317 390.2004.
19. Documents Généralités sur la commande des systèmes non linéaires.