

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
Université DE GHARDAIA



Faculté des : Sciences & Technologies  
Département de : Mathématiques & Informatique

## *Mémoire*

*En vue de l'obtention du diplôme de **Master** en Mathématiques*

Option :

Analyse Fonctionnelle et Applications

## Thème

---

**ÉTUDE DE L'ÉQUATION DE HELMHOLTZ EN  
PRÉSENCE D'UNE COUCHE MINCE**

---

Présenté par :

Daffaf Ansar

Soutenu le :15 /09/2020

Devant le jury composé de :

Président : *M<sup>r</sup> A.Chikh Salah*

M.C.B, Université de GHARDAIA.

Rapporteur : *M<sup>r</sup> B.MERABET*

M.C.B, Université de GHARDAIA.

Examineurs : *Mlle B.Bahaddi*

M.A.A, Université de GHARDAIA.

Année universitaire 2019/2020

---

## REMERCIEMENTS

*E*<sup>N</sup> premier lieu, nous remercions **Allah** le tout puissant. C'est grâce à lui que nous avons eu la foie et la force pour accomplir ce travail.

J'adresse ma reconnaissance à mon encadreur le Professeur **B.MERABET** pour ses précieux conseils, ses incessants encouragements et surtout sa grande disponibilité tout au long de la réalisation de ce travail.

Mes sincères remerciements s'adressent aussi à Mlle **B.Bahaddi** et M<sup>r</sup> **A.Chikh Salah** pour l'honneur d'avoir en acceptant de considérer ce travail et de faire partie du jury.

Je remercie également tout mes professeur, et collègues qui m'ont accompagné tout au long de mon parcours universitaire, je leurs adresse mes vifs remerciements.

Un grand merci à mes parents pour m'avoir donné le goût des études, pour leur amour inestimable, leur confiance, leurs sacrifices et pour leur appui sans faille. Sans oublier mes chères sœurs et frère, mes **Ahmad**, **Chaima** et **Abir** qui rendent ma vie toujours aussi belle.

---

## DÉDICACES

*JE dédie ce travail :*

*A ma mère,*

*A mon père,*

*A mon frère,*

*A mes sœurs,*

*A ma famille,*

*A tout mes proche et mes amis...*

---

# RÉSUMÉ

DANS ce mémoire, nous étudions principalement le problème de Helmholtz

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0, & x \in \Omega, & k = \frac{w}{c}; \\ \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma} = u_n, & (\text{ou } u|_{\Gamma} = u_d). \end{cases}$$

avec  $\Gamma = \partial\Omega$ . L'inconnue est  $u(x)$ , elle est à valeurs complexes et  $k = w/c$  est le nombre d'ondes. La fréquence  $f$  étant égale à  $w = 2/\pi$ .

Dans un premier temps, nous étudions ce problème dans le cas général et nous allons citer les résultats d'existence et unicité de la solution.

Dans un deuxième temps, nous nous intéressons au problème de Helmholtz par un obstacle revêtu d'une couche mince.

## Mots clés :

- Équation de Helmholtz.
- Diffraction.
- Couche mince.
- Condition aux limites.
- diffusion.

---

# ABSTRACT

I<sup>N</sup> this thesis, we mainly study the Helmholtz problem

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0, & x \in \Omega, & k = \frac{w}{c}; \\ \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma} = u_n, & (\text{ou } u|_{\Gamma} = u_d). \end{cases}$$

with  $\Gamma = \partial\Omega$ . The unknown is  $u(x)$ , it is complex valued and  $k = w/c$  is the number of waves. The frequency  $f$  being equal to  $w = 2/\pi$ .

First, we study this problem in the general case and we will cite the existence and uniqueness results of the solution.

Secondly, we are interested in the Helmholtz problem by an obstacle coated with a thin layer

## Key words :

- Helmholtz equation.
- Diffraction.
- thin layer.
- Boundary conditions.
- scattering.

---

# TABLE DES MATIÈRES

<b>Remerciements</b>	<b>i</b>
<b>Dédicaces</b>	<b>ii</b>
<b>Résumé</b>	<b>iii</b>
<b>Abstract</b>	<b>iv</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Notions Préliminaires d'analyse fonctionnelle et de géométrie différentielle</b>	<b>3</b>
<b>2 Équation de Helmholtz</b>	<b>16</b>
2.1 Description de l'équation de Helmholtz . . . . .	16
2.2 Résolution de l'équation de Helmholtz . . . . .	17
2.3 Les Fonctions sphériques de Bessel . . . . .	18
2.4 Problèmes de Dirichlet et Neumann pour une sphère . . . . .	20
2.5 Le cas d'une onde plane . . . . .	22
2.6 Le problème extérieur de l'équation de Helmholtz . . . . .	23
<b>3 Diffraction d'une onde électromagnétique par un obstacle revêtu d'une couche mince</b>	<b>30</b>
3.1 Position des deux problèmes model . . . . .	31
3.1.1 Description géométrique de la couche mince . . . . .	31
3.1.2 Présentation du problème . . . . .	32
3.2 Le problème dans un domaine tronqué . . . . .	42
3.2.1 Opérateur de Poincaré-Steklov . . . . .	42

## TABLE DES MATIÈRES

---

3.2.2	Formulation équivalente dans un domaine borné . . .	43
3.3	Le problème dans un domaine fixe . . . . .	45
3.3.1	Changement d'échelle . . . . .	45
3.3.2	Formulation équivalente dans un domaine fixe . . . .	45
3.4	Stabilité par rapport à l'épaisseur $\delta$ . . . . .	46
3.4.1	Alternative de Fredholm pour $\delta$ fixé . . . . .	47
3.4.2	Passage à la limite dans l'alternative de Fredholm . .	49
3.4.3	Théorème de stabilité . . . . .	51
	<b>Conclusion</b>	<b>57</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>59</b>

---

# INTRODUCTION

Ce mémoire est consacré à l'étude de l'équation de Helmholtz qui décrit la plupart des phénomènes de diffraction sont régis par cette équation dans un domaine  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^3$ . Plus précisément, on étudie le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0, & x \in \Omega, & k = \frac{w}{c}; \\ \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma} = u_n, & (\text{ou } u|_{\Gamma} = u_d). \end{cases} \quad (1)$$

avec  $\Gamma = \partial\Omega$ . L'inconnue est  $u(x)$ , elle est à valeurs complexes et  $k = w/c$  est le nombre d'ondes. La fréquence  $f$  étant égale à  $w = 2/\pi$ .

Ce problème a été étudiée par de nombreux auteurs depuis plus d'une centaine d'années.

Dans ce mémoire, le travail que nous présentons porte sur le problème de Helmholtz. L'étude que nous présentons est divisé en deux problèmes :

- Une étude générale du problème de Helmholtz.
- Clarification des travaux de Bendali-Lemrabet[3].

Nous nous intéressons à la reprise avec plus de détails des travaux de Bendali-Lemrabet[3], de contribuer à expliquer et analyser ces travaux, qui étudie la diffraction d'une onde électromagnétique par un obstacle revêtu d'une couche mince.

L'idée a été introduite dans les années quarante par shukin-léontovitch [13]. Historiquement, cette idée fut utilisée pour la première fois sous la

forme d'une relation qui lie les composantes tangentielles des champs électrique  $\mathbf{E}$  et magnétique  $\mathbf{H}$  sur la frontière  $\Gamma$ , et "**le nombre d'impédance**" équivalente de "**la couche mince**". Elle a été ensuite appliquée par de très nombreux auteurs parmi lesquels nous citons [[23], [20], [10], [5], [3] ]. Ces conditions aux limites approchées conduisent à des problèmes aux limites non-standards, où elles sont exprimées par des opérateurs différentiels sur  $\Gamma$  d'ordres supérieurs à celui de l'opérateur intérieur. Ce type de conditions aux limites est appelé conditions de Ventcel état dans la littérature [12].

Cependant, l'idée d'introduire de nouvelles conditions aux limites pour approcher l'effet des couches minces a fait l'objet de plusieurs études principalement en électromagnétisme où cette méthode a été appliquée pour approcher le problème de diffraction d'une onde électromagnétique par un obstacle conducteur revêtu d'une couche mince.

Nous avons organisé notre mémoire de la façon suivante :

Dans **le premier chapitre** nous réunissons les éléments d'analyse fonctionnelle et de géométrie différentielle qui se rapportent à l'étude des équations de Helmholtz en présence d'une couche mince.

Dans **le deuxième chapitre** nous présentons les équations de Helmholtz et citons les résultats d'existence, d'unicité et de régularité de la solution d'un problème modèle.

Finalement, **le troisième chapitre** est principalement basée sur la reprise en détails des travaux de Bendali-Lemrabet [3] qui étudie un problème mathématique basé sur l'équation de Helmholtz par un obstacle revêtu d'une couche mince avec une condition de Neumann ou Dirichlet sur le bord et une condition de radiation à l'infini, nous donnons un résultat d'existence et d'unicité de la solution et nous présentons l'opérateur de Poincare-Steklov dans le but de reformuler le problème dans un domaine borné, et un changement d'échelle permet d'écrire la formulation variationnelle dans un domaine fixe. On donne ensuite l'étude de la stabilité de la solution relativement au petit paramètre  $\delta$ .

---

---

# CHAPITRE 1

---

## NOTIONS PRÉLIMINAIRES D'ANALYSE FONCTIONNELLE ET DE GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE

DANS ce chapitre, nous rappelons quelques notions utiles de l'analyse fonctionnelle et de géométrie différentielle que nous allons utiliser dans la suite de ce mémoire, pour cela à on se réfère [6] , [19], [15].

### Analyse fonctionnelle

**Espaces**  $L^p(\Omega), 1 \leq p \leq \infty$

Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$  :

**Définition 1.1.**

On désigne par  $L^1(\Omega)$  l'espace des fonctions intégrables sur  $\Omega$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . On pose

$$\|f\|_{L^1} = \int_{\Omega} |f(x)| dx$$

**Définition 1.2.**

Soit  $p \in \mathbb{R}$  avec  $1 \leq p \leq \infty$  ; On pose

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}; f \text{ mesurable et } |f|^p \in L^1(\Omega)\}.$$

On note

$$\|f\|_{L^p} = \left[ \int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}}.$$

$\|\cdot\|_{L^p}$  est une norme sur  $L^p(\Omega)$  et cet espace est de Banach.

## Espaces de Sobolev $W^{p,m}$

Les espaces de Sobolev sont les espaces " naturels " des solutions des équations aux dérivées partielles. On les appelle aussi espaces d'énergie car ils s'interprètent naturellement comme des espaces de fonctions d'énergie bornée. Nous rappellerons ici les définitions et les résultats qui seront utilisés par la suite.

### Définition 1.3 (Fonctions testes).

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . On appelle l'ensemble des fonctions à support compact inclus dans  $\Omega$  et indéfiniment dérivables dans  $\Omega$ , les fonctions testes. Cet ensemble est noté  $D(\Omega)$  ou  $C_c^\infty(\Omega)$ .

### Définition 1.4.

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et soit  $p \in \mathbb{R}$  avec  $1 \leq p \leq \infty$ .

L'espace de Sobolev  $W^{1,p}(\Omega)$  est défini par

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \left| \begin{array}{l} \exists g_1, g_2, \dots, g_N \in L^p(\Omega) \text{ tels que} \\ \int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = - \int_{\Omega} g_i \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \quad \forall i \in \mathbb{N}^* \end{array} \right. \right\}$$

On pose

$$W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega)$$

Pour  $u \in W^{1,2}(\Omega)$ , on note

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = g_i \quad \text{et} \quad \nabla u = \left( \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right) = \text{grad } u$$

L'espace  $W^{1,p}(\Omega)$  est muni de la norme

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \left[ \|u\|_{L^p}^p + \sum_{i=1}^{i=n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p}^p \right]^{\frac{1}{p}} \quad \text{si } 1 \leq p < \infty$$

L'espace  $H^1(\Omega)$  est muni du produit scalaire

$$(u, v)_{H^1} = (u, v)_{L^2} + \sum_{i=1}^{i=n} \left( \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{L^2}$$

La norme associée est :

$$\|u\|_{H^1} = \left[ \|u\|_{L^2}^2 + \sum_{i=1}^{i=n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2}^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

**Définition 1.5.**

Soit  $m \leq 2$  un entier et soit  $p$  un réel avec  $1 \leq p \leq \infty$ . On définit par récurrence

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ u : \Omega \mapsto \mathbb{R} \mid u \in W^{m-1,p}(\Omega) \text{ et } \frac{\partial u}{\partial x_i} \in W^{m-1,p}(\Omega), \ 0 \leq i \leq n \right\}$$

Il revient au même d'introduire

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \left| \begin{array}{l} \forall |\alpha| \leq m \exists g_\alpha \in L^p(\Omega) \text{ tels que} \\ \int u D^\alpha \varphi = (-1)^\alpha \int g_\alpha \varphi \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \end{array} \right. \right\}$$

avec :  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ ;  $|\alpha| = \sum_{i=1}^m \alpha_i, \ \alpha_i \geq 0$ ;

On note  $g_\alpha = D^\alpha u$ .

L'espace  $W^{m,p}(\Omega)$  muni de la norme

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}^m = \sum_{0 \leq \alpha \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p}^m$$

est un espace de Banach.

On pose  $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$ ;  $H^m(\Omega)$  muni du produit scalaire

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = (u, v)_{L^2} + \sum_{0 \leq \alpha \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2};$$

est un espace de Hilbert.

**Proposition 1.1.**

L'espace  $W^{1,p}(\Omega)$  est un espace de Banach pour  $1 \leq p \leq \infty$ .

L'espace  $W^{1,p}(\Omega)$  est réflexif pour  $1 < p < \infty$  et séparable pour  $1 \leq p < \infty$

L'espace  $H^1(\Omega)$  est un espace de Hilbert séparable.

**Définition 1.6** (L'espace  $W_0^{1,p}(\Omega)$ ).

Étant donné  $1 \leq p < \infty$ , on désigne par  $W_0^{1,p}(\Omega)$  la fermeture de  $C_c^1(\Omega)$  dans  $W^{1,p}(\Omega)$ .

On note

$$H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$$

L'espace  $W_0^{1,p}(\Omega)$  est muni de la norme induite par celle de  $W^{1,p}(\Omega)$ ; l'espace  $H_0^1(\Omega)$  est muni produit scalaire induit par celui de  $H^1(\Omega)$ .

L'espace  $W_0^{1,p}(\Omega)$  est un espace de Banach séparable; il est de plus réflexif pour  $1 < p < \infty$ . L'espace  $H_0^1(\Omega)$  est un espace de Hilbert séparable.

**Théorème 1.1** (des traces).

Soit  $\Omega$  un ouvert borné régulier de classe  $C^1$  ; ou bien  $\Omega = \mathbb{R}_+^n$  : On définit l'application trace linéaire continue  $\gamma_0$  par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_0 : H^1(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega}) \longrightarrow L^2(\partial\Omega) \cap C^1(\overline{\partial\Omega}) \\ u \longmapsto \gamma_0(u) = u|_{\partial\Omega} \end{array} \right.$$

Cette application  $\gamma_0$  se prolonge par continuité en une application linéaire continue de  $H^1(\Omega)$  dans  $L^2(\partial\Omega)$  ; noté encore  $\gamma_0$ .

**Théorème 1.2** (Formule de Green).

Soit  $\Omega$  un ouvert borné régulier. Si  $u$  et  $v$  sont des fonctions de  $H^1(\Omega)$ , elles vérifient

$$\int_{\Omega} u \Delta v = \int_{\partial\Omega} v(x) \frac{\partial u}{\partial \eta} - \int_{\Omega} \nabla u \nabla v.$$

où :  $\eta$  est le vecteur normale à  $\Omega$ .

**Définition 1.7.**

Soit  $H$  un espace de Hilbert.

On dit qu'une forme bilinéaire  $a(u, v) : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$  est :

1. **continue** s'il existe une constante  $C$  telle que

$$|a(u, v)| \leq C \|u\|_H \|v\|_H \quad \forall u, v \in H,$$

2. **coercive** s'il existe une constante  $\alpha > 0$  telle que

$$|a(v, v)| \geq \alpha \|v\|^2.$$

**Théorème 1.3** (Lax-Milgram).

Soit  $H$  un espace de Hilbert et  $a(., .)$  une forme bilinéaire, continue et coercive et  $\varphi$  une forme linéaire continue sur  $H$  : Alors pour tout  $v \in H$  il existe  $u \in H$  unique tel que

$$a(u, v) = \langle \varphi, v \rangle$$

De plus, si  $a$  est symétrique, alors  $u$  est caractérisé par la propriété

$$u \in H \text{ et } \frac{1}{2} a(u, u) - \langle \varphi, u \rangle = \min_{v \in H} \left\{ \frac{1}{2} a(u, v) - \langle \varphi, v \rangle \right\}.$$

**Proposition 1.2** (Inégalité de Poincaré).

On suppose que  $\Omega$  est un ouvert borné. Alors il existe une constante  $C$  (dépendant de  $\Omega$ ) telle que

$$\|u\|_{W^{1,p}} \leq C \|\nabla u\|_{L^p}, \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega) (1 \leq p < \infty).$$

En particulier l'expression  $\|\nabla u\|_{L^p}$  est une norme sur  $W_0^{1,p}(\Omega)$  qui est équivalente à la norme  $\|u\|_{W^{1,p}}$ .

## Alternative de Fredholm

**Définition 1.8** (Opérateur compact).

Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels normés, On dit qu'un opérateur  $T \in L(E; F)$  est compact si  $T(B_E)$  est relativement compact pour la topologie forte dans  $F$ , avec  $B_E$  est la boule unité fermé dans  $E$ . On désigne par  $K(E, F)$  l'ensemble des opérateurs compacts et on pose  $K(E) = K(E, E)$ .

**Théorème 1.4.**

Soit  $T \in K(E)$  alors :

1.  $\text{Ker}(I - T)$  est de dimension finie,
2.  $\text{Im}(I - T)$  est fermé, et plus précisément  $\text{Im}(I - T) = \text{Ker}(I - T^*)^\perp$
3.  $\text{Ker}(I - T) = 0 \Leftrightarrow \text{Im}(I - T) = E$
4.  $\dim(\text{ker}(I - T)) = \dim(\text{ker}(I - T^*))$

**Interprétation** : On cherche à résoudre  $u - Tu = f$ . On a alors l'alternative :

1. Ou bien  $\forall f \in E$  on a une solution unique. (C'est le point 3 du théorème)
2. Ou bien l'équation homogène admet  $n$  solutions indépendantes et on ne peut résoudre l'équation complète qu'avec  $n$  conditions d'orthogonalité sur  $f$ . (C'est les points 1,2 et 4 du théorème)

## Polynômes de Legendre

Les polynômes  $P_n$  apparaissant dans le développement en série de Taylor de la fonction analytique,

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2tr + r^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t)r^n$$

S'appellent les polynômes de Legendre et ils vérifient :

1. La relation de récurrence  $(n + 1)P_{n+1} - (2n + 1)tP_n + nP_{n-1} = 0$ .
2. L'équation différentielle de Legendre  $(1 - t^2)P_n''(t) - 2tP_n'(t) + nP_{n-1}(t) = 0$ .
3. Ainsi que la relation d'orthogonalité  $\int_{-1}^1 P_n P_m dt = \frac{2}{2n+1} \delta_{nm}$ .
4. Ils sont donnés par la formule de Rodriguez  $P_n(t) = \frac{2^n}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n$ .
5. mais en plus ils forment une base complète de l'espace de Hilbert  $\mathbb{L}^2[-1, 1]$ .

## Expression du laplacien en coordonnées sphériques

Nous allons besoin de travailler dans le système des coordonnées sphériques où  $r$  est une variable explicite et  $(\theta, \varphi)$  deux angles (Voir Fig 1.1)

$$\begin{cases} x_1 = r \sin \theta \cos \varphi, \\ x_2 = r \sin \theta \sin \varphi, \\ x_3 = r \cos \theta. \end{cases}$$

avec ce changement de variable, on a l'expression du laplacien dans les coordonnées sphériques :

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

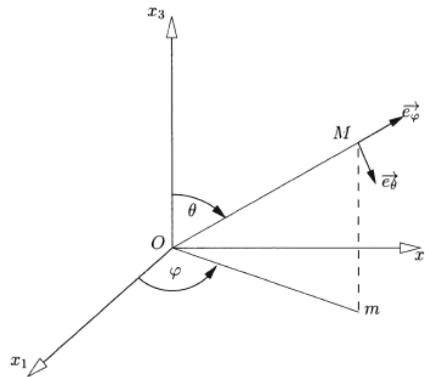


FIGURE 1.1 – Les coordonnées sphériques

## Fonction de Bessel

### Définition 1.9.

Les fonctions de Bessel, découvertes par le mathématicien suisse Daniel Bernoulli, portent le nom de Friedrich Bessel, et sont des solutions  $y$  de l'équation différentielle de Bessel :

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - n^2) y = 0$$

pour tout nombre réel ou complexe  $n$ . Le cas le plus commun est quand  $n$  est un nombre naturel, et il est alors nommé l'ordre de la fonction.

## Expression des fonctions de Bessel

Les fonctions de Bessel de première espèce  $J_n$  sont définies par :

$$J_n(x) = (x/2)^n \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2^{2p} p! (n+p)!} x^{2p}$$

Les fonctions de Bessel de deuxième espèce ou fonctions de Neumann sont définies par :

$$Y_n(x) = \lim_{\lambda \rightarrow n} \frac{J_\lambda(x) \cos(\lambda\pi) - J_{-\lambda}(x)}{\sin(\lambda\pi)}$$

**Proposition 1.3.**

1. *Relations de récurrence :*

$$J_{n+1}(x) = \frac{nJ_n(x)}{x} - J'_n(x)$$

$$J_{n+1}(x) + J_{n-1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x)$$

$$J_{n+1}(x) - J_{n-1}(x) = -2J'_n(x),$$

2. *On en déduit :*

$$J_1(x) = -J'_0(x);$$

$$\frac{d}{dx}(x^n J_n(x)) = x^n J_{n-1}(x);$$

3. *Orthogonalité :*

$\lambda_i$  et  $\lambda_j$  étant deux zéros distincts de  $J_n$ , on a :

$$\int_0^1 x J_n(\lambda_i x) J_n(\lambda_j x) dx = 0$$

**Harmoniques sphériques**

L'objet de cette section est la définition des Harmoniques sphériques qui jouent un rôle important avec les Fonctions sphériques de Bessel dans la résolution du problème de Helmholtz.

**Définition 1.10.**

*Les harmoniques sphériques sont des fonctions harmoniques particulières. À titre de rappel, une fonction est dite harmonique lorsque son laplacien est nul. Les harmoniques sphériques sont particulièrement utiles pour résoudre des problèmes invariants par rotation, car elles sont les fonctions propres de certains opérateurs liés aux rotations.*

**Définition 1.11.**

Les fonctions sur la sphère obtenues par restriction de polynômes homogènes harmoniques sont des harmoniques sphériques.

**Expression des harmoniques sphériques**

On obtient alors l'expression inscrite plus bas. Une manière simple de retenir cette expression est la suivante :

$$Y_\ell^0 = P_\ell(\cos \theta) \sqrt{\frac{2\ell + 1}{4\pi}},$$

Où  $P_\ell(x)$  est le polynôme de Legendre de degré  $\ell$ .

On obtient ensuite :

$$J_+ Y_\ell^m = \sqrt{(\ell^2 - m^2) + (\ell - m)} Y_\ell^{m+1}$$

où

$$J_+ = e^{i\varphi} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{i}{\tan \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)$$

est l'opérateur « **d'échelle montante** ».

Pour  $m$  négatif,  $Y_\ell^m = (-1)^m \cdot Y_\ell^{-m}$

**Proposition 1.4.**

1. Les harmoniques sphériques forment une base orthogonale sur la sphère unité, toute fonction continue  $f(\theta, \varphi)$  se décompose en une série d'harmoniques sphériques :

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{+l} C_\ell^m Y_\ell^m(\theta, \varphi)$$

où  $\ell$  et  $m$  sont des indices entiers,  $C_\ell^m$  est un coefficient constant et souvent en mathématiques prend le nom de coefficient de Fourier généralisé relativement à cette base.

2. Le développement en harmoniques sphériques est l'équivalent, appliqué aux fonctions angulaires, du développement en séries de Fourier pour les fonctions périodiques.
3.  $Y_\ell^m$  est la partie réelle d'une fonction complexe  $\underline{Y}_\ell^m$

$$Y_\ell^m(\theta, \varphi) = \text{Re} \left( \underline{Y}_\ell^m(\theta, \varphi) \right)$$

$\underline{Y}_\ell^m$  est appelée « **fonction associée de Legendre** » et est définie par :

$$\underline{Y}_\ell^m(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2(\ell - m)!}{(\ell + m)!}} P_\ell^m(\cos \theta) e^{im\varphi}$$

où  $P_\ell^m$  est le polynôme de Legendre :

$$P_\ell^m(X) = \frac{(-1)^m}{2^\ell \ell!} (1 - X^2)^{m/2} \cdot \frac{\partial^{m+\ell}}{\partial X^{m+\ell}} [(X^2 - 1)^\ell]$$

On a donc

$$Y_\ell^m(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2(\ell - m)!}{(\ell + m)!}} P_\ell^m(\cos \theta) \cos(m\varphi)$$

## Fonction de Hankel

### Définition 1.12.

Les fonctions de Hankel, notées  $H_n^{(1)}(x)$  et  $H_n^{(2)}(x)$ , sont des fonctions spéciales de la physique mathématique. Ce sont les solutions linéairement indépendantes de l'équation de Bessel :

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - n^2) y = 0$$

où  $n$  est un nombre arbitraire réel ou complexe. Dans le cas où  $n$  est un entier, on le note alors généralement par  $n$  dans l'équation de Bessel, et il est dénommé ordre. Fonction de Hankel du premier type :

$$H_n^{(1)}(x) = J_n(x) + iY_n(x)$$

Fonction de Hankel du deuxième type

$$H_n^{(2)}(x) = J_n(x) - iY_n(x)$$

La présence de  $i$  montre qu'il s'agit de solutions complexes. Les fonctions de Hankel sont des combinaisons linéaires des 2 autres solutions de l'équation de Bessel que sont  $J_n(x)$  et  $Y_n(x)$ , dites fonctions de Bessel de première et deuxième espèce. Les fonctions de Hankel sont par conséquent aussi nommées Fonctions de Bessel de troisième espèce.

### Proposition 1.5.

1. *Expression en fonction des Bessels de première espèce :*

$$H_n^{(1)}(x) = \frac{J_{-n}(x) - e^{-n\pi i} J_n(x)}{i \sin(n\pi)}$$

$$H_n^{(2)}(x) = \frac{J_{-n}(x) - e^{n\pi i} J_n(x)}{-i \sin(n\pi)}$$

2. *Relation sur  $n$  :*

$$H_{-n}^{(1)}(x) = e^{n\pi i} H_n^{(1)}(x)$$

$$H_{-n}^{(2)}(x) = e^{-n\pi i} H_n^{(2)}(x)$$

### Compacité locale de Rellich

Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$ , alors on a le lemme de compacité locale de Rellich suivant, [24]

**Lemme 1.1** (Rellich).

*Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$ . L'injection canonique  $H_0^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$  est compacte. En imposant des conditions de régularité sur  $\Omega$ , l'injection canonique  $H^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$  est également compacte (on dit que toute suite bornée de  $H^1(\Omega)$  on peut extraire une sous-suite convergente dans  $L^2(\Omega)$  )*

### Espace $L^p(a, b; X)$

Soient  $X$  un espace de Banach et  $]a; b[$  un ouvert de  $\mathbb{R}$ . On désigne par  $\|\cdot\|_X$  la norme dans  $X$ .

### Définition 1.13.

*On désigne par  $L^p(a, b; X)$  où  $(0 < p < \infty)$  l'espace des classes de fonctions mesurables de  $]a; b[$  dans  $X$  telles que :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \|f\|_{L^p(a,b;X)} = \left[ \int_{(a,b)} \|f(t)\|_X^p dt \right]^{\frac{1}{p}} < \infty \quad \text{pour } p < \infty. \\ \|f\|_{L^p(a,b;X)} = \sup \|f(t)\|_X < \infty \quad \text{pour } p = \infty. \end{array} \right.$$

*Pour  $(0 \leq p \leq \infty)$ ,  $L^p(a, b; X)$  est un espace de Banach.*

## Distributions vectorielles

### Définition 1.14.

On appelle espace des distributions vectorielles de  $]a; b[$  à valeurs dans un espace de Banach  $X$  et on note  $\mathcal{D}'(]a, b[; X)$  l'espace des applications linéaires continues de  $\mathcal{D}(]a, b[$  à valeurs dans  $X$  et on note

$$\mathcal{D}'(]a, b[; X) = \mathcal{L}(\mathcal{D}(]a, b[; X))$$

### Définition 1.15.

Soit  $f \in \mathcal{D}'(]a, b[; X)$  et soit  $m$  un entier naturel. Alors, l'application

$$\varphi \longrightarrow (-1)^m f \left[ \frac{d\varphi}{dt^m} \right], \varphi \in \mathcal{D}(]a, b[)$$

est une distribution que l'on note  $\frac{d^m \varphi}{dt^m}$ .

### Espace $W(a, b; V, V')$

On considère deux espaces de Hilbert réels séparables. On note  $(;)$  le produit scalaire et  $\|\cdot\|$  la norme dans  $V$  et  $(,)$ ,  $|\cdot|$  les notions correspondantes dans  $H$

En outre, on suppose que  $V$  est dense dans  $H$  si bien qu'en identifiant  $H$  et son dual  $H'$ , on a

$$V \hookrightarrow H \hookrightarrow V'$$

chaque espace étant dense dans le suivant.

### Définition 1.16.

Soient  $a; b \in \overline{\mathbb{R}}$ . On désigne par  $W(a, b; V, V')$  l'espace

$$W(a, b; V, V') = \left\{ u \in L^2(a, b; V), u' \in L^2(a, b; V') \right\}$$

### Proposition 1.6.

L'espace  $W(a, b; V, V')$  muni de la norme

$$\|u\|_W = \left( \|u\|_{L^2(a, b; V)}^2 + \|u'\|_{L^2(a, b; V')}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

est un espace de Hilbert.

### Remarque 1.1.

$H^1(0, 1; L^2(\Gamma))$  est l'espace des distributions vectorielles.

## Géométrie différentielle

### Carte locale

Soit  $M$  un espace Topologique.

#### Définition 1.17.

Soit  $M$  une sous-variété de classe  $C^k$  et de dimension  $n$  de  $M$ . Une carte locale de  $M$  est un couple  $(U, \psi)$  formé est définie pour tout  $P \in U$  par :

1.  $U \subset M$  ouvert.
2.  $\psi$  homéomorphisme  $\psi : U \longrightarrow \psi(U)$ .

$U$  est le domaine de la carte  $U, \psi$  pour :

$$\psi(P) = (x^1(P), x^2(P), \dots, x^n(P))$$

où  $(x^1, x^2, \dots, x^n)$  est dit la fonction coordonnées de la carte  $(U, \psi)$

### Eléments de géométrie dans $\mathbb{R}^3$

Soit un ouvert  $\Omega_\infty$  de  $\mathbb{R}^3$  tel que  $\Omega_\infty^c$  est un compacte,  $\overline{\Omega}_\infty$  de frontière  $\Gamma$  de classe  $C^\infty$  et  $\delta > 0$  un paramètre destiné à tendre vers 0 : On note  $\Omega_i = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}_\infty$  de frontière  $\Gamma$  et

$$\Omega_\delta^+ = \{x \in \Omega_i | d(x, \Gamma) < \delta\}.$$

Nous introduisons une paramétrisation locale du domaine  $\Omega_\delta^+$

$$x \in \Omega_\delta^+ \longrightarrow (m, s) \in \Gamma \times [0, \delta] \text{ telle que } x = x_\Gamma + sn(m)$$

Où  $m$  est caractérisé par

$$|x - m| = \underbrace{\min}_{y \in \Gamma} |x - y|$$

#### Définition 1.18 (Plan tangent).

Pour tout  $m \in \Gamma$  on note  $T_m$  le plan tangent à  $\Gamma$  au point  $m$  qui n'est autre que le plan passant par  $m$  et orthogonal à  $n(m)$

#### Définition 1.19 (Base covariante).

Soit  $\sigma(\sigma^1, \sigma^2) \longrightarrow m \in \Gamma$  une paramétrisation d'un voisinage de  $m_0$  ou  $\sigma \in O$  un ouvert  $\mathbb{R}^2$  : On définit la base covariante  $(\tau_\alpha)_{\alpha=1,2}$  du plan  $T_m$  par

$$\tau_\alpha = \partial_{\sigma^\alpha} m$$

**Définition 1.20** ( Base contravariante).

La base contravariante (ou duale)  $(\tau^\alpha)_{\alpha=0.1}$  est définie par

$$\tau^\alpha \cdot \tau_\beta = \delta_\alpha^\beta \quad \text{pour} \quad \beta = 1.2 \quad \text{et} \quad \tau^\alpha \cdot n = 0$$

où  $\delta_\alpha^\beta$  désigne le symbole de Kronecker.

## Opérateurs différentiels sur $\Gamma$

### Gradient tangentiel $\nabla_\Gamma$

Le gradient tangentiel d'une fonction  $u \in \mathcal{D}(\Gamma)$  est défini dans la carte locale  $(U, \psi)$  par le champs de vecteurs tangents à  $\Gamma$  suivant :

$$\nabla_\Gamma u = \frac{\partial u \circ \psi}{\partial \sigma^\alpha}$$

### Laplacien tangentiels $\Delta_\Gamma$

Le laplacien tangentiel  $\Delta_\Gamma u$  d'une fonction scalaire  $u \in \mathcal{D}(\Gamma)$ , est défini par la relation

$$\int_\Gamma \Delta_\Gamma u \cdot \Phi d\Gamma = - \int_\Gamma \nabla_\Gamma u \cdot \nabla_\Gamma \Phi d\Gamma, \quad \forall \Phi \in \mathcal{D}(\Gamma).$$

### Divergence tangentiels $div_\Gamma$

La divergence tangentiels  $div_\Gamma$  d'un champ de vecteurs tangents à  $\Gamma$ ,  $q \in \mathcal{D}(\Gamma, T(\Gamma))$ , ( $T(\Gamma) = \cup T_m(\Gamma)$  est le fibré tangent à  $\Gamma$ ), est définie à travers la relation intégrale suivante

$$\int_\Gamma div_\Gamma q \cdot \Phi d\Gamma = - \int_\Gamma q \cdot \nabla_\Gamma \Phi d\Gamma, \quad \forall \Phi \in \mathcal{D}(\Gamma).$$

**Définition 1.21** (L'opérateur gradient surfacique).

Soit  $v$  une fonction scalaire définie sur  $\Gamma$  ; on introduit le prolongement  $\hat{v}$  sur  $\Omega_\delta^+$  satisfaisant :

$$\hat{v}(x) = v(m)$$

L'opérateur  $\nabla_\Gamma$  peut alors être défini par

$$(\nabla \hat{v})(m, 0) = (\nabla_\Gamma v)(m), \quad m \in \Gamma$$

C'est un opérateur tangentiel dont l'expression en fonction de la base contravariante de  $T_m$  s'écrit (localement)

$$\nabla_\Gamma v = \partial_{\sigma^\alpha} v \tau^\alpha$$

---

---

## CHAPITRE 2

---

# ÉQUATION DE HELMHOLTZ

Nous allons présenter dans ce chapitre l'équation de Helmholtz et nous allons citer les résultats d'existence et unicité de la solution de cette équation ; Le lecteur pourra se référer à [16] pour tous les détails.

### 2.1 Description de l'équation de Helmholtz

L'équation des ondes acoustiques dans un milieu homogène, modélisant la propagation du son dans l'air, s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} \rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla p & = 0, \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} u & = 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

où  $\rho_0$  est la densité moyenne,  $c$  est la vitesse du son dans le milieu,  $u$  est le vecteur vitesse de déplacement du milieu et  $p$  une quantité scalaire, elle représente la pression supposée isotrope. En éliminant le déplacement  $u$  dans (2.1), nous obtenons un équation des ondes scalaire pour la pression  $p$  :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - c^2 \Delta p = 0, \quad x \in \Omega \quad (2.2)$$

Afin de régler le problème, nous devons spécifier le domaine  $\Omega$  dans lequel nous voulons résoudre notre équation, et nous donnons des conditions aux limites.

Le domaine sera soit **un domaine intérieur** noté  $\Omega$  ou  $\Omega_i$  ou son complémentaire  $\Omega_e$ , que nous appellerons **un domaine extérieur**. Les deux domaines sont contenus dans  $\mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{R}^3$ , et leur frontière commune  $\Gamma$  est

une courbe régulière bornée ou une surface régulière. L'unité normale  $\eta$  à  $\Gamma$  est définie comme extérieure à  $\Omega_i$ .

Les deux conditions aux limites classiques sont le problème de Dirichlet pour lequel la condition sur le bord est :

$$p = 0 \quad \text{sur } \Gamma \quad (2.3)$$

et le problème de Neumann pour lequel la condition sur le bord est :

$$\frac{\partial p}{\partial \eta} = 0 \quad \text{sur } \Gamma \quad (2.4)$$

L'équation(2.2) est de type hyperbolique. Nous cherchons des solutions harmoniques de l'équation (2.2) de la forme :

$$p(t, x) = \text{Re}(u(x)e^{-i\omega t})$$

où  $\omega$  est la pulsation de l'onde.

La fonction  $u$  a maintenant des valeurs complexes. Notons  $u_d$  la donnée de Dirichlet et  $u_n$  la donnée de Neumann, l'équation (2.2) devient

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0, & x \in \Omega, & k = \frac{\omega}{c}; \\ \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma} = u_n, & (\text{ou } u|_{\Gamma} = u_d). \end{cases} \quad (2.5)$$

L'inconnue est  $u(x)$ , elle est à valeurs complexes et  $k = \omega/c$  est le nombre d'ondes. La fréquence  $f$  étant égale à  $\omega = 2/\pi$ . Ce Problème est **le Problème de Helmholtz**.

## 2.2 Résolution de l'équation de Helmholtz

Les problèmes de Helmholtz intérieur et extérieur sont de nature très différentes. Dans le cas d'un **problème intérieur** l'opérateur  $(-\Delta)$  est auto-adjoint à résolvante compacte dans l'espace  $L^2(\Omega)$ , nous pouvons limiter notre attention aux solutions réelles sans perte de généralité. Les deux problèmes modèle sont les problèmes de Dirichlet et de Neumann

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0, & x \in \Omega_i, \\ u = u_d & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (2.6)$$

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0, & x \in \Omega_i, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = u_n & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (2.7)$$

**L'alternative de Fredholm** montre que chaque'un des deux problèmes a une solution unique, sauf lorsque  $k^2$  est une valeur propre de l'opérateur associé pour les conditions limite de Dirichlet ou de Neumann.

Dans le cas du **problème extérieur** l'opérateur  $(-\Delta)$  n'est pas auto-adjoint ni à inverse compact, nous recherchons des solutions à valeurs complexes. Il faut préciser le comportement à l'infini et notamment imposer la condition de rayonnement.

Les deux équations du modèle sont les problèmes de Dirichlet et de Neumann

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0, & x \in \Omega_e, \\ u = u_d \text{ sur } \Gamma. \end{cases} \quad (2.8)$$

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0, & x \in \Omega_e, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = u_n \text{ sur } \Gamma \end{cases} \quad (2.9)$$

Dans les deux cas, les conditions à l'infini sont ( $c$  est une constante fixe)

$$\begin{cases} |u| \leq \frac{c}{r}, & r \text{ grande}, \\ |\nabla u| \leq \frac{c}{r}, \end{cases} \quad (2.10)$$

auxquelles on ajoute la condition de rayonnement ( la condition de Sommerfeld), elle exprime le fait que l'on s'intéresse à la solution physique. C'est une condition d'onde sortante à l'infini, compte tenu du fait que nous cherchons des solutions dont la dépendance temporelle est en  $e^{-i\omega t}$ .

$$\left| \frac{\partial u}{\partial r} - iku \right| \leq \frac{c}{r^2}. \quad (2.11)$$

Notons que cette dernière condition implique que les solutions sont à valeurs complexes, même si  $k^2$  soit réel.

Nous étudions maintenant, le cas où le domaine est l'intérieur ou l'extérieur de la sphère unité.

## 2.3 Les Fonctions sphériques de Bessel

Dans le cas d'une sphère, on peut résoudre explicitement les problèmes intérieurs et extérieurs de Helmholtz. La solution est exprimée comme une

somme des solutions à variables séparées de  $(r)$  d'un côté, et de  $(\theta, \varphi)$  de l'autre côté. Nous recherchons des solutions sous la forme

$$v_\ell^m(r, \theta, \varphi) = h_\ell(kr)Y_\ell^m(\theta, \varphi) \quad (2.12)$$

où  $Y_\ell^m$  est une harmonique sphérique d'ordre  $\ell$ . Nous utilisons l'expression du laplacien en coordonnées sphériques et les propriétés des harmoniques sphériques pour obtenir une équation pour la fonction  $h_\ell(r)$  qui est indépendante de l'indice  $m$ . C'est l'**équation de Bessel sphérique**

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{dh_\ell(r)}{dr} + \left(1 - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\right) h_\ell(r) = 0, \quad r > 0. \quad (2.13)$$

L'équation sphérique de Bessel prend la forme

$$\frac{d^2}{dr^2} h_\ell(r) + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} h_\ell(r) + \left(1 - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\right) h_\ell(r) = 0, \quad r > 0. \quad (2.14)$$

Il s'agit d'une équation homogène de second ordre. Les coefficients sont singuliers à  $r = 0$ , et à l'infini. Elle admet deux familles de solutions définies à un facteur multiplicatif près.

### Théorème 2.1.

*L'équation sphérique de Bessel (2.13) admet deux familles de solutions, appelées **les fonctions sphériques de Hankel** ou également Fonctions de Bessel demi-entières, qui vérifient la relation de récurrence*

$$\frac{d}{dr} h_\ell = \frac{\ell}{r} h_\ell - h_{\ell+1} = -\frac{\ell+1}{r} h_\ell + h_{\ell-1}, \quad (2.15)$$

$$h_{\ell+1} + h_{\ell-1} = \frac{2\ell+1}{r} h_\ell. \quad (2.16)$$

*Ils sont donnés par les expressions*

$$h_\ell^{(1)}(r) = (-r)^\ell \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr}\right)^\ell \left(\frac{e^{ir}}{r}\right), \quad (2.17)$$

$$h_\ell^{(2)}(r) = (-r)^\ell \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr}\right)^\ell \left(\frac{e^{-ir}}{r}\right); \quad (2.18)$$

*c'est-à-dire*

$$h_\ell^{(1)}(r) = (-i)^\ell \frac{e^{ir}}{r} \left( \beta_0^\ell + i\beta_1^\ell \frac{1}{r} + \dots + (i)^m \beta_m^\ell \left(\frac{1}{r}\right)^m + \dots + (i)^\ell \beta_\ell^\ell \left(\frac{1}{r}\right)^\ell \right) \quad (2.19)$$

$$h_\ell^{(2)}(r) = \bar{h}_\ell^1(r); \quad (2.20)$$

$$\beta_m^\ell = \frac{(m + \ell)!}{m!(\ell - m)!2^m} \quad (2.21)$$

La fonction

$$z_\ell(r) = r \frac{\frac{d}{dr} h_\ell^{(1)}(r)}{h_\ell^{(1)}(r)} \quad (2.22)$$

vérifie la relation de récurrence

$$(z_{\ell-1} - (\ell - 1))(z_\ell + \ell + 1) = r^2. \quad (2.23)$$

Elle est donnée par l'expression

$$z_\ell(r) = -\frac{p_\ell}{q_\ell} + i\frac{r}{q_\ell} \quad (2.24)$$

où  $p_\ell$  et  $q_\ell$  sont des polynômes de degré  $\ell$  en la variable  $\frac{1}{r^2}$  et

$$q_\ell = 1 + \alpha_1^\ell \frac{1}{r^2} + \dots + \alpha_\ell^\ell \frac{1}{r^{2\ell}} = r^2 |h_\ell^{(1)}(r)|^2, \quad (2.25)$$

$$p_\ell = 1 + 2\alpha_1^\ell \frac{1}{r^2} + \dots + (1 + \ell)\alpha_\ell^\ell \frac{1}{r^{2\ell}}, \quad (2.26)$$

$$\alpha_m^\ell = \beta_m^\ell \beta_m^m. \quad (2.27)$$

Alors,

$$1 \leq -\Re(z_\ell(r)) = \frac{p_\ell}{q_\ell} \leq \ell + 1 \quad (2.28)$$

$$0 \leq \Im(z_\ell(r)) \leq r \quad (2.29)$$

## 2.4 Problèmes de Dirichlet et Neumann pour une sphère

Afin de trouver les solutions aux problèmes intérieurs et extérieurs, nous développons  $u_d$  et  $u_n$  en harmoniques sphériques. On a le développement de  $u_d$  et  $u_n$

$$\begin{cases} u_d(\theta, \varphi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} u_{\ell}^m Y_{\ell}^m(\theta, \varphi), \\ u_{\ell}^m = \int_S u_d(\theta, \varphi) \bar{Y}_{\ell}^m(\theta, \varphi) d\sigma, \end{cases} \quad (2.30)$$

$$\begin{cases} u_n(\theta, \varphi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} v_{\ell}^m Y_{\ell}^m(\theta, \varphi), \\ v_{\ell}^m = \int_S u_n(\theta, \varphi) \bar{Y}_{\ell}^m(\theta, \varphi) d\sigma, \end{cases} \quad (2.31)$$

La solution du **problème de Dirichlet intérieur** (2.6) est donnée par page 91[16].

$$u(r, \theta, \varphi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} u_{\ell}^m \frac{j_{\ell}(kr)}{j_{\ell}(k)} Y_{\ell}^m(\theta, \varphi) \quad (2.32)$$

où les fonctions  $j_{\ell}(r)$  sont définies pour  $\ell = 0$  par  $j_0 = \frac{\sin r}{r}$  la partie imaginaire de  $h_0$ . Qui est analytique et n'a donc pas de singularité dans un voisinage de l'origine. C'est la fonction sphérique de Bessel d'ordre zéro. Nous introduisons pour  $\ell \neq 0$  les fonctions sphériques habituelles de Bessel

$$j_{\ell}(r) = (-r)^{\ell} \left( \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right)^{\ell} \left( \frac{\sin r}{r} \right)$$

Nous remarquons que l'expression (2.32) n'a pas de sens lorsque  $k$  est un zéro de l'un des fonctions sphériques de Bessel, sauf lorsque le coefficient correspondant des conditions est également nulle. Ceci est typique de l'alternative de Fredholm, et l'ensemble de toutes les valeurs correspondantes de  $-k^2$  est exactement l'ensemble des valeurs propres du Laplacien sur la sphère unité avec une condition aux limites de Dirichlet. Les fonctions propres associées sont

$$j_{\ell}(kr) Y_{\ell}^m(\theta, \varphi), m = -\ell, \dots, \ell$$

et la multiplicité est  $2\ell + 1$ .

La solution du **problème de Neumann intérieur** (2.7) est donnée par

$$u(r, \theta, \varphi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} v_{\ell}^m \frac{j_{\ell}(kr)}{k \frac{d}{dr} j_{\ell}(k)} Y_{\ell}^m(\theta, \varphi) \quad (2.33)$$

De même, cette expression n'a aucune signification lorsque  $k$  est un zéro de la dérivée de l'une des fonctions sphériques de Bessel, sauf si le coefficient correspondant de la donnée est également nul. Par le changement de  $k$  en  $k^2$ , l'ensemble de zéros des fonctions  $\frac{dj_\ell}{dr}$  est exactement l'ensemble des valeurs propres du Laplacien dans la sphère unité avec une condition aux limites de Neumann. L'espace propre associé est engendré par les fonctions  $j_\ell(rk)Y_\ell^m(\theta, \varphi)$  et la multiplicité est de  $2\ell + 1$ .

Lorsque  $k^2$  n'est pas une valeur propre, ces problèmes intérieurs et extérieurs ont une solution unique, dont la régularité est exactement la même que celle des problème de Laplace associé.

La solution du **problème de Dirichlet extérieur** (2.8) est donné par

$$u(r, \theta, \varphi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} u_\ell^m \frac{h_\ell^{(1)}(kr)}{h_\ell^{(1)}(k)} Y_\ell^m(\theta, \varphi) \quad (2.34)$$

La solution du **problème de Neumann extérieur** (2.9) est donnée par

$$u(r, \theta, \varphi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} v_\ell^m \frac{h_\ell^{(1)}(kr)}{k \frac{d}{dr} h_\ell^{(1)}(k)} Y_\ell^m(\theta, \varphi) \quad (2.35)$$

## 2.5 Le cas d'une onde plane

Une onde plane est une solution d'une équation de Helmholtz de la forme

$$u_{inc} = e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x})}; |\vec{k}| = k. \quad (2.36)$$

Une onde plane ne vérifie pas la condition de rayonnement. Le problème acoustique associé vérifie la condition nulle de Dirichle. Nous cherchons une solution  $u$  du problème extérieur de la forme

$$u = u_{inc} + u_{sc}, \quad (2.37)$$

où le **champ diffusé**  $u_{sc}$  satisfait la condition de rayonnement sortant . La condition aux limites prend donc la forme

$$u_{sc} = -u_{inc}, \quad \text{dans } S \quad (2.38)$$

où  $S$  est la sphère unité. La solution du problème intérieur associé est alors  $-u_{inc}$ . Le problème est invariant par rotation autour de l'axe orienté

par  $\vec{k}$ , que l'on peut choisir de coïncider avec l'axe  $ox_3$ . Nous utilisons les coordonnées sphériques. donc

$$u_{diff} = -e^{ik \cos \theta} \quad (2.39)$$

Cette fonction est invariante par rotation autour de l'axe  $ox_3$ .

**Lemme 2.1.**

*Le développement suivant est satisfait :*

$$e^{ikx} = \sum_{\ell=0}^{\infty} (i)^\ell (2\ell + 1) j_\ell(k) \mathbb{P}_\ell(x) \quad (2.40)$$

où  $\mathbb{P}_\ell$  est le polynôme de Legendre d'ordre  $\ell$ . Une expression équivalente est

$$e^{ik \cos \theta} = \sum_{\ell=0}^{\infty} (i)^\ell \sqrt{8\pi} \sqrt{\ell + 1/2} j_\ell(k) Y_\ell^0(\theta) \quad (2.41)$$

## 2.6 Le problème extérieur de l'équation de Helmholtz

Nous avons donné dans la section 2.2 une formulation assez formelle du problème extérieur.

Il est naturel de chercher une solution telle que

$$\frac{u}{(1+r^2)^{1/2}} \in \mathbb{L}^2(\Omega_e), \quad \frac{\nabla u}{(1+r^2)^{1/2}} \in \mathbb{L}^2(\Omega_e) \quad (2.42)$$

En effet, ces estimations sont celles qui sont apparues dans le cas de la sphère. La solution de (2.8) et (2.9) n'est pas unique dans cet espace, comme nous l'avons vu dans le cas de la sphère. Nous devons ajouter la condition de rayonnement. Une forme de cette condition est (2.11). Une forme plus faible est

$$\int_{\Omega_e} \left| \frac{\partial u}{\partial r} - iku \right|^2 dx \leq c \quad (2.43)$$

Notons  $H$  l'espace de Hilbert associé

$$H = \left\{ u, \frac{u}{(1+r^2)^{1/2}} \in \mathbb{L}^2(\Omega_e), \frac{\nabla u}{(1+r^2)^{1/2}} \in \mathbb{L}^2(\Omega_e), \frac{\partial u}{\partial r} - iku \in \mathbb{L}^2(\Omega_e) \right\} \quad (2.44)$$

Nous aurons besoin d'une boule  $B_R$  dont la frontière est la sphère  $S_R$ . Son rayon  $R$  sera choisi suffisamment grand pour enfermer le domaine intérieur  $\Omega_i$ .

**Définition 2.1** (L'opérateur de capacité  $T$ ).

Nous avons noté  $T$  l'opérateur de capacité qui associe à une fonction  $u$  sur la sphère unité  $S$ , la dérivée normale de la solution du problème de Dirichlet extérieur dont les données aux limites sont  $u$ . Les fonctions  $u$  et  $Tu$  s'écrivent sous les formes :

$$\begin{cases} u = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} u_{\ell}^m Y_{\ell}^m(\theta, \varphi), \\ Tu = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} z_{\ell}(k) u_{\ell}^m Y_{\ell}^m(\theta, \varphi). \end{cases} \quad (2.45)$$

**Théorème 2.2** (Théorème d'unicité).

Les problèmes extérieurs de Dirichlet et Neumann (2.8) et (2.9) admettent au plus une solution dans l'espace de Hilbert  $H$ .

*Preuve.*

La différence  $u$  entre deux solutions  $u_1$  et  $u_2$  a une condition aux limites nulle, c'est à dire qu'elle vérifie  $u|_{\Gamma} = 0$ , ou  $(\partial u / \partial n)|_{\Gamma} = 0$ . Nous multiplions cette équation par  $\bar{u}$  et intégrons par parties pour obtenir

$$\int_{\Omega_e \cap B_R} (|\nabla u|^2 - k^2 |u|^2) dx - \int_{S_R} \partial u / \partial r \bar{u} d\sigma = 0 \quad (2.46)$$

A l'extérieur de la boule  $B_R$ , nous développons la solution  $u$  en harmoniques sphériques pour obtenir

$$u(r, \theta, \varphi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \left( \alpha_{\ell}^m \frac{h_{\ell}^{(1)}(kr)}{h_{\ell}^{(1)}(kR)} + \beta_{\ell}^m \frac{h_{\ell}^{(2)}(kr)}{h_{\ell}^{(2)}(kR)} \right) Y_{\ell}^m(\theta, \varphi), \quad (2.47)$$

et  $\frac{\partial u}{\partial r} - iku$  est développable comme suit

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial r} - iku = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \left[ \frac{k\alpha_{\ell}^m}{h_{\ell}^{(1)}(kR)} \left( \frac{d}{dr} h_{\ell}^{(1)}(kr) - i h_{\ell}^{(1)}(kr) \right) \right. \\ \left. + \frac{k\beta_{\ell}^m}{h_{\ell}^{(2)}(kR)} \left( \frac{d}{dr} h_{\ell}^{(2)}(kr) - i h_{\ell}^{(2)}(kr) \right) \right] Y_{\ell}^m(\theta, \varphi) \end{cases} \quad (2.48)$$

L'orthogonalité des harmoniques sphériques implique que l'intégrale sur le

complément de  $B_R$  d'une fonction de la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} v = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \varphi_{\ell}^m(r) Y_{\ell}^m(\theta, \varphi), \quad \text{pour } r > R \text{ est} \\ \int_{B_R^c} |v|^2 dx = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \int_R^{\infty} |\varphi_{\ell}^m(r)|^2 r^2 dr. \end{array} \right. \quad (2.49)$$

Le terme dominant dans l'expression  $\frac{\partial u}{\partial r} - iku$  est celui venant de  $h_{\ell}^{(2)}$ . Il se comporte comme  $-2i(e^{-ikr}/r)(\beta_{\ell}^m/h^{(2)}(kR))$ . Ainsi, la convergence des séries associées n'est possible que lorsque tous les coefficients

$$\beta_{\ell}^m = 0$$

Nous avons prouvé que la solution ne contient que les termes  $h_{\ell}^{(1)}$ . la partie imaginaire de l'expression (2.46) se réduit à

$$\Im \int_{S_R} (T_R u, \bar{u}) d\sigma = 0 \quad (2.50)$$

où  $T_R$  est l'opérateur de capacité sur la boule de rayon  $R$ , cet opérateur est défini par

$$\left\{ \begin{array}{l} u(R, \theta, \varphi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \alpha_{\ell}^m Y_{\ell}^m(\theta, \varphi), \\ T_R u = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{1}{R} z_{\ell}(kR) \alpha_{\ell}^m Y_{\ell}^m(\theta, \varphi). \end{array} \right. \quad (2.51)$$

On déduit de l'expression de cet opérateur que

$$\alpha_{\ell}^m = 0,$$

dont on déduit que

$$u|_{S_R} = 0 \quad (2.52)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{S_R} = 0. \quad (2.53)$$

et ainsi la solution s'annule à l'extérieur de la boule  $B_R$ . De plus, l'équation de Helmholtz est un opérateur elliptique, d'où il résulte que la solution est **analytique** dans le domaine  $\Omega_e$ . Elle est donc nulle.  $\square$

**Remarque 2.1.**

Il existe une forme plus faible pour la condition de rayonnement qui est

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{S_R} \left| \frac{\partial u}{\partial r} - ikr \right|^2 d\sigma = 0 \quad (2.54)$$

De la même manière que ci-dessus, cela implique  $\beta_\ell^m = 0$  et donc l'unicité de la solution. Une autre forme plus faible pour la condition de rayonnement est

$$\int_{\Omega_e} \frac{1}{r} \left| \frac{\partial u}{\partial r} - ikr \right|^2 dx \leq c \quad (2.55)$$

**Théorème 2.3.**

L'opérateur  $T$  est continu de  $H^{s+1}(S)$  en  $H^s(S)$ . Il satisfait les inégalités de coercivité et de continuité

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^2(S)}^2 &\leq -\Re(Tu, u)_{L^2(S)} \leq \|u\|_{2_{H^{1/2}(S)}}, \\ 0 &\leq \Im(Tu, u)_{L^2(S)} \leq k\|u\|_{2_{L^2(S)}}. \end{aligned}$$

La preuve d'existence de solutions repose sur l'introduction de l'opérateur de capacité  $T_R$  sur la sphère  $S_R$ .

**Lemme 2.2.**

Toute restriction à  $\Omega_e \cap B_R$  de la solution de Dirichlet ou de Neumann donné par le théorème (2.2) est une solution du problème : trouver  $u$  dans l'espace  $H^1(\Omega_e \cap B_R)$  qui Vérifie

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0, & \text{dans } \Omega_e \cap B_R, \\ \frac{\partial u}{\partial n}|_{S_R} = T_R u, \\ u|_\Gamma = u_d, \quad (\text{ou } \frac{\partial u}{\partial n}|_\Gamma = u_n). \end{cases} \quad (2.56)$$

Nous supposons que  $u_d \in H^{1/2}(\Gamma)$  (resp.  $u_n \in H^{-1/2}(\Gamma)$ ). En utilisant le théorème des traces, nous pouvons remplacer le problème de Dirichlet (2.56) par un problème avec une condition aux limites nulle et avec un second membre  $g$  :

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = g(x), \\ \frac{\partial u}{\partial n}|_{S_R} = T_R u, \\ u|_\Gamma = 0. \end{cases} \quad (2.57)$$

**Théorème 2.4** (Théorème d'existence).

Le problème de Dirichlet (2.57) admet une solution variationnelle unique dans l'espace  $H^1(\Omega_e \cap B_R)$ , lorsque  $g \in H^{-1}(\Omega_e \cap B_R)$ , qui satisfait

$$\begin{cases} \int_{\Omega_e \cap B_R} (\nabla u \cdot \nabla v) dx - k^2 \int_{\Omega_e \cap B_R} u v dx - \int_{S_R} T_R u v d\sigma \\ = - \int_{\Omega_e} g v dx, \quad \forall v \in \{H^1(\Omega_e \cap B_R); v|_{\Gamma} = 0\}. \end{cases} \quad (2.58)$$

Le problème de Dirichlet (2.8) admet une solution unique dans l'espace  $H$  lorsque  $u_d \in H^{1/2}(\Gamma)$ . L'application associée est continue de  $H^{1/2}(\Gamma)$  dans l'espace  $H$ . Le problème de Neumann (2.56) admet, lorsque  $u_n \in H^{-1/2}(\Gamma)$ , une solution variationnelle unique dans l'espace  $H^1(\Omega_e \cap B_R)$ , qui satisfait

$$\begin{cases} \int_{\Omega_e \cap B_R} (\nabla u \cdot \nabla v) dx - k^2 \int_{\Omega_e \cap B_R} u v dx - \int_{S_R} T_R u v d\sigma \\ = \int_{\Gamma} u_n v d\gamma, \quad \forall v \in H^1(\Omega_e \cap B_R). \end{cases} \quad (2.59)$$

Le problème de Neumann (2.56) admet une solution unique dans l'espace  $H$  lorsque  $u_n \in H^{-1/2}(\Gamma)$ . L'application associée est continue de  $H^{-1/2}(\Gamma)$  dans l'espace  $H$ .

*Preuve.*

Nous ne donnons que la preuve dans le cas du problème de Dirichlet, la preuve dans le cas du problème de Neumann étant presque exactement la même. La forme bilinéaire (2.58) est divisée en trois parties. La première est celle associée au laplacien et est coercive.

La seconde a le faux signe, mais est continu dans l'espace  $L^2(\Omega_e \cap B_R)$  et est donc compact par rapport au premier. Il résulte du théorème (2.3) que la troisième partie a une partie réelle coercive sur  $L^2(\Gamma)$  et une partie imaginaire négative. Par conséquent, nous pouvons utiliser l'alternative de Fredholm, dont nous savons que l'unicité implique l'existence. L'unicité était l'objet du théorème (2.2).

Soyons plus précis. Nous considérons le cas où  $k^2$  est un nombre complexe noté  $z$ . Nous introduisons un problème de perturbation selon le paramètre  $z$ , qui admet une solution unique (**théorème de Lax-Milgram**).

**Lemme 2.3.**

Le problème variationnel

$$\begin{cases} \int_{\Omega_e} (\nabla u_z \cdot \nabla v) dx - z \int_{\Omega_e} (u_z \cdot v) dx = - \int_{\Omega_e} g v dx, \\ \forall v \in H^1(\Omega_e), \quad v|_{\Gamma} = 0. \end{cases} \quad (2.60)$$

admet une solution unique dans l'espace  $H^1(\Omega_e)$ , lorsque  $z$  satisfait  $\Im z > 0$ . Il dépend analytiquement de  $z$  dans ce plan semi-complexe et il est une solution d'équation (2.58) pour  $z = k^2$ .

**Remarque 2.2.**

Le plan semi-complexe inférieur,  $\Im z < 0$ , correspond également à un problème bien posé dont la limite satisfait la condition de rayonnement entrant.

Nous considérons la limite du problème suivant, si  $\Im z$  tend à zéro et  $\Re z = k^2$

$$\begin{cases} \int_{\Omega_e \cap B_R} (\nabla u_z \cdot \nabla v) dx - z \int_{\Omega_e \cap B_R} u_z v dx - \int_{S_R} T_R u_z v d\sigma \\ = - \int_{\Omega_e \cap B_R} g v dx, \quad \forall v \in \{H^1(\Omega_e \cap B_R); v|_{\Gamma} = 0\}. \end{cases} \quad (2.61)$$

Il s'ensuit de (3.2) que

$$\begin{cases} \int_{\Omega_e \cap B_R} |\nabla u_z|^2 dx + \frac{1}{R} \int_{S_R} |u_z|^2 dx \\ \leq k^2 \int_{\Omega_e \cap B_R} |u_z|^2 dx - \Re \int_{\Omega_e \cap B_R} g \bar{u}_z dx. \end{cases} \quad (2.62)$$

**Fin du théorème 2.4**

Nous procédons maintenant par absurde :

soit  $u_z$  est borné dans  $L^2(\Omega_e \cap B_R)$ , alors Il est aussi borné dans  $H^1(\Omega_e \cap B_R)$ . De l'injection compacte de  $H^1$  dans  $L^2$ , il converge fortement dans  $L^2$  faiblement dans  $H^1$  vers une fonction  $u$  qui satisfait (2.58).

Ou bien  $u_z$  n'est pas borné dans  $L^2$ , la norme tend vers l'infini. nous introduisons

$$v_z = \frac{u_z}{\|u_z\|_{L^2}}.$$

Sa norme  $H^1$  est bornée et elle converge en  $L^2$ . Sa limite satisfait

$$\begin{cases} \Delta v + k^2 v = 0, \\ v|_{\Gamma} = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial n} \Big|_{S_R} = T_R v. \end{cases} \quad (2.63)$$

et il est donc nul. Ceci est contradictoire car sa norme  $L^2$  est égale à 1.  $\square$

**Théorème 2.5** (Régularité).

*Toutes les dérivées partielles, jusqu'à l'ordre  $m$ , de la solution du problème de Dirichlet (2.8) sont dans l'espace  $H$  lorsque  $u_d \in H^{m-1/2}(\Gamma)$  ( $m \geq 1$ ).  
Toutes les dérivées partielles, jusqu'à l'ordre  $m$ , de la solution du problème de Neuman (2.9) sont dans l'espace  $H$  lorsque  $u_n \in H^{m-3/2}(\Gamma)$  ( $m \geq 1$ ).*

---

---

## CHAPITRE 3

---

# DIFFRACTION D'UNE ONDE ÉLECTROMAGNÉTIQUE PAR UN OBSTACLE REVÊTU D'UNE COUCHE MINCE

Nous nous intéressons dans ce chapitre au problème de la diffraction d'une onde électromagnétique harmonique par un obstacle revêtu d'une couche mince où le phénomène de diffraction est caractéristique des ondes. Il se manifeste lorsque les dimensions d'une ouverture ou d'un obstacle sont inférieures ou de l'ordre de grandeur de la longueur d'onde. Lorsqu'on cherche des solutions particulières de l'équation de propagation des ondes (ondes planes, solutions harmoniques), on arrive à l'équation de Helmholtz. Ainsi, le problème mathématique considéré est basé sur les équations de Helmholtz en régime harmonique donc nous reprenons l'article de Bendali et Lemrabet[3] tel que l'équation de Helmholtz (d'après le physicien Hermann von Helmholtz) apparaît lorsque l'on cherche des solutions stationnaires de l'équation de propagation des ondes de D'Alembert.

Ce chapitre est organisé de la manière suivante : nous présentons la couche mince. Puis, nous introduisons le problème de transmission, nous donnons un résultat d'existence et d'unicité de la solution et nous présentons l'opérateur de Poincaré-Steklov et le changement d'échelle pour reformuler le problème de Helmholtz. Finalement, l'étude de la stabilité de la solution relativement au petit paramètre  $\delta$ .

### 3.1 Position des deux problèmes model

Dans cette section, nous présentons une description géométrique plus détaillée et plus rigoureuse de la couche mince. Puis, nous introduirons le problème de transmission et nous donnons un résultat d'existence et d'unicité de la solution, La démarche qui suit est inspirée de [22],[3].

#### 3.1.1 Description géométrique de la couche mince

Soit  $\Omega_\infty$  un ouvert de  $\mathbb{R}^3$  de complémentaire compact, de frontière  $\Gamma$  et de classe  $C^\infty$ ,  $\delta$  un petit paramètre positif décrivant l'épaisseur de la couche mince et tend vers zéro. Un obstacle occupe le domaine  $\Omega_i = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega_\infty}$  de frontière  $\Gamma_\delta$ .

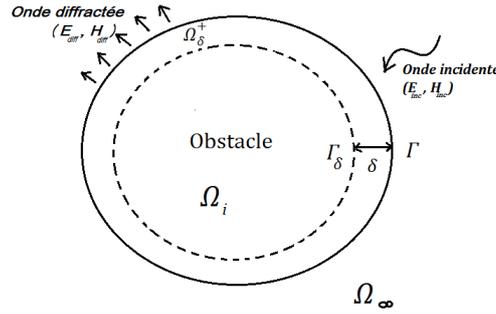


FIGURE 3.1 – Géométrie d'une couche mince.

- On désigne par  $\Omega_\delta^+$  la couche mince uniforme d'épaisseur  $\delta$

$$\Omega_\delta^+ = \{x \in \Omega_i | d(x, \Gamma_\delta) < \delta\}.$$

et du milieu infini de propagation

$$\Omega_\infty = \{x \in \overline{\Omega_i} | d(x, \Gamma_\delta) > \delta\}.$$

où  $d(x, \Gamma_\delta)$  représente la distance du point  $x$  au bord  $\Gamma_\delta$ .

- La frontière séparant  $\Omega_\delta^+$  et  $\Omega_\infty$  est notée  $\Gamma$ , et on a

$$\Gamma = \{x \in \overline{\Omega_\infty} | d(x, \Gamma_\delta) = \delta\}.$$

- Le domaine extérieur défini par la réunion de la couche mince

$$\Omega_{\delta,\infty} = \overline{\Omega}_\infty \cup \Omega_\delta^+$$

- La courbe  $\Gamma$  est parallèle à  $\Gamma_\delta$  comme l'indique la figure 3.1.
- L'onde incidente  $(E_{inc}, H_{inc})$  est solution des équation de Maxwell dans un voisinage de l'obstacle, elle est alors décrite par deux champs, électrique  $E_{inc}$  et magnétique  $H_{inc}$ .
- L'onde diffractée  $(E_{diff}, H_{diff})$  est :

$$(E_{diff}, H_{diff}) = (E, H) - (E_{inc}, H_{inc})$$

tel que :  $(E, H)$  est l'onde totale.

### 3.1.2 Présentation du problème

Nous allons désormais nous intéresser au problème de diffraction d'ondes par un obstacle. Soit l'onde totale  $(E, H)$  harmonique vérifie l'équation de Maxwell

$$\begin{cases} \operatorname{rot} E - ikZ_0 H = 0 & \text{(Maxwell-Faraday)} \\ \operatorname{rot} H - ikZ_0^{-1} E = 0 & \text{(Maxwell-Ampère)} \end{cases}$$

dans le milieu de propagation  $\Omega_\infty$  et

$$\begin{cases} \operatorname{rot} E - iknZ_0 Z H = 0 & \text{(Maxwell-Faraday)} \\ \operatorname{rot} H + ikZ_0^{-1} Z^{-1} E = 0 & \text{(Maxwell-Ampère)} \end{cases}$$

dans la couche mince diélectrique  $\Omega_\delta^+$ .

où  $Z_0$  est l'impédance du vide est définie par

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}$$

tel que  $\epsilon_0$  et  $\mu_0$  sont des constantes représentant la permittivité électrique et perméabilité magnétique de l'air, et son impédance

$$Z = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}$$

tels que  $\epsilon$  et  $\mu$  sont constantes caractéristique de la couche mince.

Si nous choisissons la E-polarisation<sup>1</sup>, alors on a :

$$E = \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ 0 \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ v \end{bmatrix}$$

Donc, les équations Maxwell-Faraday deviennent scalaires dans chacun des deux milieux :

$$\left| \begin{array}{l} \text{rot}E - ikZ_0v = 0 \quad \text{dans } \Omega_\infty \\ \text{rot}E - iknZ_0Zv = 0 \quad \text{dans } \Omega_\delta^+ \end{array} \right.$$

où  $\text{rot}E = \partial_y E - \partial_x E$ , alors celles de Maxwell-Ampère demeurent vectorielles dans chacun des deux milieux :

$$\left| \begin{array}{l} \text{rot}v + ikZ_0E = 0 \quad \text{dans } \Omega_\infty \\ \text{rot}v + iknZ_0^{-1}Z^{-1}E = 0 \quad \text{dans } \Omega_\delta^+ \end{array} \right.$$

où le vecteur rotationnel d'une fonction scalaire  $v(x, y, z)$  est défini par :

$$\text{rot}v = \begin{bmatrix} \partial_y v_z - \partial_z v_y \\ \partial_z v_x - \partial_x v_z \\ \partial_x v_y - \partial_y v_x \end{bmatrix}$$

on élimine le champ qui est vectoriel et on obtient simplement l'équation de Helmholtz, d'inconnue  $v$  dans chacun des milieux :

$$\left| \begin{array}{l} \Delta v + k^2 v = 0 \quad \text{dans } \Omega_\infty \\ \Delta v + k^2 \eta^2 v = k^2(1 - \eta^2)v_0 \quad \text{dans } \Omega_\delta^+ \end{array} \right. \quad (3.1)$$

où  $k$  est le nombre d'onde, et  $v_0$  représente l'onde incidente qui est solution de cet équation

$$\Delta v_0 + k^2 v_0 = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(V).$$

Aux équations (3.1), s'ajoutent les condition aux limites, donc, nous obtenons le problème suivant :

---

1. La E-polarisation est dite transverse électrique si le champ électrique  $E$  appartient au plan de propagation, donc le champ magnétique  $H$  est colinéaire à l'axe d'invariance. Si  $E$  est perpendiculaire au plan de propagation alors la H-polarisation est dite transverse magnétique.

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta v + k^2 v = 0 \quad \text{dans } \Omega_\infty, \quad (1) \\ \Delta v + k^2 \eta^2 v = k^2 (1 - \eta^2) v_0 \quad \text{dans } \Omega_\delta^+, \quad (2) \\ [\chi \partial_n v] = - [\chi \partial_n v_0] \quad \text{sur } \Gamma, \quad (3) \\ [v] = 0 \quad \text{sur } \Gamma. \quad (4) \end{array} \right. \quad (3.2)$$

Où  $\partial_n$  désigne la dérivée normale selon  $\vec{n}$  ; Le crochet  $[v]$  est le saut de la trace d'une distribution ou d'une fonction  $v$  définie sur  $\Omega_\infty \cup \Omega_\delta^+$  à travers la frontière  $\Gamma$ .  $k$  est une constante strictement positive,  $\eta$  désigne l'indice de réfraction<sup>2</sup> de la couche mince et il est supposé être strictement positif. La fonction  $\chi$  est constante par morceaux, elle est définie par :

$$\chi = \begin{cases} \alpha > 0 & \text{dans } \Omega_\delta^+, \\ 1 & \text{dans } \Omega_\infty. \end{cases} \quad (3.3)$$

où  $\chi$  décrivant les propriétés de contraste de la couche mince par rapport au milieu de propagation  $\Omega_\infty$ . Lorsque la couche mince est constituée d'un matériau absorbant,  $\eta$  et  $\alpha$  sont des constantes complexes avec une partie réelle positive et une partie imaginaire qui peuvent être différentes de 0 (positif ici puisque la dépendance temporelle supposée est en  $e^{-i\omega t}$ ,  $\omega > 0$  étant le pulsation). Dans ce cas, la discussion ultérieure reste valable après avoir pris la partie réelle des expressions impliquées avant de faire les estimations.

**Remarque 3.1.**

*Pour une onde acoustique,  $\alpha = \frac{1}{\rho}$ ,  $\rho$  étant la densité de la couche mince. Le système unitaire est censé être choisi de sorte que la densité du milieu noyant l'extérieur de l'obstacle soit normalisée à 1. pour un H-polarisation (resp., E-polarisation) Champ électromagnétique,  $\alpha$  est liée à la permittivité relative  $\varepsilon$  (resp., perméabilité  $\mu$ ) de la couche mince par  $\alpha = \frac{1}{\varepsilon}$  (resp.,  $\alpha = \frac{1}{\mu}$ ).*

Nous imposerons les conditions aux limite sur la frontière de l'obstacle :

1. Une condition de Dirichlet (H-polarisation) non homogène

$$v = -v_0 \quad \text{sur } \Gamma_\delta.$$

---

2. Changement de la direction de propagation d'une onde électromagnétique ou acoustique passant d'un milieu dans un autre.

2. Une condition de Neumann (E-polarisation) non homogène

$$\partial_n v = -\partial_n v_0 \quad \text{sur } \Gamma_\delta.$$

Une condition de radiation à l'infini, traduisant la propagation de l'énergie vers l'infini, de type Sommerfeld s'écrit sous la forme

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} |x| \left( \nabla v \cdot \frac{x}{|x|} - ikv \right) = 0,$$

Pour que le problème 3.2 soit bien posé.

Bien que la formulation ci-dessus soit la plus simple et soit directement exprimée en termes de quantités physiques, elle est plus pratique pour que les développements théoriques qui suivent fonctionnent avec le problème équivalent suivant. Soit  $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$  tel que  $\theta = 1$  dans un voisinage de  $\Gamma$  et de  $\text{supp } \theta \subset \Omega_{\delta, \infty}$ . Avec le changement de variable  $u := v + \theta v_0$ ; on aura un problème aux limites plus général avec des conditions d'interface : l'équation (1) de (3.2) avec ce changement devient :

$$\Delta(u - \theta v_0) + k^2(u - \theta v_0) = 0$$

$$\Delta u - v_0 \Delta \theta - 2\nabla \theta \nabla v_0 - \theta \Delta v_0 + k^2 u - k^2 \theta v_0 = 0$$

Alors :

$$\Delta u + k^2 u - \underbrace{\theta (k^2 v_0 + \Delta v_0)}_{=0} = v_0 \Delta \theta + 2\nabla \theta \nabla v_0$$

Donc on note :

$$f = -v_0 \Delta \theta - 2\nabla \theta \nabla v_0$$

telle que  $f$  est une fonction source appartient à l'espace  $L^2(\Omega_\infty)$  à support compact dans  $\Omega_\infty$ , alors :

$$\Delta u + k^2 u = -f \tag{3.4}$$

Pour l'équation (2) de (3.2) on a :

$$(2) \Rightarrow \Delta(u - \theta v_0) + k^2 \eta^2 (u - \theta v_0) = k^2 v_0 - k^2 \eta^2 v_0$$

$$\Delta u - v_0 \Delta \theta - 2\nabla \theta \nabla v_0 - \theta \Delta v_0 + k^2 \eta^2 u - k^2 \eta^2 \theta v_0 - k^2 v_0 + k^2 \eta^2 v_0 = 0$$

$$\Delta u + k^2 \eta^2 u - \underbrace{(v_0 \Delta \theta + 2\nabla \theta \nabla v_0)}_{=0} - \underbrace{(\theta \Delta v_0 + k^2 v_0)}_{=0 \text{ car } \theta=1} - \underbrace{(k^2 \eta^2 \theta v_0 - k^2 \eta^2 v_0)}_{=0 \text{ car } \theta=1} = 0$$

Donc :

$$\Delta u + k^2 \eta^2 u = 0 \quad (3.5)$$

Finalement, le changement de variable  $u := v + \theta v_0$  vérifie la condition (3) et le problème (3.2) et la condition de radiation à l'infini. Donc, le problème (3.2) s'écrit comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in H_{loc}^1(\overline{\Omega}_{\delta,\infty}) \text{ tel que} \\ \Delta u + k^2 u = -f \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega_\infty), \\ \Delta u + k^2 n^2 u = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega_\delta^+), \\ [\chi \partial_n u] = 0 \quad \text{sur } H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} |x| \left( \nabla u \cdot \frac{x}{|x|} - iku \right) = 0, \end{array} \right. \quad (3.6)$$

Avec la condition de Dirichlet homogène

$$u = 0 \quad \text{dans } H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\delta), \quad (3.7)$$

ou la condition de Neumann homogène

$$\partial_n u = 0 \quad \text{dans } H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_\delta), \quad (3.8)$$

Le comportement de  $u$  à l'infini est décrit par la condition de radiation de Sommerfeld. Aussi, on associe au problème 3.6 l'espace de Fréchet

$$H_{loc}^1(\overline{\Omega}_{\delta,\infty}) := \left\{ v \in \mathcal{D}'(\Omega_{\delta,\infty}), \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3) : \varphi v \in H^1(\Omega_{\delta,\infty}) \right\}.$$

Le théorème suivant répond à la question de l'existence, de l'unicité et de la régularité de la solution.

**Théorème 3.1.**

*Le problème (3.6), avec la condition de Dirichlet (3.7) ou la condition de Neumann (3.8) admet chacun une solution unique  $u$ . En outre, pour tout  $s \geq 0$ , si  $f \in H^s(\Omega_\infty)$ , alors :*

$$u \in H^{s+2}(\Omega_\delta^+) \cap H_{loc}^{s+2}(\overline{\Omega}_\infty).$$

*Preuve.*

**Partie 1- L'unicité de la solution :** est une conséquence directe du lemme de Rellich [18] et la condition de radiation à l'infini. Pour cela, il suffit de se rappeler que,

**Lemme 3.1** (Rellich). [2]

Soit  $\Omega_i$  un domaine extérieur de  $\mathbb{R}^3$ , i.e., tel qu'il existe  $R_0$  avec

$$B_{R_0}^e \subset \Omega_i$$

tel que :

$B_{R_0}^e$  l'extérieur de la boule  $B_{R_0}$  de centre 0 et de rayon  $R_0$  qu'on note

$$B_{R_0}^e = \{x \in \mathbb{R}^3; |x| > R_0\}$$

Soit  $u \in \mathcal{D}'(\Omega_i)$  vérifiant

$$\Delta u + k^2 u = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega_i)$$

avec  $k > 0$ . Alors,  $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega_i)$  et on a l'alternative suivante :

$$u \equiv 0 \text{ dans } \Omega_i$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists R_1 > R_0 \text{ et } M > 0 \text{ tels que} \\ \int_{R_0 < |x| < R} |u(x)|^2 dx \geq MR, \forall R > R_1. \end{array} \right.$$

On impose maintenant à  $u$  de respecter la condition de radiation de Sommerfeld. Dans ce cas,

**Lemme 3.2.** [2]

Si

$$S_R = \{x \in \mathbb{R}^3, |x| = R\},$$

alors

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{S_R} |u(x)|^2 dS_R = 0.$$

Donc, On montre que  $f = 0 \Rightarrow u = 0$ , (c'est à dire qu'on montre que  $\ker(\Delta + k^2 I) = 0$ ).

Soit  $f = 0$ , si on suppose que  $u \neq 0$ , alors le lemme de Rellich implique l'existence d'un  $R_1 > R$  et  $M > 0$  tels que

$$\int_{|x| < R} |u(x)|^2 dx \geq MR.$$

On a encore, d'après le lemme 3.2 qui est une conséquence directe de ce lemme de Rellich. Il existe  $R_2$  tel que  $\forall R \geq R_2$ ,

$$\int_{S_R} |u(x)|^2 dS_R \leq \frac{M}{2}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} MR &\leq \int_{|x|<R} |u(x)|^2 dx = \int_{|x|<R_2} |u(x)|^2 dx + \int_{R_2}^R \int_{S_r} |u(x)|^2 dS_r dr, \\ &\leq \int_{|x|<R_2} |u(x)|^2 dx + (R - R_2) \frac{M}{2}. \end{aligned}$$

Finalement, en divisant par  $R$

$$\begin{aligned} M &\leq \frac{1}{R} \int_{|x|<R} |u(x)|^2 dx = \frac{1}{R} \int_{|x|<R_2} |u(x)|^2 dx + \frac{1}{R} \int_{R_2}^R \int_{S_r} |u(x)|^2 dS_r dr, \\ &\leq \frac{1}{R} \int_{|x|<R_2} |u(x)|^2 dx + \left(1 - \frac{R_2}{R}\right) \frac{M}{2}. \end{aligned}$$

et en faisant tendre  $R \rightarrow \infty$ , on obtient

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} \int_{|x|<R} |u(x)|^2 dx \leq \frac{M}{2}.$$

ce qui est une contradiction. Donc nécessairement  $u = 0$ .

**Partie 2-L'existence de la solution :** est obtenue par deux méthodes :

1. Soit par des arguments standards basés sur l'alternative de Fredholm. Alors en utilisant la méthode Lax et Phillips [17] qui consiste à chercher une solution du problème (3.6) par perturbation compacte de la solution d'un problème similaire posé sur  $\mathbb{R}^3$  tout entier. On peut se ramener au problème de Dirichlet homogène suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in H_{loc}^1(\overline{\Omega}_{\delta, \infty}), \\ \Delta u + k^2 u = -f \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega_\infty), \\ u = 0 \quad \text{dans } H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\delta), \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} |x| \left( \nabla u \cdot \frac{x}{|x|} - iku \right) = 0, \end{array} \right. \quad (3.9)$$

où  $f \in L^2(\Omega_\infty)$  est une fonction à support compact dans  $\Omega_\infty$ . Soit  $\xi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ , telle que  $\xi = 1$  dans un voisinage de  $\Gamma_\delta$  et  $\text{supp}\xi \supset \text{supp}f$ . On note

$$M = \{h \in L^2(\mathbb{R}^3); \text{supp}h \subset \text{supp}\xi \cap \overline{\Omega}_{\delta,\infty}\}.$$

$\forall h \in M$ , le problème

$$\begin{cases} w \in H_{loc}^2(\mathbb{R}^3), \\ \Delta w + k^2 w = -h \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3), \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} |x| \left( \nabla w \cdot \frac{x}{|x|} - ikw \right) = 0, \end{cases} \quad (3.10)$$

admet une et une seule solution donnée explicitement par

$$w(x) = \int_{\mathbb{R}^n} G(x, y) h(y) dy,$$

où  $G(x; y)$  est la fonction de Green associé à la solution élémentaire de l'équation d'Helmholtz donnant les solutions sortantes.

On considère ensuite le problème de Dirichlet non homogène suivant :

$$\begin{cases} v \in H^1(\Omega_{\delta,\infty}), \\ \Delta v + \lambda^2 v = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega_{\delta,\infty}), \\ v = w \quad \text{dans } H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\delta). \end{cases} \quad (3.11)$$

On cherche, alors, une fonction  $h \in M$  telle que :

$$u = w - \xi v, \quad x \in \Omega_{\delta,\infty}; \quad (3.12)$$

est une solution du problème (3.9). Il est clair, d'abord, que l'on a  $u$  sera solution de (3.9) des lorsqu' elle vérifie l'équation :

$$\Delta u + k^2 u = -f \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega_{\delta,\infty}) \quad (3.13)$$

**Remarque 3.2.**

*u vérifie la condition de Sommerfeld à l'infini car  $u = w$  dans un voisinage de l'infini*

A l'aide de (3.12) ; on a

$$\Delta u = \Delta w - \xi \Delta v - v \Delta \xi - 2 \nabla \xi \cdot \nabla v.$$

En remplaçant dans (3.13) ;

$$\Delta w - \xi \Delta v - v \Delta \xi - 2 \nabla \xi \cdot \nabla v + k^2(w - \xi v) = -f$$

à l'aide de (3.10) et (3.11) l'équation :

$$\underbrace{\Delta w + k^2 w}_{-h} - \underbrace{\xi \Delta v}_{\xi \lambda^2 v} - v \Delta \xi - 2 \nabla \xi \cdot \nabla v - k^2 \xi v = -f$$

donc,

$$h + 2 \nabla \xi \cdot \nabla v + v \Delta \xi + (k^2 - \lambda^2) v \xi = f$$

on pose

$$Th = 2 \nabla \xi \cdot \nabla v + v \Delta \xi + (k^2 - \lambda^2) v \xi \quad (3.14)$$

Ainsi,

$$h + Th = f \quad h \in M \quad (3.15)$$

D'autre part, l'expression (3.14) montre que  $\text{supp}Th \subset \text{supp}\xi$  et par conséquent  $T$  définit un opérateur linéaire continu de  $M$  dans l'espace

$$V = \{g \in H_{loc}^1(\mathbb{R}^3); \text{supp}g \subset \text{supp}\xi \cap \overline{\Omega}_{\delta, \infty}\},$$

La surface  $\Gamma_\delta$  étant régulière, on conclut par le lemme de compacité locale de Rellich que l'injection  $V \hookrightarrow M$  est compacte donc  $T$  est compact dans  $M$ . Ainsi l'équation (3.15) est une perturbation compacte de l'identité dans  $M$ . L'alternative de Fredholm permet de déduire l'existence à partir de l'unicité, alors il suffit de montrer l'injectivité de l'opérateur  $(I + T)$  pour assurer sa bijectivité. En effet, supposons  $f = 0$ . En vertu de l'unicité de la solution du problème (3.9) on obtient

$$w = \xi v$$

Ainsi, la fonction  $z$  définie comme suit est un élément de  $H^2(\mathbb{R}^3)$

$$z = \begin{cases} w & \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}_{\delta, \infty} \\ v & \Omega_{\delta, \infty} \end{cases}$$

En posant

$$a(x) = \begin{cases} k^2 & \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}_{\delta,\infty} \\ \lambda^2 & \Omega_{\delta,\infty} \end{cases}$$

$z$  est solution du problème suivant

$$\begin{cases} z \in H^2(\mathbb{R}^3), \\ \Delta z + a(x)z = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^3. \end{cases} \quad (3.16)$$

En prenant  $z$  comme fonction-test dans la formulation variationnelle associée au problème (3.16), nous obtenons

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla z|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^3} a(x)|z|^2 dx = 0$$

et en prenant la partie imaginaire de l'équation ci-dessus, il suit

$$\int_{\Omega_{\delta,\infty}} |z|^2 dx = 0$$

Ce qui implique  $z = 0$  dans  $\Omega_{\delta,\infty}$ , i.e.,  $v = 0$  et d'après (3.14)  $Th = 0$  dans  $\Omega_{\delta,\infty}$ . Donc

$$h = 0.$$

La bijectivité de  $(I - T)$  entraîne alors l'existence d'une solution  $u$  du problème (3.6).

2. Soit encore avec le principe d'absorption limite proposé par Wilcox [4]. le principe d'absorption limite qui consiste à ajouter un frottement  $i\rho$  au nombre d'onde  $k$  dans l'équation de Helmholtz afin d'assurer la coercivité de la forme bilinéaire associée à la formulation variationnelle du problème et passer à la limite lorsque  $\rho \rightarrow 0^+$ .

**Partie 3-La régularité de la solution :** découle des résultats généraux sur les système elliptiques d'Agmon-Douglis-Nirenberg [1] La régularité intérieure des équations elliptiques(cf [1]) nous permettent alors de conclure :

**Théorème 3.2.**

*Pour  $s \geq -1$ , si  $f$  est dans  $H^s(\Gamma)$  alors toute solution  $u$  du problème aux limites extérieur (3.23) vérifie :*

$$u \in H^{s+\frac{5}{2}}(\overline{\Omega}_{\infty}).$$

□

**Remarque 3.3.**

*On peut faire la preuve de l'existence et la régularité de la solution avec l'opérateur de Steklov-poincaré qu'on va présenter dans la suite.*

**3.2 Le problème dans un domaine tronqué**

Le but de cette section est de reformuler le problème (3.2) dans un domaine borné, on introduit l'opérateur de Poincaré-Steklov, appelé aussi opérateur de Dirichlet-Neumann, de la manière suivante :

**3.2.1 Opérateur de Poincaré-Steklov**

On tronque le domaine extérieur  $\Omega_\infty$  par une surface fermée bornée  $\Sigma$  de classe  $C^\infty$  renfermant l'obstacle ainsi que le support de  $f$ , telle que l'ouvert intérieur délimité par  $\Sigma$ , et  $\Gamma$  contient le support de  $f$  comme l'indique la figure 3.2

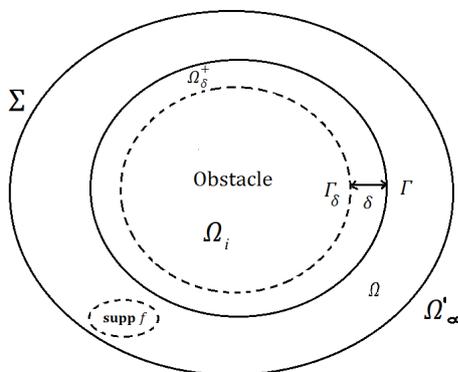


FIGURE 3.2 – Le domaine tronqué.

Pour  $k > 0$ , l'opérateur Steklov-Poincaré  $S_k$  est défini par :

$$\begin{aligned}
 S_k & : H^{\frac{1}{2}}(\Sigma) \longrightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Sigma) \\
 \varphi & \longmapsto S_k \varphi = \partial_n \omega
 \end{aligned}$$

où  $n$  est la normale sur  $\Sigma$  dirigée vers l'extérieur de  $\Omega'_\infty$  ;  $\omega$  est l'unique

solution du problème de diffraction suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega \in H_{loc}^1(\overline{\Omega}'_\infty), \\ \Delta\omega + k^2\omega = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega'_\infty), \\ \omega = \varphi \text{ dans } H^{\frac{1}{2}}(\Gamma), \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} |x| \left( \nabla\omega \cdot \frac{x}{|x|} - ik\omega \right) = 0, \end{array} \right. \quad (3.17)$$

En outre, il existe un opérateur de Steklov-Poincaré  $S\varphi = \partial_n\omega$  de  $H^{\frac{1}{2}}(\Sigma)$  et  $H^{-\frac{1}{2}}(\Sigma)$  pour le problème coercif suivant ;

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega \in H^1(\Omega'_\infty), \\ -\Delta\omega + \omega = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega'_\infty), \\ \omega = \varphi \text{ dans } H^{\frac{1}{2}}(\Gamma). \end{array} \right. \quad (3.18)$$

Par les propriétés de régularité classiques des solutions au problème de Dirichlet et en utilisant des résultats(cf., par ex.[14]) bien connus dans la théorie des opérateurs pseudo-différentiels (cf., par ex.[7]), nous obtenons les deux propriétés fondamentales

1.  $S$  est coercif :

$$\exists c > 0 : \langle S\varphi, \overline{\varphi} \rangle \geq c \|\varphi\|_{\frac{1}{2}, \Sigma}^2; \quad \forall \varphi \in H^{\frac{1}{2}}(\Sigma) \quad (3.19)$$

le signe de  $\langle S_k\varphi, \overline{\varphi} \rangle$  où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  désigne le crochet de dualité entre  $H^{\frac{1}{2}}(\Sigma)$  et  $H^{-\frac{1}{2}}(\Sigma)$  doit être contrôlé avant d'établir le résultat de stabilité. .

2. L'opérateur  $R_k$  est de  $H^{\frac{1}{2}}(\Sigma)$  dans  $H^{-\frac{1}{2}}(\Sigma)$  , tel que ;

$$R_k = S_k - S \in \mathcal{L}(H^{\frac{1}{2}}(\Sigma), H^{-\frac{1}{2}}(\Sigma)). \quad (3.20)$$

Donc,  $R_k$  est un opérateur compact de  $H^{\frac{1}{2}}(\Sigma)$  dans  $H^{-\frac{1}{2}}(\Sigma)$ .

3.  $\|\varphi\|_{\frac{1}{2}, \Sigma}$  désigne la norme de  $\varphi$  dans  $H^{\frac{1}{2}}(\Sigma)$

### 3.2.2 Formulation équivalente dans un domaine borné

Soit  $f \in L^2(\Omega_\infty)$ . Toute solution  $u$  du problème (3.2) est solution du problème variationnel suivant :

$$\int_{\Omega_\delta^+} \alpha(\nabla u \cdot \nabla v - k^2 n^2 uv) d\Omega_\delta^+ + \int_{\Omega_\infty} (\nabla u \cdot \nabla v - k^2 uv) d\Omega_\infty = \int_{\Omega} f v d\Omega \quad (3.21)$$

Pour toute fonction test  $v$  appartenant à un sous-espace  $X_\delta$  de  $H^1(\Omega_\delta)$  arbitrairement prolongée à une fonction de  $H^1(\Omega_{\delta,\infty})$  à support borné et vérifie la condition aux limites de Neumann ou de Dirichlet sur  $\Gamma_\delta$ , où

$$X_\delta^N = \{v = (v^+, v^-) \in H^1(\Omega_\delta^+) \times H^1(\Omega) | v^+(\cdot, 0) = v^- \text{ sur } \Gamma\},$$

$$X_\delta^D = \{v \in X_\delta^N | v^+(\cdot, 1) = 0 \text{ sur } \Gamma_\delta\},$$

On pose  $X_\delta = X_\delta^D$  (resp.  $X_\delta^N$ ) selon la condition aux limites de Dirichlet ( resp. de Neumann ) considérée.

$X_\delta$  est un espace de Hilbert muni de la norme

$$\|v\|_{X_\delta} = \left( \|v^+\|_{1,\Omega_\delta^+}^2 + \|v^-\|_{1,\Omega}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Nous supposons tout d'abord que  $f$  et  $u$  sont régulières, ce qui nous permet d'écrire : de (3.6) on a :

$$\Delta u + k^2 n^2 u = k^2(1 - n^2)u_0 \quad \text{dans } \Omega_\delta^+ \quad (3.22)$$

on pose :

$$V = H^1(\Omega_\delta^+)$$

$$V_0 = \{v \in H^1(\Omega_\delta^+); v = 0 \text{ sur } \Gamma\}.$$

on multiplie les deux membres de (3.22) par  $v$  et on intègre , on trouve :

$$\int_{\Omega_\delta^+} (v\Delta u + k^2 n^2 uv) d\Omega_\delta^+ = \int_{\Omega_\delta^+} k^2(1 - n^2)u_0 v d\Omega_\delta^+$$

$$\int_{\Omega_\delta^+} v\Delta u d\Omega_\delta^+ + \int_{\Omega_\delta^+} k^2 n^2 uv d\Omega_\delta^+ = \int_{\Omega_\delta^+} k^2 u_0 v d\Omega_\delta^+ - \int_{\Omega_\delta^+} k^2 n^2 u_0 v d\Omega_\delta^+$$

D'où, en utilisant une formule de Green, on obtient alors

$$\int_{\Omega_\delta^+} \alpha(\nabla u \cdot \nabla v - k^2 n^2 uv) d\Omega_\delta^+ + \int_{\Omega_\infty} (\nabla u \cdot \nabla v - k^2 uv) d\Omega_\infty = \int_{\Omega} f v d\Omega \quad (3.23)$$

En utilisant la formule de Green dans (3.23) et l'opérateur  $S_k$  introduit dans la sous-section précédente on montre que la solution  $u$  du problème (3.2) satisfait le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in X_\delta, \forall v \in X_\delta, \\ \int_{\Omega_\delta^+} \alpha(\nabla u \cdot \nabla v - k^2 n^2 uv) d\Omega_\delta^+ \\ \quad + \int_{\Omega_\infty} (\nabla u \cdot \nabla v - k^2 uv) d\Omega_\infty + \langle S_k u, v \rangle = \int_{\Omega} f v d\Omega. \end{array} \right. \quad (3.24)$$

La construction ci-dessus montre clairement que (3.24) est une formulation équivalente au problème (3.2). La formulation (3.24) est plus adaptée à l'analyse asymptotique qui suit. Les nouveaux paramètres d'espace de Hilbert sont plus appropriés pour établir des estimations et des résultats de convergence que celui de l'espace de Fréchet. Un autre avantage vient du fait que dont les fonctions tests et inconnues sont dans le même espace fonctionnel. Cela facilite l'exploitation des propriétés de coercivités de la formulation.

### 3.3 Le problème dans un domaine fixe

Dans cette section, on fait un changement d'échelle qui permet de formuler le problème (3.2) dans un domaine fixe.

#### 3.3.1 Changement d'échelle

#### 3.3.2 Formulation équivalente dans un domaine fixe

La formulation variationnelle (3.24) peut être réécrite de manière équivalente dans un domaine fixe par rapport à  $\delta$ , comme suit :

$$\begin{cases} u_\delta \in X, & \forall v \in X, \\ \delta a^+(\delta; u_\delta^+, v^+) + \delta b^+(\delta; u_\delta^+, v^+) + a_k^-(u_\delta^-, v^-) = \int_\Omega f v d\Omega, \end{cases} \quad (3.25)$$

où les formes bilinéaires  $a^+(\delta; \cdot, \cdot)$ ,  $b^+(\delta; \cdot, \cdot)$  sont définies sur l'espace de Hilbert  $X = X_N$  (respectivement  $X_D$ ) selon la condition aux limites tel que :

$$X_N = \{v = (v^+, v^-) \in H^1(\Omega^+) \times H^1(\Omega) | v^+(\cdot, 0) = v^- \text{ sur } \Gamma\},$$

$$X_D = \{v \in X_N | v^+(\cdot, 1) = 0\},$$

#### Remarque 3.4.

*Les espaces Sobolev  $H^s(\Omega^+)$  peuvent être définis à partir du patch de coordonnées locales de  $\Gamma$  comme les espaces habituels  $H^s(\Gamma)$ . Les théorèmes de trace pour  $t$  fixes (ici nous avons utilisé des traces pour  $t = 0$  et  $t = 1$ ) peuvent être dérivés de manière simple de leur homologue dans le demi-espace  $\mathbb{R}_+^3$ .*

Dans la suite, on note par :

$$u_\delta^+ = \widehat{u}|_{\Omega_\delta^+}, \quad v^+ = \widehat{v}.$$

et  $u_\delta = (u_\delta^+, u_\delta^-)$  où  $u_\delta^- = u|_\Omega$ , avec

$$a^+(\delta; u, v) =$$

$$\int_0^1 \int_\Gamma \alpha \left( (I + \delta t \mathcal{R})^{-2} \nabla_\Gamma u \cdot \nabla_\Gamma v + \frac{1}{\delta^2} \partial_t \widehat{u} \partial_t \widehat{v} \right) \det(I + \delta t \mathcal{R}) dt d\Gamma,$$

$$b^+(\delta; u, v) = - \int_0^1 \int_\Gamma \alpha k^2 n^2 u v \det(I + \delta t \mathcal{R}) d\Gamma dt,$$

$$a_k^-(u, v) = \int_\Gamma (\nabla u \cdot \nabla v - k^2 u v) d\Omega + \langle S_k u, v \rangle.$$

**Remarque 3.5.**

*Les définitions correspondantes des formes bilinéaires  $a^+(\delta; \cdot, \cdot)$  et  $b^+(\delta; \cdot, \cdot)$  selon les formules de transformation utilisées donnent facilement la formulation sur un domaine fixe dans le cas bidimensionnel.*

### 3.4 Stabilité par rapport à l'épaisseur $\delta$

Le terme  $\delta$  qui apparaît dans la forme  $a^+(\delta; \cdot, \cdot)$  dans la formulation (3.25) conduit pour un second membre plus général, à une solution  $u_\delta$  telle que les dérivées tangentielles  $\nabla_\Gamma u_\delta^+$  peuvent ne pas être bornées quand  $\delta$  tend vers 0. C'est le terme de perturbation singulière dont nous avons signalé à l'introduction. En outre, le signe du membre de gauche dans (3.25) pour  $v = u_\delta$  ne peut être contrôlé. Comme  $\nabla_\Gamma u_\delta^+$  ne sont pas bornées, il peut générer une solution  $u_\delta$  dépendant singulièrement de  $\delta$  sur  $\Omega$  aussi pour les seconds membres généraux. Heureusement, les membres de droite qui apparaissent dans l'analyse asymptotique du problème (3.25) se comportent de manière à compenser ces singularités du membre de gauche. Cependant, en raison du manque de coercivité dans la formulation variationnelle (3.25), on ne peut pas profiter de ce qui se précède d'une manière simple. En particulier, la formulation variationnelle n'est pas suffisante pour assurer la stabilité par rapport à l'épaisseur sur laquelle l'analyse asymptotique est basée. Par conséquent, cette stabilité constitue une partie principale de l'analyse asymptotique et il est donnée par un argument impliquant la régularité jusqu'à la limite du problème obtenu en négligeant complètement l'effet de la couche mince. Ainsi, le degré de régularité de la frontière  $\Gamma$  est un ingrédient essentiel dans l'analyse asymptotique développée par la suite. Par conséquent, l'extension aux problèmes avec des frontières singulières semble être une tâche non triviale. L'avis de Bendali-Lemrabet montre que la participation d'une singularité dans la géométrie

comme un "coin" ou un point conique se traduit par une profonde modification des phénomènes physiques qui doivent naturellement être traités de manière appropriée point de vue mathématique.

### 3.4.1 Alternative de Fredholm pour $\delta$ fixé

Nous constituons un outil principal pour les estimations de convergence dans l'analyse asymptotique et la solution  $u_\delta$  du problème (3.25) sera bornée par rapport à une topologie plus faible que celle de  $X$ , à savoir dans un espace de Hilbert plus grand  $Y = Y_N$  (respectivement  $Y_D$ ) selon la condition aux limites suivants :

$$Y_N = \{v = (v^+, v^-) \in H^1(0, 1; L^2(\Gamma)) \times H^1(\Omega) | v^+(\cdot, 0) = v^- \text{ sur } \Gamma\},$$

$$Y_D = \{v \in Y_N | v^+(\cdot, 0) = 0\}.$$

#### Remarque 3.6.

L'espace  $H^1(0, 1; L^2(\Gamma))$  est :

$$H^1(0, 1; L^2(\Gamma)) = \{u \in L^2(0, 1; L^2(\Gamma)); \partial_t u \in L^2(0, 1; L^2(\Gamma))\}$$

$Y$  est muni de la norme canonique suivante :

$$\|v\|_Y^2 = \delta \|\nabla_\Gamma v^+\|_{0, \Omega^+}^2 + \delta^{-1} \|\partial_t v^+\|_{0, \Omega^+}^2 + \|v^-\|_{1, \Omega^+}^2. \quad (3.26)$$

Pour  $t$  fixé, la fonction trace  $t \rightarrow u(\cdot, t)$  est continue de  $t$  à valeurs dans  $L^2(\Gamma)$ . Nous aurons besoin de définir les deux formes bilinéaires continues dans  $H^1(\Omega)$  suivantes :

$$a^-(u, v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v d\Omega + \langle Su, v \rangle,$$

$$b_k^-(u, v) = - \int_\Omega k^2 u v d\Omega + \langle R_k u, v \rangle.$$

Alors,

$$\begin{aligned} a^-(u, u) &= \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u d\Omega + \langle Su, u \rangle, \\ &= \int_\Omega (\nabla u)^2 d\Omega + \langle Su, u \rangle, \\ &= \|\nabla u\|^2 + \langle Su, u \rangle, \end{aligned}$$

d'après (3.19) et l'inégalité de Poincaré,  $\exists c_1, c_2 > 0$  tel que :

$$\begin{aligned} \|\nabla u\|^2 + \langle Su, u \rangle &\geq \frac{1}{c_1} \|u\|_{1,\Omega}^2 + c_2 \|u\|_{\frac{1}{2},\Sigma}^2 \\ &\geq \left(\frac{1}{c_1} + c_2\right) \|u\|_{1,\Omega}^2 \end{aligned}$$

donc, on pose  $c = \frac{1}{c_1} + c_2$ , alors on peut déduire directement l'estimation :

$$\exists c > 0 : a^-(u, u) \geq c \|u\|_{1,\Omega}^2 \quad \forall u \in H^1(\Omega). \quad (3.27)$$

Donc, pour tout  $u \in X$ , le problème suivant

$$\begin{cases} p_\delta \in X \quad \forall v \in X, \\ \delta a^+(\delta; p_\delta^+, v^+) + a^-(p_\delta^-, v^-) = \delta b^+(\delta; u^+, v^+) + b_k^-(u^-, v^-). \end{cases} \quad (3.28)$$

admet, par le lemme de Lax-Milgram, une unique solution  $T_\delta u = p_\delta \in X$  qu'il permet donc de définir l'opérateur de perturbation singulière  $T_\delta$  de  $Y$  dans  $X$ .

En outre, on a que  $R_k$  est un opérateur linéaire continu de  $H^{\frac{1}{2}}(\Sigma)$  dans  $H^{-\frac{1}{2}}(\Sigma)$ . En utilisant la théorie des opérateurs pseudo-différentiels (cf., [21], [11]) et en vertu de la régularité des systèmes elliptiques [8], on montre que  $R_k$  est continu de  $H^{\frac{1}{2}}(\Sigma)$  dans  $H^{\frac{1}{2}}(\Sigma)$ . L'injection  $H^{\frac{1}{2}}(\Sigma) \hookrightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Sigma)$  étant compacte, donc  $R_k$  est compact de  $H^{\frac{1}{2}}(\Sigma)$  dans  $H^{-\frac{1}{2}}(\Sigma)$  et d'après, le lemme de compacité locale de Rellich de l'espace  $H^1$  dans  $L^2$ , on en déduit que  $T_\delta$  est un opérateur compact de  $Y$  dans  $X$  pour tout  $\delta > 0$  ( et par conséquent de  $Y$  dans  $Y$ ).

**Proposition 3.1** (estimations a priori).

*Il existe une constante positive  $c$  telle que*

$$\begin{cases} \|\nabla_\Gamma p_\delta^+\|_{0,\Omega^+} \leq c \delta^{-\frac{1}{2}} \|u\|_Y, & (1) \\ \|\partial_t p_\delta^+\|_{0,\Omega^+} \leq c \delta^{\frac{1}{2}} \|u\|_Y, & (2) \\ \|p_\delta^-\|_{1,\Omega^+} \leq c \|u\|_Y. & (3) \end{cases} \quad (3.29)$$

*pour tout  $u \in Y$  et tout  $\delta > 0$ .*

*Preuve.*

On a la forme bilinéaire  $a^+(\delta, \dots)$  par rapport à  $\delta$

$$a^+(\delta; p_\delta^+, v^+) =$$

$$\int_0^1 \int_\Gamma (I + \delta t \mathcal{R})^{-1} \nabla_\Gamma p_\delta^+ \cdot \nabla_\Gamma v^+ d\Gamma dt + \frac{1}{\delta^2} \int_0^1 \int_\Gamma \partial_t p_\delta^+ \partial_t v^+ \det(I + \delta t \mathcal{R}) d\Gamma dt$$

Donc, on posant  $v = p_\delta$  et il existe deux constantes positives  $\delta_0$  et  $c$  telles que

$$c^{-1} \leq \|I + \delta t \mathcal{R}\|_{L^\infty(\Omega^+)} + \|(I + \delta t \mathcal{R})^{-1}\|_{L^\infty(\Omega^+)} \leq c \quad \forall \delta, \quad 0 < \delta \leq \delta_0.$$

on obtient

$$a^+(\delta; p_\delta^+, p_\delta^+) \geq c \left( \delta \|\nabla_\Gamma p_\delta^+\|_{0, \Omega^+}^2 + \delta^{-1} \|\partial_t p_\delta^+\|_{0, \Omega^+}^2 \right)$$

et on a

$$\delta a^+(\delta; p_\delta^+, p_\delta^+) + a^-(p_\delta^-, p_\delta^-) = \delta b^+(\delta; u^+, p_\delta^+) + b_k^-(u^-, p_\delta^-)$$

et par conséquent, il existe  $c > 0$  et à l'aide des estimations de coercivité (3.27) on a

$$\delta \|\nabla_\Gamma p_\delta^+\|_{0, \Omega^+}^2 + \delta^{-1} \|\partial_t p_\delta^+\|_{0, \Omega^+}^2 + \|p_\delta^-\|_{1, \Omega^+}^2 \leq c \|u\|_Y (\delta \|p_\delta^+\|_{0, \Omega^+} + \|p_\delta^-\|_{1, \Omega^+}).$$

En utilisant l'estimation standard à partir de l'inégalité suivante :

$$\|p_\delta^+\|_{0, \Omega^+} \leq c (\|\partial_t p_\delta^+\|_{0, \Omega^+} + \|p_\delta^-\|_{1, \Omega^+}), \quad (3.30)$$

alors,

$$\begin{aligned} & \delta \|\nabla_\Gamma p_\delta^+\|_{0, \Omega^+}^2 + \delta^{-1} \|\partial_t p_\delta^+\|_{0, \Omega^+}^2 + \|p_\delta^-\|_{1, \Omega^+}^2 \\ & \leq c \|u\|_Y (\delta^{\frac{1}{2}} \|\nabla_\Gamma p_\delta^+\|_{0, \Omega^+} + \delta^{-\frac{1}{2}} \|\partial_t p_\delta^+\|_{0, \Omega^+} + \|p_\delta^-\|_{1, \Omega^+}). \end{aligned}$$

Ceci implique les estimations (3.29). □

### 3.4.2 Passage à la limite dans l'alternative de Fredholm

Les estimations (3.29) impliquent

$$\|p_\delta\|_Y \leq c \|u\|_Y$$

avec une constante  $c$  indépendante de  $u$  dans  $Y$  pour tout  $\delta > 0$ .

Il existe alors une sous-suite notée toujours  $p_\delta$  et un élément  $p_0 \in Y$ , telles que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} p_\delta = p_0 \quad \text{qui converge faiblement dans } Y$$

Nous allons, maintenant, caractériser  $p_0^-$  comme étant l'unique solution d'un problème variationnel et on définira  $p_0^+$  à l'aide de sa trace  $p_0^-$  sur  $\Gamma$ . Soit

$$H_{0,\Gamma}^1 = \{v \in H^1(\Omega) | v = 0 \text{ sur } \Gamma\}.$$

On note par  $Z(\Omega)$  l'espace  $H_{0,\Gamma}^1$  ou  $H^1$  selon la condition aux limites considérée. La proposition suivante caractérise  $p_0^-$ .

**Proposition 3.2.**

*$p_0^-$  est l'unique solution du problème variationnel suivant :*

$$\begin{cases} p_0^- \in Z(\Omega) \quad \forall v^- \in Z(\Omega), \\ a^-(p_0^-, v^-) = b_k^-(u^-, v^-). \end{cases} \quad (3.31)$$

De plus,  $p_0^+$  est la fonction constante en  $t$  sur  $\Omega^+$  telle que  $p_0 = (p_0^+, p_0^-) \in Y$ , où

$$p_0^+(\cdot, t) = p_0^- \text{ sur } \Gamma, \quad t \in (0, 1), \quad (3.32)$$

et,  $p_0$  est un élément de  $X$ .

*Preuve.*

A l'aide de l'estimation (3.29-(2)-) on montre que :  
si  $\delta = 0$

$$0 \leq \|\partial_t p_0^+\|_{0,\Omega^+} \leq 0,$$

donc,  $\|\partial_t p_0^+\|_{0,\Omega^+} = 0$ , i.e :  $\partial_t p_0^+ = 0$ .

on a :

$$p_0^+(m, t) = p_0^-(m) + \int_0^t \partial_t p_0^+(m, s) ds \quad m \in \Gamma \quad (3.33)$$

on obtient alors directement :

$$p_0^+(\cdot, t) = p_0^- \text{ sur } \Gamma, \quad t \in (0, 1).$$

Soit maintenant,  $v^-$  une fonction fixée régulière dans  $Z(\Omega)$ , la régularité de  $v^-$  sur  $\Gamma$  permet de prolonger  $v^-$  dans  $\Omega^+$ , et  $v = (v^+, v^-)$  a les mêmes propriétés que  $p_0$ . Pour la condition de Dirichlet, on prend simplement  $v^+ = 0$ . Dans le cas Neumann, on utilise

1.  $\partial_t v^+ = 0$ ,
2.  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \delta^{\frac{1}{2}} \nabla_{\Gamma} v^+ = 0$ ,
3. et l'estimation (3.29-(2)-)

permet de déduire que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \delta a^+(\delta; p_\delta^+, v^+) = 0.$$

En passant à la limite dans (3.28), on voit que le problème (??) est satisfait pour des fonctions  $v^-$  régulières. Comme toute fonction de  $Z(\Omega)$  peut être approchée par une suite de fonctions régulières, on conclut que  $p_0^-$  est solution de (??) qui admet la formulation forte suivante

$$\left\{ \begin{array}{l} p_0^- \in H^1(\Omega), \\ \Delta p_0^- = k^2 u^- \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega), \\ p_0^- = 0 \quad \text{dans } H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \quad \text{ou} \quad \partial_t p_0^- = 0 \quad \text{dans } H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), \\ \partial_n p_0^- + S p_0^- = R_k u^- \quad \text{dans } H^{-\frac{1}{2}}(\Sigma). \end{array} \right. \quad (3.34)$$

Dans l'équation ci-dessus,  $n$  indique la normale à  $\Gamma$  : les résultats de régularité standards pour l'équation de Laplace avec une condition de Dirichlet ou de Neumann sur le bord, impliquent que  $p_0^-$  est  $H^3$  au voisinage de  $\Gamma$ . Comme conséquence  $p_0^-$  est dans  $H^1(\Gamma)$ , ce qui conduit à un élément  $p_0$  dans  $X$ . □

Puisque  $p_0$  est déterminé d'une manière unique, alors c'est toute la suite  $\{p_\delta\}_{\delta>0}$  qui converge vers  $p_0$ . On peut définir un opérateur

$$\left| \begin{array}{l} T_0 : Y \longrightarrow X, \\ T_0 u = p_0, \quad \forall u \in Y. \end{array} \right.$$

où  $T_0$  est borné.

### 3.4.3 Théorème de stabilité

La stabilité nécessite une prise en compte correcte de la convergence de  $\{p_\delta\}_{\delta>0}$  vers  $p_0$ . On utilise pour cela la régularité de  $p_0^-$  au voisinage de  $\Gamma$

#### **Proposition 3.3.**

*Il existe une constante  $c > 0$  indépendante de  $\delta > 0$  et pour tout  $u \in Y$  tel que*

$$\|p_\delta - p_0\|_Y \leq c \delta^{\frac{1}{2}} \|u\|_Y. \quad (3.35)$$

*Preuve.*

Pour démontrer la proposition, nous considérons les deux conditions aux limites séparément

**Condition de Neumann** Nous avons à l'aide de (3.28) et (??) respectivement de  $p_\delta$  et de  $p_0$ , nous pouvons écrire

$$\delta a^+(\delta; p_\delta^+ - p_0^+, v^+) + a^-(p_\delta^- - p_0^-, v^-) = \delta b^+(\delta; u^+, v^+) - \delta a^+(\delta; p_0^+, v^+). \quad (3.36)$$

Commençons par les estimations de la forme bilinéaire  $a^+(\delta; \cdot, \cdot)$  par rapport à  $\delta$ . on a

$$\begin{aligned} a^+(\delta; p_0^+, v^+) &= \int_0^1 \int_\Gamma (I + \delta t \mathcal{R})^{-1} \nabla_\Gamma p_0^+ \cdot \nabla_\Gamma v^+ d\Gamma dt \\ &\quad + \frac{1}{\delta^2} \int_0^1 \int_\Gamma \partial_t p_0^+ \partial_t v^+ \det(I + \delta t \mathcal{R}) d\Gamma dt. \end{aligned}$$

En utilisant le fait que  $\partial_t p_0^+ = 0$ , la forme  $a^+(\delta; p_0^+, v^+)$  peut être estimé par :

$$|a^+(\delta; p_0^+, v^+)| \leq c \|\nabla_\Gamma p_0^+\|_{0, \Omega^+} \|\nabla_\Gamma v^+\|_{0, \Omega^+}$$

La clé maintenant est d'utiliser la définition de  $p_0^+$  et la régularité d'ordre supérieur de  $p_0^-$  pour obtenir les estimations

$$\|\nabla_\Gamma p_0^+\|_{0, \Omega^+} \leq c \|p_0^-\|_{1, \Gamma},$$

$$\|p_0^-\|_{1, \Gamma} \leq c \|u^-\|_{0, \Omega}.$$

En notant  $\varpi = p_\delta - p_0$  et en utilisant l'estimation (3.30) on obtient :

$$\|\varpi^+\|_{0, \Omega^+} \leq c (\|\partial_t \varpi^+\|_{0, \Omega^+} + \|\varpi^-\|_{1, \Omega^+}),$$

on a

$$a^+(\delta; \varpi^+, \varpi^+) + a^-(\varpi^-, \varpi^-) = \delta b^+(\delta; u^+, \varpi^+) - \delta a^+(\delta; p_0^+, \varpi^+)$$

de (3.27) :

$$a^-(\varpi^-, \varpi^-) \geq c \|\varpi^-\|_{1, \Omega}^2$$

et

$$a^+(\delta; \varpi^+, \varpi^+) \geq c \left( \delta \|\nabla_\Gamma \varpi^+\|_{0, \Omega^+}^2 + \frac{1}{\delta} \|\partial_t \varpi^+\|_{0, \Omega^+}^2 \right)$$

donc

$$\begin{aligned} a^+(\delta; \varpi^+, \varpi^+) + a^-(\varpi^-, \varpi^-) \\ \geq c \left( \delta \|\nabla_\Gamma \varpi^+\|_{0, \Omega^+}^2 + \frac{1}{\delta} \|\partial_t \varpi^+\|_{0, \Omega^+}^2 + \|\varpi^-\|_{1, \Omega}^2 \right) \end{aligned}$$

par l'inégalité de Cauchy-Schwarz et par la continuité des formes bilinéaires  $a^+$  et  $b^+$  on démontre qu'elles sont bornées

$$\begin{aligned} \delta b^+(\delta; u^+, \varpi^+) - \delta a^+(\delta; p_0^+, \varpi^+) \\ \leq \delta c \|u\|_Y \left[ \|\nabla_\Gamma \varpi_\delta^+\|_{0,\Omega^+} + \|\partial_t \varpi_\delta^+\|_{0,\Omega^+} + \|\varpi_\delta^-\|_\Omega \right] \end{aligned}$$

Finalement nous obtenons

$$\begin{aligned} \delta \|\nabla_\Gamma \varpi^+\|_{0,\Omega^+}^2 + \frac{1}{\delta} \|\partial_t \varpi^+\|_{0,\Omega^+}^2 + \|\varpi^-\|_{1,\Omega}^2 \\ \leq \delta c \|u\|_Y \left[ \|\nabla_\Gamma \varpi_\delta^+\|_{0,\Omega^+} + \|\partial_t \varpi_\delta^+\|_{0,\Omega^+} + \|\varpi_\delta^-\|_\Omega \right] \end{aligned}$$

Ceci implique alors à l'aide de (3.26) que

$$\begin{aligned} \|\varpi_\delta\|_Y^2 &\leq \delta c \|u\|_Y \left[ \|\nabla_\Gamma \varpi_\delta^+\|_{0,\Omega^+} + \|\partial_t \varpi_\delta^+\|_{0,\Omega^+} + \|\varpi_\delta^-\|_\Omega \right] \\ &\leq \delta^{\frac{1}{2}} c \|u\|_Y \left[ \delta^{\frac{1}{2}} \|\nabla_\Gamma \varpi_\delta^+\|_{0,\Omega^+} + \delta^{-\frac{1}{2}} \|\partial_t \varpi_\delta^+\|_{0,\Omega^+} + \|\varpi_\delta^-\|_\Omega \right] \\ &\leq \delta^{\frac{1}{2}} c \|u\|_Y \|\varpi_\delta\|_Y \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\|p_\delta - p_0\|_Y \leq c \delta^{\frac{1}{2}} \|u\|_Y$$

**Condition de Dirichlet** La différence du cas précédent est le faite que  $p_\delta^-$  n'est pas une fonction test valide pour le problème (??). En utilisant la formule de Green et la régularité de  $p_0$  sur  $\Gamma$  on écrit

$$a^-(p_0^-, v^-) = b_k^-(u^-, v^-) + \int_\Gamma \partial_n p_0^- v^- d\Gamma,$$

pour toute fonction test  $v^- \in H^1(\Omega)$ . Il faut rappeler la formule (3.33) que

$$p_\delta^+(\cdot, t) = p_\delta^-(\cdot) + \int_0^t \partial_t p_\delta^+(\cdot, s) ds.$$

avec la condition  $p_\delta^+(\cdot, 1) = 0$  sur  $\Gamma$  impliquent

$$\|p_\delta^+\|_{0,\Omega^+} + \|p_\delta^-\|_{0,\Gamma} \leq c \|\partial_t p_\delta^+\|_{0,\Omega^+}$$

En utilisant ensuite l'estimation de régularité de  $p_0^-$  suivante :

$$\|\partial_n p_0^-\|_{0,\Gamma} \leq c \|u^-\|_{0,\Omega}$$

et en procédant comme pour la condition de Neumann, permet d'obtenir le résultat suivant :

$$\delta \|\nabla_{\Gamma} p_{\delta}^{+}\|_{0,\Omega^{+}}^2 + \delta^{-1} \|\partial_t p_{\delta}^{+}\|_{0,\Omega^{+}}^2 + \|p_{\delta}^{-} - p_0^{-}\|_{1,\Omega}^2 \leq c \|u\|_Y \|\partial_t p_{\delta}^{+}\|_{0,\Omega^{+}}.$$

Comme conséquence directe on obtient

$$\|p_{\delta} - p_0\|_Y \leq c \delta^{\frac{1}{2}} \|u\|_Y.$$

□

La proposition précédente va nous permettre ainsi de démontrer la propriété de stabilité par rapport à  $\delta$  de la solution du problème (3.25). Il se compose à gauche de l'opérateur  $I + T_{\delta}$ , uniformément en  $\delta$  où  $I$  est maintenant l'identité de  $Y$ .

**Lemme 3.3.**

*Il existe une constante  $\gamma > 0$  telle que*

$$\|(I + T_{\delta})u\|_Y \geq \gamma \|u\|_Y \quad \forall u \in Y \quad (3.37)$$

*pour tout  $\delta \geq 0$ .*

*Preuve.*

On montre que  $T_0$  est un opérateur compact de  $Y$  dans  $Y$  (et même de  $X$  dans  $X$ ). Dans l'intention d'utiliser l'alternative de Fredholm, nous allons montrer que  $(I + T_0)$  est injectif. Soit  $w \in Y$  qui satisfait

$$(I + T_0)w = 0$$

Pour un tel  $w \in X$ ; nous utilisons l'opérateur de Steklov-poincaré pour prolonger  $w^{-}$  à tout  $\Omega_{\infty}$ . Alors,  $w^{-}$  est une solution du problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} w^{-} \in H_{loc}^1(\bar{\Omega}_{\infty}), \\ \Delta w^{-} + k^2 w^{-} = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega_{\infty}), \\ w^{-} = 0 \quad \text{ou} \quad \partial_n w^{-} = 0 \quad \text{sur } \Gamma, \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} |x| (\nabla w^{-} \cdot \frac{x}{|x|} - ikw^{-}) = 0. \end{array} \right. \quad (3.38)$$

En vertu des résultats d'unicité de la solution de ce type de problème (3.38), le théorème 3.1, on conclut que  $w^{-} = 0$ . Puisque  $(T_0 w)^{+} = -w^{-}$ ; on déduit que  $w = 0$  car  $(T_0 w)^{+}(\cdot, t) = w^{-}(\cdot)$  (d'après la proposition

??). Donc  $(I + T_0)$  est injectif. L'alternative de Fredholm permet donc de déduire qu'il existe une constante  $\gamma_0 > 0$  telle que

$$\|u + T_0u\|_Y \geq \gamma_0 \|u\|_Y$$

maintenant, on a

$$\|u + T_0u\|_Y = \|u + T_\delta u + T_0u - T_\delta u\|_Y,$$

$$\|u + T_0u\|_Y \leq \|u + T_\delta u\| + \|(T_\delta u - T_0u)\|_Y,$$

donc

$$\|u + T_0u\|_Y \leq \|u + T_\delta u\| + \|T_\delta u - T_0u\|_Y.$$

on obtient à l'aide de l'estimation (3.35) et de l'inégalité ci-dessus

$$\gamma_0 \|u\|_Y \leq \|u + T_\delta u\| + c\delta^{\frac{1}{2}} \|u\|_Y$$

$$\|u + T_\delta u\| \geq (\gamma_0 - c\delta^{\frac{1}{2}}) \|u\|_Y$$

Finalement, pour  $\delta$  petit, d'où

$$\|(I + T_\delta)u\|_Y \geq \gamma \|u\|_Y.$$

□

### **Théorème 3.3.**

Soit  $\{L_\delta\}_{\delta>0}$  une famille de formes linéaires sur  $X$  telles que pour tout  $\delta > 0$  et  $v \in X$  on a :

$$|L_\delta v| \leq \ell(\delta) \left\{ \delta^{\frac{1}{2}} \|\nabla_\Gamma v^+\|_{0,\Omega^+} + \delta^{-\frac{1}{2}} \|\partial_t v^+\|_{0,\Omega^+} + \|v^-\|_{1,\Omega} \right\}$$

Alors, il existe une constante  $c$  indépendante de  $\delta > 0$ , telle que la solution du problème variationnel suivant :

$$\begin{cases} u_\delta \in X \quad \forall v \in X, \\ \delta a^+(\delta; u_\delta^+, v^+) + \delta b^+(\delta; u_\delta^+, v^+) + a_k^-(u_\delta^-, v^-) = L_\delta v \end{cases}$$

satisfait l'estimation

$$\|u_\delta\|_Y \leq c\ell(\delta), \tag{3.39}$$

où  $\ell(\delta)$  est une fonction de  $\delta$  non nécessairement bornée quand  $\delta \rightarrow 0$ .

*Preuve.*

On définit  $w_\delta = (I + T_\delta)u_\delta$ . Alors  $w_\delta$  est solution du problème variationnel et coercif suivant

$$\begin{cases} w_\delta \in X \quad \forall v \in X, \\ \delta a^+(\delta; w_\delta^+, v^+) + a^-(w_\delta^-, v^-) = L_\delta v \end{cases}$$

En posant  $v = w_\delta$ , on obtient grâce à l'estimation (3.27) et par définition on a

$$\begin{aligned} & \delta a^+(\delta; w_\delta^+, w_\delta^+) + a^-(w_\delta^-, w_\delta^-) \\ & \geq M \left[ \delta \|\nabla_\Gamma w_\delta^+\|_{0,\Omega^+}^2 + \delta^{-1} \|\partial_t w_\delta^+\|_{0,\Omega^+}^2 + \|w_\delta^-\|_{1,\Omega^+}^2 \right] \end{aligned}$$

alors

$$\delta \|\nabla_\Gamma w_\delta^+\|_{0,\Omega^+}^2 + \delta^{-1} \|\partial_t w_\delta^+\|_{0,\Omega^+}^2 + \|w_\delta^-\|_{1,\Omega^+}^2 \leq |L_\delta w_\delta|$$

Ce qui donne directement

$$\begin{aligned} & \delta \|\nabla_\Gamma w_\delta^+\|_{0,\Omega^+}^2 + \delta^{-1} \|\partial_t w_\delta^+\|_{0,\Omega^+}^2 + \|w_\delta^-\|_{1,\Omega^+}^2 \\ & \leq \ell(\delta) \left( \delta^{\frac{1}{2}} \|\nabla_\Gamma w_\delta^+\|_{0,\Omega^+} + \delta^{-\frac{1}{2}} \|\partial_t w_\delta^+\|_{0,\Omega^+} + \|w_\delta^-\|_{1,\Omega} \right) \end{aligned}$$

Grâce aux les estimations a priori (3.29), on a les trois inégalités suivants :

$$\|\nabla_\Gamma w_\delta^+\|_{0,\Omega^+} \leq c\delta^{-\frac{1}{2}}\ell(\delta)$$

$$\|\partial_t w_\delta^+\|_{0,\Omega^+} \leq c\delta^{\frac{1}{2}}\ell(\delta)$$

$$\|w_\delta^-\|_{1,\Omega} \leq c\ell(\delta)$$

Ceci implique

$$\|w_\delta\|_Y \leq c\ell(\delta)$$

on a  $w_\delta = (I + T_\delta)u_\delta$  et d'après le lemme de stabilité 3.3. Ceci implique alors l'estimation (3.39). □

Finalement, c'est cette dernière estimation qui conduit à l'argument de stabilité et qui, nous dit que la norme de  $Y$  de la solution (3.25) est le même ordre en  $\delta$  que la perturbation du second membre.

---

## CONCLUSION

A fin de clôturer ce travail nous rappelons brièvement les principaux idées obtenus tout en mettant.

Notre étude commence par un rappel de quelques résultats classiques de problème de Helmholtz et des résultats d'existence-unicité et la régularité de solution.

Nous nous sommes ensuite concentré sur l'étude du problèmes de Helmholtz avec une diffraction d'une onde électromagnétique par un obstacle revêtu d'une couche mince.

Nous pouvons faire le même travail avec d'autres types d'équations et d'autres situations par exemple la couche mince périodique.

---

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] S. Agmon, A. Douglis, and L. Nirenberg. Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions ii. *Communications on pure and applied mathematics*, 17(1) :35–92, 1964.
- [2] A. Bendali. Equations intégrales en électromagnétisme. *Cours BEM INSA Toulouse*, 2013.
- [3] A. Bendali and K. Lemrabet. The effect of a thin coating on the scattering of a time-harmonic wave for the helmholtz equation. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 56(6) :1664–1693, 1996.
- [4] P. Bénéilan and J. Robert. *Journées d’analyse non linéaire : proceedings, Besançon, France, June 1977*, volume 665. Springer, 2006.
- [5] Guy Bouchitté. Analyse limite de la diffraction d’ondes électromagnétiques par une structure mince. 1990.
- [6] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle Théorie et applications*. Masson, Paris, 1987.
- [7] J. Chazarain and A. Piriou. Introduction to the theory of linear partial differential equations. 1982.
- [8] Jacques Chazarain and Alain Piriou. *Introduction to the theory of linear partial differential equations*. Elsevier, 2011.
- [9] Carmo Do. Mp : Differential geometry of curves and surfaces prentice hall. *Englewood Cliffs, NJ*, 1976.
- [10] Björn Engquist and Jean-Claude Nédélec. Effective boundary conditions for acoustic and electromagnetic scattering in thin layers. Technical report, Technical Report of CMAP, 278, 1993.

## BIBLIOGRAPHIE

---

- [11] L Hörmander. Pseudodifferential operators and hypoelliptic equations ann. *Math.(2)*, 83 :129–209, 1966.
- [12] Keddour Lemrabet. Problème aux limites de ventcel dans un domaine non régulier. *CR Acad. Sci. Paris Sér. I Math*, 300(15) :531–534, 1985.
- [13] MA Leontovich. Approximate boundary conditions for the electromagnetic field on the surface of a good conductor. *Investigations on radiowave propagation*, 2 :5–12, 1948.
- [14] JL. Lions and E. Magenes. Non-homogeneous boundary value problems and applications. 1972.
- [15] A. Menguelti. *Analyse asymptotique de quelques problèmes de couches minces : Conditions aux limites approchées*. PhD thesis, UMMTO, 2011.
- [16] J. Nédélec. *Acoustic and electromagnetic equations : integral representations for harmonic problems*. Springer Science & Business Media, 2001.
- [17] R. S. Phillips. Wave equation. *Partial differential equations*, 23 :153, 1973.
- [18] F. Rellich. Über das asymptotische verhalten der lösungen von  $\delta u + \lambda u = 0$  in unendlichen gebieten. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 53 :57–65, 1943.
- [19] A. Robert and J. Fournier. *Sobolev spaces*. Elsevier, 2003.
- [20] RG Rojas and Z Al-hekail. Generalized impedance/resistive boundary conditions for electromagnetic scattering problems. *Radio Science*, 24(1) :1–12, 1989.
- [21] Michael Taylor. Pseudo-differential operators. *Bull. Amer. Math. Soc*, 82 :249–250, 1976.
- [22] M. Tlemcani. *Diffraction d’ondes par des couches minces. Couches parfaitement adaptées stables pour les ondes courtes en eau peu profonde*. PhD thesis, 2010.
- [23] John Leonidas Volakis, Thomas Senior, and Jian-Ming Jin. Derivation and application of a class of generalized boundary conditions-ii. Technical report, University of Michigan. Radiation Laboratory, 1989.
- [24] C.H. Wilcox. Scattering theory for the d’alembert equation in exterior domains. *Bull. Amer. Math. Soc*, 82 :465–468, 1976.