

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

جامعة غرداية

Université de Ghardaïa

N° d'enregistrement

/...../...../...../...../.....



كلية العلوم والتكنولوجيا

Faculté des Sciences et de la Technologie

قسم الآلية و الكهروميكانيك

Département de Automatique et électromécanique

Mémoire de fin d'étude, en vue de l'obtention du diplôme

Master

Domaine : Sciences et technologie.

Filière : Automatique.

Spécialité : Automatique et systèmes.

Thème

**Commande linéaire et non linéaire appliquée à
un pendule inversé**

Présenté par :

CHERIF Kotaiba

HINANA Bilal Habib Rahmane

Devant le jury composé de :

FIHAKHIR Amine Mehdi

MAB

Université

Encadrant

NACER Hacene

Grade

Université

Examinateur

BOUKHARI Hamed

Grade

Université

Examinateur

Année universitaire 2021/2022

Dédicace

Je dédie ce modeste travail en signe de reconnaissance et de respect.

À ceux qui m'ont soutenu au long de mes études, qui m'ont toujours poussé vers le chemin du savoir, les deux êtres les plus chères au monde :

À l'esprit de ma mère que Dieu bénisse son âme.

À Mon Cher père que Dieu le puissamment et garde en bonne santé.

À mes introuvables frères et sœurs pour leurs encouragements et leur soutien le long de mon parcours.

À toute ma famille sans exception.

À mon Binôme : Bilal

À mes amis de l'université de Ghardaïa.

À tous les étudiants d'Automatique.

À tous les gens qui m'ont aimé et m'ont aidé durant toute ma formation.

À tous ceux qui me sont cher(e)s.

Mr. Sherif Ktaiba.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail A ceux qui m'ont soutenu au long de mes études, qui m'ont toujours poussé vers le chemin du savoir, à ma source d'amour et d'affection, les deux êtres les plus chères au monde.

Mes Chers parents

À mes frères.

À mes sœurs.

À ma grande famille: HINANA.

À mon Binôme.

À tous mes amis.

À mes amis de l'université de GHARDAIA.

À tous ceux qui me sont cher(e)s.

Mr Bilal HONANA.

Remerciement

Nous remercions DIEU tout puissant qui nous a protégés le long de notre cursus d'étude.

*Nous tenons à exprimer notre reconnaissance à notre encadreur Monsieur **FIHAKHIR Amine Mehdi**, qui nous a aidé pour faire ce travail et sa confiance et de son aide scientifique et qui par son expérience et sa compétence.*

Nous tenons remercier vivement Monsieur le l'examineur d'avoir accepté de juger ce travail.

Pour finir nous remercions vont également à tous ceux qui de près ou de loin ma apporté aide et encouragement. Qu'ils trouvent ici l'expression de notre profonde gratitude ainsi que toutes les personnes ayant contribué de près ou de loin à la réussite de ce travail.

Sommaire

Remerciement

Liste des figures

Liste des tableaux

Liste des symboles et abréviations

Résumé

INTRODUCTION GENERALE

Introduction générale 1

CHAPITRE I : DESCRIPTION ET MODELISATION DU SYSTEME PENDULE INVERSE

I.1. Introduction5
I.2. Qu'est-ce qu'un pendule ?5
.....6
I.3. Intérêt de l'étude d'un pendule inversé6
I.3.1. Domaine de la médecine6
I.3.2. Domaine de Robotique7
I.3.3. Dans la recherche7
I.4. Modélisation d'un pendule inversé8
I.4.1. Energie cinétique du système9
I.4.2. Energie potentielle du système10
I.4.3. Equations d'Euler-Lagrange10
I.4.4 Linéarisation :13
I.4.5 Modèle d'état de l'ensemble chariot-pendule16
I.4.6. Fonction de transfert de l'ensemble chariot-pendule17
I.5. Elaboration du modèle avec SIMULINK:19
I.6. Résultat de simulation19
I.7. Conclusion21

CHAPITRE II : COMMANDES LINEAIRE D'UN PENDULE INVERSE

II.1 Introduction23
II.2 Contrôleur PID23
II.3. Méthodes de réglage PID25

II.3.1. Méthode de la réponse indicielle.....25

II.3.2. Méthode de réponse en fréquence.....26

II.4. Conception et simulation de contrôleur28

II.4.1. Résultats et discussion.....28

II.5. Commande par retour d'état30

II.5.1. Retour d'état complet avec bouclage intégrale.....32

II.5.2. Résultats et discussion.....32

II.6 Contrôleur LQR (Régulateur Linéaire Quadratique)35

II.6.1. LQR avec contrôleur d'action intégrale.....36

II.6.2. Résultats et discussion.....37

II.7. Comparaison40

II.8. Conclusion.....41

CHAPITRE III : COMMANDE NON LINEAIRE D'UN PENDULE INVERSE

III.1. Introduction.....43

III.2. Logique floue.....43

III.2.1. Concepts de base de la logique floue.....43

III.2.1.1. Ensemble flou43

III.2.1.2. Univers du discours44

III.2.1.3. Variables et valeurs linguistiques44

III.2.2. Structure d'un contrôleur flou.....45

III.2.2.1. Bloc de fuzzification.....46

III.2.2.2. Base de règles46

III.2.2.3. Système d'inférence floue46

III.2.2.4. Défuzzification.....47

III.2.3. Flou avec PI52

III.2.4. Résultats et discussion.....53

III.3. Commande par mode glissant.....57

III.3.1 Surface de glissement57

III.3.2. Conception de la commande par mode de glissement.....58

III.3.2.1. Fonction de signe pour la commande du mode glissant59

III.3.2.2. Fonction Sat pour la commande du mode glissant.59

III.3.2.3. Fonction intégrale pour la commande en mode glissant.....	60
III.3.3. Résultats et discussion	61
III.4. Linéarisation à rétroaction	64
III.4.1. Dérivée de lie	64
III.4.2. Résultats et discussion	66
III.5 Comparaison	69
III.6. Conclusion	70
CONCLUSION GENERALE	
Conclusion générale.....	72
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUE	
Références bibliographiques.....	74

Liste des figures

Figure I.1: Pendule inversé en coordonnées généralisées x et θ	6
Figure I.2: Corps de l'être humain vu comme un double pendule inversé.....	6
Figure I.3: Segway	7
Figure I.4: Modèle d'un pendule inversé.	8
Figure I.5: Bloc Simulink non linéaire.	19
Figure I.6: Réponse de système non linéaire.	20
Figure I.7: Réponse de système linéaire.	20
Figure II. 1: Structure du contrôleur PID.....	24
Figure II. 2 : Régulateur proportionnel.	27
Figure II. 3: Bloc Simulink d'un pendule inversé sous le contrôleur PID.....	28
Figure II.4 : Réponse du pendule inversé sous le contrôleur PID.	29
Figure II.5: Réponse du pendule inversé avec perturbation sous contrôleur PID.	30
Figure II.6: Contrôleur de retour d'état.	31
Figure II.7: Réponse du pendule inversé sous la commande par retour d'état.....	33
Figure II.8: Réponse du pendule inversé avec perturbation sous la commande par retour d'état.	34
Figure II.9: Schéma du régulateur quadratique linéaire (LQR).....	35
Figure II.10: Schéma fonctionnel LQR+I.....	37
Figure II.11: la réponse d'un pendule inversé sous contrôleur LQR.	38
Figure II.12: la réponse d'un pendule inversé avec perturbation sous contrôleur LQR.	39
Figure II.13: Réponse du pendule inversé sous les commandes linéaires.	40
Figure II.14: Réponse du pendule inversé avec perturbation sous les commandes linéaires. ...	41
Figure III.1: Variables et valeurs linguistiques.....	44
Figure III.2: Différents types de fonction d'appartenance.	45

Figure III.3: Structure générale d'un contrôleur flou.	46
Figure III.4: Fonction d'appartenance de l'angle	48
Figure III.5: Fonction d'appartenance de la vitesse angulaire.	48
Figure III.6: Fonction d'appartenance de la position.	49
Figure III.7: Fonction d'appartenance de la vitesse.	49
Figure III.8: Force du pendule.	50
Figure III.9: Force de position du chariot.	50
Figure III.10 : (a) : règles de chariot, (b) : règles de pendule.	51
Figure III.11 : (1) : surface du chariot, (2) : surface du pendule.	51
Figure III.12 : Bloc Simulink sous le contrôleur Flou.	52
Figure III.13 : Bloc Simulink sous le contrôleur Flou avec PI.	52
Figure III.14 : Réponse d'un pendule inversé sous le contrôleur Flou.	53
Figure III.15 : Réponse d'un pendule inversé avec perturbation sous le contrôleur Flou.....	54
Figure III.16 : Réponse d'un pendule inversé sous le contrôleur Flou avec PI.....	55
Figure III.17 : Réponse d'un pendule inversé avec perturbation sous le contrôleur Flou avec PI.	56
Figure III.18 : Convergence du système glissant.....	57
Figure III.19 : Fonction de signe.	59
Figure III.20 : Fonction de Sat.	60
Figure III.21 : Fonction d'intégrale.	60
Figure III.22 : Réponse d'un pendule inversé sous le contrôleur par mode glissant.....	62
Figure III.23 : Réponse d'un pendule inversé avec perturbation sous le contrôleur par mode glissant.	63
Figure III.24 : Réponse d'un pendule inversé sous contrôleur de linéarisation de rétroaction.	67
Figure III.25 : Réponse d'un pendule inversé avec perturbation sous contrôleur de linéarisation de rétroaction.....	68

Figure III.26 : Réponse du pendule inversé sous les commandes non linéaires.....	69
Figure III.27 : Réponse du pendule inversé avec perturbation sous les commandes non linéaires.....	70

Liste des tableaux

Tableau I.1 : Paramètres de système.....	18
Tableau II. 1: Méthode de réponse indicielle.	26
Tableau II. 2 : Méthode de réponse en fréquence.....	26
Tableau II. 3: Tableau de comparaison.....	40
Tableau III. 1: Tableau de comparaison.	69

Liste des symboles et abréviations

IP	Inverted pendulum
PID	Proportional. Integrator. Derivate
PI	Proportional. Integrator.
LQR	Linear Quadratic Regulator.
FBL	Feedback linearization.
FL	Fuzzy logic.
SIMO	Single input multiple output.
SMC	Sliding Mode Control.

Résumé

Stabilisation du pendule inversé est définie comme un problème du contrôle classique. L'objectif de cette thèse est de donner un aperçu des commandes les plus utilisées du pendule inversé. Après avoir présenté et décrit le pendule inversé, deux types de commande ont été conçus, linéaire et non linéaire. Toutes les techniques commande conçus ont été implémenté sous MATLAB.

Mots-clés : Pendule inversé, modèle non -linéaire, modèle linéaire, commande.

ملخص

يتم تعريف استقرار البندول المقلوب على أنه مشكلة تحكم كلاسيكية، فالهدف من هذه الأطروحة هو إعطاء لمحة عامة عن الأوامر الأكثر استخدامًا للبندول المقلوب.

بعد تقديم ووصف البندول المقلوب، قمنا ببناء النموذج غير الخطي ثم جعلناه خطيًا حول نقطة توازن النظام من أجل الحصول على النموذج الخطي.

بعد بناء نموذج الحالة وحساب وظائف النقل. تم تصميم نوعين من التحكم خطي، وغير خطي.

تم تنفيذ جميع تقنيات التحكم المصممة باستخدام MATLAB وإجراء دراسة مقارنة للأداء والقوة بين التقنيات المختلفة.

الكلمات المفتاحية : البندول المقلوب ، النموذج غير الخطي ، النموذج الخطي، التحكم

Abstract

Stabilization of the inverted pendulum is defined as a classical control problem.

The objective of this thesis is to give an overview of the most used commands of the inverted pendulum. After presenting and describing the inverted pendulum, two types of control were designed, linear and nonlinear.

All designed control techniques have been implemented under MATLAB.

Keywords: Inverted pendulum, non-linear model, linear model, control.

Introduction générale

Introduction générale

Le développement de la technologie que nous avons vu dans notre vie, a toujours attiré et nous a rendu curieux et nous demandant comment les machines fonctionnent, comment elles ont rendu contrôlable et facile à travailler avec elle en utilisant un simple clic, en particulier le système d'équilibrage vertical et de contrôle d'attitude comme les missiles, les avions, l'aérospatiale, le vol par satellite sont un grand mystère comme comment ils peuvent être contrôlés et stabilisés dans les airs sans tomber. Tout cela libéré par des scientifiques qui proposent plusieurs méthodes de commande. En outre, les industries modernes doivent obtenir les meilleurs résultats pour le contrôle des systèmes afin de les faire fonctionner aux limites des contraintes.

De nos jours, le champ automatique joue un rôle important en matière de contrôle des systèmes. L'utilisation de l'automatique est plus avancée et largement utilisée dans différents domaines (Robotique, Agronomique, Industries, Médical... etc.). Le système de contrôle est basé sur plusieurs méthodes (LQR, Logique flou, PID... etc.) pour rendre le système robuste et lui donner une bonne fonctionnalité. De la référence la plus populaire pour l'enseignement et la recherche en théorie du contrôle est le pendule inversé dans lequel ce système est une représentation de laboratoire simple et précieuse du système mécanique sous-actionné, en raison de ses propriétés qui est une dynamique non linéaire et instable et il a deux degrés de liberté et un couplage fort avec un ordre supérieur.

Ces propriétés rendent sa conception de contrôle difficile, atteindre sa stabilité est plus difficile qu'il n'y paraît et sa nature permet de tester diverses méthodes de contrôle, en plus de nous faire comprendre les autres problèmes de contrôle connexes et de le résoudre facilement.

Le pendule inversé avait attendu le début du XXe siècle pour avoir les premières découvertes autour de son système dynamique [1]. Le premier qui l'a démontré fut Stephenson en 1908 que le pendule inversé pouvait être stabilisé en appliquant des oscillations harmoniques rapides, verticales et à sa base [2], en plus c'est lui qui a mis les conditions de stabilité pour les pendules inversés doubles et triples en 1909 [3].

En 1932, Lowenstern développe les équations générales du mouvement pour les pendules inversés [4].

Ce n'est que dans les années 1960 que la dynamique des pendules inversés a été bien comprise. Dans leur article, *History of Inverted Pendulum* [5], les auteurs présentent plusieurs des premiers traitements de la littérature entre 1960 et 1970 et de l'état que Roberge a démontré une première solution au système à pendule inversé unique à M.I.T. dans sa thèse de baccalauréat bien nommée, *The Mechanical Seal* [6], supervisée par Leonard Gould. Ils affirment également que Donald, Higdon et Cannon ont décrit, en 1963, des systèmes à pendule inversé indépendants à l'Université de Stanford [7] et que Schaefer et Cannon ont discuté, en 1966, des systèmes de pendule inversé articulés et flexibles [8]. C'est justement avec le décollage de la théorie du contrôle et de la robotique à la fin des années 1960 que le pendule inversé devient le système le plus populaire, entre autres, pour l'enseignement et la recherche [1].

Des solutions d'un grand intérêt sont alors proposées pour résoudre divers problèmes de contrôle. Dans un premier temps, le problème de stabilisation autour de la position verticale [9, 10] et le problème de basculement [11, 12] sont résolus indépendamment. À la dernière étape, la solution complète est alors proposée [13, 14].

Quelques solutions sont ensuite à suivre pour résoudre le problème de suivi [15, 16] et le problème du contrôleur basé sur l'observateur avec principe de séparation [17, 18].

Il est important de noter que la structure simple du modèle à pendule inversé permettant d'effectuer des validations expérimentales est l'une des principales motivations de l'utilisation de ce repère dans l'éducation et dans la recherche [1].

L'objectif de notre étude est d'appliquer quelques techniques de commandes linéaires et non linéaires à un pendule inversé simple afin de le stabiliser. Ensuite une comparaison entre les techniques a été élaborée pour cela notre mémoire sera subdivisé en trois grands chapitres :

Dans le premier chapitre nous avons décrit les caractéristiques générales du système pendule inversé et nous expliquons ses applications variées, par la suite nous élaborons son modèle mathématique en se basant sur le formalisme d'Euler-Lagrange.

Dans le deuxième chapitre, nous allons concevoir des commandes linéaires pour contrôler le système de pendule inversé que nous avons étudié.

Et le troisième chapitre nous allons synthétiser des commandes non linéaires les plus utilisées.

A la fin de ce mémoire, nous ferons une conclusion générale sur l'ensemble de ce travail et on suggérera des perspectives de continuité de travail.

Chapitre I :
Description et
modélisation du
système pendule
inversé

I.1. Introduction

Nous avons déjà presque tous un jour essayé l'expérience de stabilisation d'un bâton sur notre index. Afin de maintenir ce bâton en équilibre, nous devons déplacer notre index de façon à contrecarre en permanence son basculement. C'est exactement le même défi que propose le système automatisé du pendule inversé. Alors que cet exercice semble assez simple et instinctif pour l'homme, il sera nécessaire de définir des stratégies précises pour assurer le maintien automatisé du pendule inversé. Bien évidemment, les performances obtenues grâce à un système automatisé sont de loin supérieures à celles qui seraient obtenues par l'homme.

Actuellement, le pendule inversé est au centre de nombreuses recherches dans divers domaines scientifiques. Il est devenu l'un des outils didactiques les plus importants de l'automatique, et pratiquement tous les services universitaires d'automatique sont dotés d'un système pendule inversé. Avec ces différentes formes (simple, double, rotatif..), le pendule inversé permet de modéliser plusieurs autres systèmes rencontrés dans l'industrie et même dans la vie de tous les jours.

Dans ce chapitre, nous décrivons les caractéristiques générales du système pendule inversé et nous expliquons ses applications variées, par la suite nous élaborons son modèle mathématique en se basant sur le formalisme d'Euler-Lagrange. Enfin nous présentons ce système dans l'espace d'état ainsi que les résultats de simulation.

I.2. Qu'est-ce qu'un pendule ?

Pendule inversé est un système dynamique multi variable non linéaire instable , il est un outil très pédagogique et possède des fonctionnalités très appréciées des automaticiens comme bon exemple de systèmes instables et non linéaires, le pendule inversé a été largement utilisé pour tester les performances des techniques de contrôle (classiques et émergentes)[19].

Pendule inversé que nous considérons est composé de deux éléments (figure I.1) :

- Un chariot libre en translation le long d'un rail de guidage ;
- Un pendule pesant solidaire du chariot et libre en rotation.

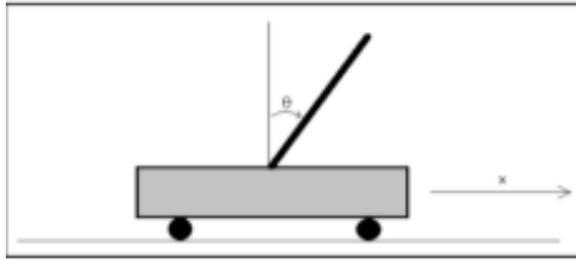


Figure I.1: Pendule inversé en coordonnées généralisées x et θ

I.3. Intérêt de l'étude d'un pendule inversé

Les études de pendule inversé sont idéales pour les étudiants en électronique et en robotique comme nous travaillant dans des laboratoires de recherche, car elles impliquent de nombreux concepts intéressants : programmation, électronique, automatisation et mécanique [20].

On cite dans cette section quelques applications de ce concept dans le monde réel dans des domaines variées :

I.3.1. Domaine de la médecine

L'homme est vu comme un double pendule inversé en série, ses deux axes principaux sont les chevilles et les hanches. Quand nous sommes debout, nos articulations ont travaillé dur pour nous y maintenir. Spécialiste du travail Fabrication de prothèses (remplacement chirurgical d'organes, pièces ou dispositifs remplacement, dentiers) pour les fesses à guider à l'aide d'un modèle double.

Le pendule inversé calcule toutes les contraintes par la prothèse, comme montré par la figure suivante :

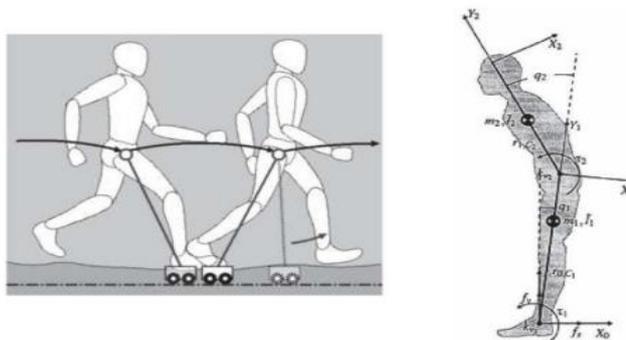


Figure I.2: Corps de l'être humain vu comme un double pendule inversé.

Le premier pendule est articulé à la cheville et représente les membres inférieurs considérés comme groupés. Le second pendule est articulé à la hanche et représente la partie supérieure du corps. On accélère en se penchant en avant et on ralentit en se penchant en arrière. Le système est le même que le pendule inversé [20].

I.3.2. Domaine de Robotique

De même, le robot est considéré comme un pendule inversé, donc pour que le robot s'équilibre, il suffit de stabiliser le pendule inversé correspondant à sa position verticale haute pendant son mouvement et en présence d'autres perturbations. Parfois, nous citons des exemples de robots qui ont été étudiés et conçus sur la base de ce principe [20].

SEGWAY : Il est vu comme un pendule inversé simple (une seule tige) se déplaçant à l'aide de deux roues.



Figure I.3: Segway

I.3.3. Dans la recherche

Vu sa complexité, le pendule inversé est considéré comme l'un des meilleurs systèmes pour tester des lois de commande moderne [20].

I.4. Modélisation d'un pendule inversé

Dans cette partie, nous allons établir les équations du mouvement du pendule inversé, en se basant sur le schéma de la figure I.4

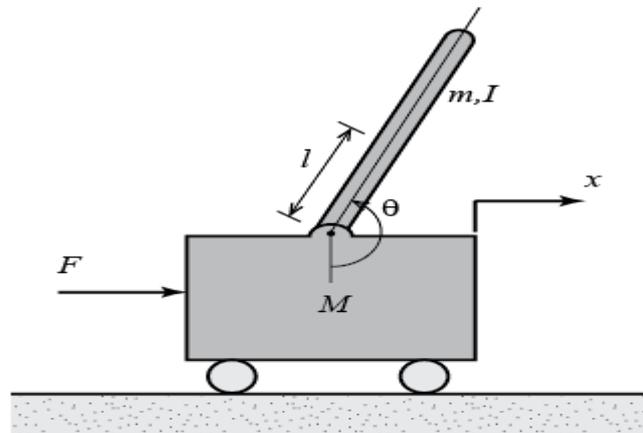


Figure I.4: Modèle d'un pendule inversé.

Soit :

m : masse du pendule

b : frottement de déplacement du chariot

M : masse du chariot.

$x(t)$: position du chariot.

l : demi longueur du pendule.

$\theta(t)$: l'angle du pendule.

$F(t)$: force exercée sur le chariot.

g : intensité de pesanteur.

d : frottement du pendule.

I : Inertie du pendule en son centre de masse.

Dans ce travail on s'intéresse au formalisme d'Euler-Lagrange dans lequel le lagrangien (L) est défini comme une différence entre l'énergie cinétique (T) et l'énergie potentielle (V) du système :

$$L = T - V \quad (I.1)$$

I.4.1. Energie cinétique du système

Le système en mouvement compose du chariot qui se déplace linéairement sur les rails et le pendule qui se balance sur son axe de rotation (les roues du chariot sont négligeables)

L'énergie cinétique du chariot est donnée par :

$$T_M = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \quad (\text{I.2})$$

L'énergie cinétique du pendule :

$$T_m = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 \quad (\text{I.3})$$

Avec :

v_c : Vitesse du centre de gravité du pendule.

$\dot{\theta}$: Vitesse angulaire du pendule.

I : Moment d'inertie du pendule.

La position du centre de gravité du pendule, notée \vec{r}_c à partir de ces coordonnées est donnée par :

$$\vec{r}_c = (x + l \sin \theta) \vec{i} + l \cos \theta \vec{j} \quad (\text{I.4})$$

\vec{i} et \vec{j} Sont respectivement les vecteurs unitaires du repère x et y

D'où

La vitesse du centre de gravité est exprimée par :

$$v_c = \frac{dr_c}{dt} = (\dot{x} + l \dot{\theta} \cos \theta) \vec{i} - (l \dot{\theta} \sin \theta) \vec{j} \quad (\text{I.5})$$

En substituant l'équation (I.5) dans l'équation (I.3), l'expression de l'énergie cinétique du pendule devient :

$$T_m = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + 2 \dot{x} l \dot{\theta} \cos \theta + l^2 \dot{\theta}^2 \cos^2 \theta + l^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 \quad (\text{I.6})$$

Après la simplification du terme ($\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$), l'expression de l'énergie cinétique s'écrit :

$$T_m = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + 2 \dot{x} l \dot{\theta} \cos \theta + l^2 \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 \quad (\text{I.7})$$

Finalement, l'énergie cinétique totale chariot-pendule est donc :

$$T = T_M + T_m = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + 2\dot{x}l\dot{\theta} \cos \theta + l^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 \quad (\text{I.8})$$

I.4.2. Energie potentielle du système

Le chariot étant en mouvement sur un rail horizontal, seul le pendule en mouvement possède une énergie potentielle, celle s'est donnée par :

$$V = mgl \cos \theta \quad (\text{I.9})$$

I.4.3. Equations d'Euler-Lagrange

Quand on établit les expressions de l'énergie cinétique T de l'ensemble chariot-pendule (équation (I.8)) et l'énergie potentielle du système V (équations (I.9)), on utilise l'équation générale d'Euler-Lagrange pour déterminer les équations du mouvement de l'ensemble chariot-pendule :

$$L = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + 2\dot{x}l\dot{\theta} \cos \theta + l^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 - mgl \cos \theta \quad (\text{I.10})$$

L'équation générale d'Euler-Lagrange est donnée par :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varepsilon}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varepsilon_j} + \frac{\partial D_f}{\partial \varepsilon_j} = F_j \quad (\text{I.11})$$

$\varepsilon(\mathbf{t})$: Désigne les degrés de liberté du pendule.

D_f : Désigne l'énergie dissipée par frottement.

F_j : La force généralisée.

L : Représente le lagrangien (équation (I.1)).

En considérant que le système ait deux degrés de liberté, x pour le déplacement horizontal du chariot et θ pour la rotation du pendule, la modélisation du système selon la loi générale l'Euler-Lagrange est donnée par :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varepsilon}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varepsilon_j} = F_j \quad (\text{I.12})$$

Pour le degré de liberté $\varepsilon(\mathbf{t}) = \mathbf{x}(\mathbf{t})$:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = F_j - b\dot{x} \quad (\text{I.13})$$

où : F représente la force exercée sur le chariot

La dérivée partielle de lagrangien suivant \dot{x} s'écrit :

$$\frac{d}{dt} (M\dot{x} + m\dot{x} + ml\cos\theta \cdot \dot{\theta}) = F - b\dot{x} \quad (\text{I.14})$$

La première équation de Lagrange s'écrit alors :

$$(M + m)\ddot{x} + ml \cdot \ddot{\theta} \cos\theta - ml\dot{\theta}^2 \cdot \sin\theta = F - b\dot{x} \quad (\text{I.15})$$

Pour le degré de liberté $\varepsilon(\mathbf{t}) = \theta(\mathbf{t})$:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = -d\dot{\theta} \quad (\text{I.16})$$

La dérivée partielle de lagrangien suivant $\dot{\theta}$ s'écrit :

$$\frac{d}{dt} (ml\dot{x}\cos\theta + ml^2\dot{\theta} + I\dot{\theta}) - (-ml\dot{x}\sin\theta \cdot \dot{\theta} + mgl \cdot \sin\theta) = -d\dot{\theta} \quad (\text{I.17})$$

La deuxième équation de Lagrange est :

$$(ml^2 + I)\ddot{\theta} + ml\ddot{x} \cdot \cos\theta - ml\dot{x} \cdot \dot{\theta} \cdot \sin\theta + ml\dot{x} \cdot \dot{\theta} \cdot \sin\theta - mgl \cdot \sin\theta = 0 \quad (\text{I.18})$$

Le modèle de connaissance du système chariot-pendule est donné par le système d'équation suivant :

$$\begin{cases} (M + m)\ddot{x} + b\dot{x} + ml \cdot \ddot{\theta} \cos\theta - ml\dot{\theta}^2 \cdot \sin\theta = F \\ (ml^2 + I)\ddot{\theta} + ml\ddot{x} \cdot \cos\theta - mgl \cdot \sin\theta + d\dot{\theta} = 0 \end{cases} \quad (\text{I.19})$$

Le système d'équations (I.19) montre qu'il existe une corrélation entre l'accélération du chariot x et l'accélération angulaire du pendule $\ddot{\theta}$. Donc, lorsque $F=0$ (pas de force extérieure), si on déplace le pendule de son équilibre position, il ne sera affecté que par sa propre inertie, puis commencera à osciller, et puisque le pendule est fixé au chariot, le chariot commencera également à se déplacer.

Il s'agit du modèle non linéaire du pendule inversé. Maintenant, nous allons obtenir \ddot{x} et $\ddot{\theta}$:

$$\begin{bmatrix} (ml^2 + I) & ml \cos\theta \\ ml \cos\theta & (m + M) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} mgl \sin\theta - d\dot{\theta} \\ ml\dot{\theta}^2 \sin\theta - b\dot{x} + F \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (ml^2 + I) & ml \cos\theta \\ ml \cos\theta & (m + M) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} mgl \sin\theta - d\dot{\theta} \\ ml\dot{\theta}^2 \sin\theta - b\dot{x} + F \end{bmatrix} \quad (\text{I.20})$$

Le déterminant de matrice S est :

$$\Delta = I(m + M) + ml^2(m(1 - \cos^2\theta) + M) \quad (\text{I.21})$$

$$\Delta = I(m + M) + ml^2(M + m\sin^2\theta) \quad (\text{I.22})$$

Pour simplifier, on prends :

$$\Delta_1 = mgl \sin\theta - d\dot{\theta} \quad (\text{I.23})$$

$$\Delta_2 = ml\dot{\theta}^2 \sin\theta - b\dot{x} + F \quad (\text{I.24})$$

Alors :

$$\begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} (m + M)\Delta_1 - ml \cos\theta \Delta_2 \\ -ml \cos\theta \Delta_1 + (ml^2 + I)\Delta_2 \end{bmatrix} \quad (\text{I.25})$$

Nous choisissons la variable d'état :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = x \\ x_2 = \dot{x} \\ x_3 = \theta \\ x_4 = \dot{\theta} \end{array} \right. \quad (\text{I.26})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = f_1(x) + g_1(x) \cdot u \\ \dot{x}_3 = x_4 \text{ (I.27)} \\ \dot{x}_4 = f_2(x) + g_2(x) \cdot u \end{array} \right.$$

Sachant que $f(x)$ et $g(x)$ sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(x) = \frac{-ml \cos x_3 \Delta_1 + (I + ml^2)(-bx_2 + ml \sin x_3)x_4^2}{\Delta} \\ g_1(x) = \frac{I + ml^2}{\Delta} \end{array} \right. \quad \text{(I.28)}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f_2(x) = \frac{(m+M)\Delta_1 - ml \cos x_3 (-bx_2 + ml \sin x_3)x_4^2}{\Delta} \\ g_2(x) = \frac{-ml \cos x_3}{\Delta} \end{array} \right. \quad \text{(I.29)}$$

I.4.4 Linéarisation :

La linéarisation peut être utilisée pour donner des informations importantes sur la façon dont le système se comporte dans le voisinage des points d'équilibre. En règle générale, nous apprenons si le point est stable ou instable, ainsi que quelque chose sur la façon dont le système s'approche (ou s'éloigne) du point d'équilibre.

L'idée de base est que (dans la plupart des cas) on peut approximer les équations différentielles non linéaires qui régissent le comportement du système par des équations différentielles linéaires [21].

Nous pouvons résoudre l'ensemble résultant d'ODE linéaires, alors que nous ne pouvons pas, en général, résoudre un ensemble d'équations différentielles non linéaires.

Selon l'approximation de Taylor des fonctions non linéaires et le retour au point d'équilibre pour les écarts de petit angle $\theta = 0$.

$$\sin \theta \cong \theta \quad (\text{I.30})$$

$$\cos \theta \cong 1 \quad (\text{I.31})$$

$$\dot{\theta}^2 = 0 \quad (\text{I.32})$$

et on a :

$$\begin{cases} (M + m)\ddot{x} + b\dot{x} + ml.\ddot{\theta}\cos\theta - ml\dot{\theta}^2.\sin\theta = F \\ (ml^2 + I)\ddot{\theta} + ml\ddot{x}.\cos\theta - mgl.\sin\theta + d\dot{\theta} = 0 \end{cases}$$

Pour obtenir l'état de l'espace, nous utilisons la matrice Jacobienne et le point d'équilibre de notre système est $(0,0,0,0)$, ce qui signifie que nous l'étudierons et le contrôlerons si une perturbation se produit, le système revient à ce point.

La matrice Jacobienne est donnée par :

$$J_{(x_0, u_0)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_m} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_3}{\partial x_m} \end{bmatrix} \quad (\text{I.33})$$

Avec coefficient de matrice jacobienne, nous faisons de notre équation les équations algébriques différentielles pour la forme linéarisée où le système devient :

$$\frac{d}{dt} \delta x = \partial_x(x_0, u_0) \delta x + \partial_u(x_0, u_0) \delta u \quad (\text{I.34})$$

Dans ces conditions,

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{0} , \mathbf{y}_0 = \mathbf{0}$$

Comme une fonction vectorielle non linéaire est compliquée à résoudre, déterminer terme à terme les composantes des matrices jacobéennes.

$$J_{(x_0, u_0)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \frac{\partial f_1}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & \frac{\partial f_2}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} & \frac{\partial f_3}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_4}{\partial x_1} & \frac{\partial f_4}{\partial x_2} & \frac{\partial f_4}{\partial x_3} & \frac{\partial f_4}{\partial x_4} \end{bmatrix} \quad (\text{I.35})$$

Déterminer maintenant les éléments des matrices Jacobiennes

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \Big|_{(x,u)} = 0 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \Big|_{(x,u)} = 0 \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} \Big|_{(x,u)} = \frac{\partial}{\partial x_1} \mathbf{x}_4 = 0 \\ \frac{\partial f_4}{\partial x_1} \Big|_{(x,u)} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{I.36})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \Big|_{(x,u)} = 1 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \Big|_{(x,u)} = \frac{-b(ml^2+I)}{I(M+m)+Mml^2} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_2} \Big|_{(x,u)} = 0 \\ \frac{\partial f_4}{\partial x_2} \Big|_{(x,u)} = \frac{mlb}{I(M+m)+Mml^2} \end{array} \right. \quad (\text{I.37})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \Big|_{(x,u)} = 0 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \Big|_{(x,u)} = \frac{-m^2 l^2 g}{I(M+m)+Mml^2} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \Big|_{(x,u)} = 0 \\ \frac{\partial f_4}{\partial x_3} \Big|_{(x,u)} = \frac{mgl(m+M)}{I(M+m)+Mml^2} \end{array} \right. \quad (\text{I.38})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f_1}{\partial x_4} \Big|_{(x,u)} = 0 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_4} \Big|_{(x,u)} = \frac{bml d}{I(M+m)+Mml^2} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_4} \Big|_{(x,u)} = 1 \\ \frac{\partial f_4}{\partial x_4} \Big|_{(x,u)} = \frac{-d(M+m)}{I(M+m)+Mml^2} \end{array} \right. \quad (\text{I.39})$$

Maintenant dérivée des termes non linéaires par rapport à u :

$$J_{(x_0, u_0)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \\ \frac{\partial f_3}{\partial u} \\ \frac{\partial f_4}{\partial u} \end{bmatrix} \quad (\text{I.40})$$

Déterminer maintenant les éléments des matrices Jacobiennes u

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial u} \Big|_{(x,u)} = 0 \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \Big|_{(x,u)} = \frac{I+ml^2}{I(M+m)+Mml^2} \\ \frac{\partial f_3}{\partial u} \Big|_{(x,u)} = 0 \\ \frac{\partial f_4}{\partial u} \Big|_{(x,u)} = \frac{ml}{I(M+m)+Mml^2} \end{cases} \quad (\text{I.41})$$

I.4.5 Modèle d'état de l'ensemble chariot-pendule

La représentation d'état des systèmes linéaires est de la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + BF \\ y = cx \end{cases} \quad (\text{I.42})$$

Enfin nous pouvons écrire le modèle d'espace d'état après toutes ces manipulations :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-b(ml^2+I)}{I(M+m)+Mml^2} & \frac{-m^2l^2g}{I(M+m)+Mml^2} & \frac{0}{I(M+m)+Mml^2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{-mlb}{I(M+m)+Mml^2} & \frac{mgl(m+M)}{I(M+m)+Mml^2} & \frac{-d(M+m)}{I(M+m)+Mml^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{I+ml^2}{I(M+m)+Mml^2} \\ 0 \\ \frac{ml}{I(M+m)+Mml^2} \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

I.4.6. Fonction de transfert de l'ensemble chariot-pendule

Pour $\theta = 0$

Pour obtenir les fonctions de transfert des équations du système linéarisé, il faut d'abord prendre la transformée de Laplace des équations du système en supposant des conditions initiales nulles. Les transformées de Laplace résultantes sont présentées ci-dessous:

$$\begin{cases} (M + m)s^2X(s) + bsX(s) + mls^2\theta(S) = U(s) & \text{(I.43)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (ml^2 + I)s^2\theta(S) - mgl.\theta(S) + ds\theta(S) = -mls^2X(s) & \text{(I.44)} \end{cases}$$

Rappelez-vous qu'une fonction de transfert représente la relation entre une seule entrée et une seule sortie à la fois. Pour trouver notre première fonction de transfert pour la sortie $\theta(s)$ et une entrée de $U(s)$, nous devons éliminer $X(s)$ des équations ci-dessus. Résolve la première équation pour $X(s)$:

$$X(S) = \left[\frac{(ml^2 + I)s^2 + ds + mgl}{mls^2} \right] \theta(S) \quad \text{(I.45)}$$

On remplace ensuite ce qui précède dans la première équation $(M + m)s^2 \left[\frac{(ml^2 + I)s^2 + ds + mgl}{mls^2} \right] \theta(S) + bs \left[\frac{(ml^2 + I)s^2 + ds + mgl}{mls^2} \right] \theta(S) - mls^2\theta(S) = U(s)$ (I.46)

En réarrangeant, la fonction de transfert de pendule est alors la suivante :

$$\frac{\theta(S)}{U(s)} = \frac{-mls}{Hs^3 + (bq + Nd)s^2 + (-Nmgl + bd)s - bmgl} \quad \text{(I.47)}$$

Deuxièmement, la fonction de transfert avec la position du chariot $X(s)$ comme sortie peut être dérivée d'une manière similaire pour arriver à ce qui suit :

$$\frac{X(S)}{U(s)} = \frac{(ml^2 + I)s^2 + ds - mgl}{Hs^4 + (bq + Nd)s^3 - (-Nmgl + bd)s^2 - bmgl} \quad \text{(I.48)}$$

où

$$N = m + M$$

$$q = ml^2 + I$$

$$H = N(ml^2 + I) - m^2l^2$$

Pour $\theta = \pi$

$$(ml^2 + I)s^2\theta(S) + mgl.\theta(S) + ds\theta(S) = mls^2X(s) \quad (I.49)$$

$$(M + m)s^2X(s) + bsX(s) + mls^2\theta(S) = U(s) \quad (I.50)$$

$$X(S) = \left[\frac{(ml^2 + I)s^2 + ds + mgl}{mls^2} \right] \theta(S) \quad (I.51)$$

La fonction de transfert de pendule est :

$$\frac{\theta(S)}{U(s)} = \frac{mls}{Hs^3 + (bq + Nd)s^2 + (Nmgl + bd)s + bmgl} \quad (I.52)$$

La fonction de transfert du chariot :

$$\frac{X(S)}{U(s)} = \frac{(ml^2 + I)s^2 + ds + mgl}{Hs^4 + (bq + Nd)s^3 + (+Nmgl + bd)s^2 + bmgl} \quad (I.53)$$

Les paramètres du pendule inversé ont été prélevés en laboratoire :

Tableau I.1 : Paramètres de système.

g: Gravité	9.81 m/s ²
l: Longueur du pendule. (Selon la configuration)	0,36 à 0,4 m
M : Masse du chariot.	2.4 kg
m : Masse du pendule	0.23 kg
I: Inertie du pendule (Dépend de la configuration)	Environ 0,099 kg.m ²
b : Frottement de déplacement du chariot	0.05 Ns/m
d : Frottement du pendule.	bien que négligeable, nécessaire dans le modèle 0.005 Nms/rad

I.5. Elaboration du modèle avec SIMULINK:

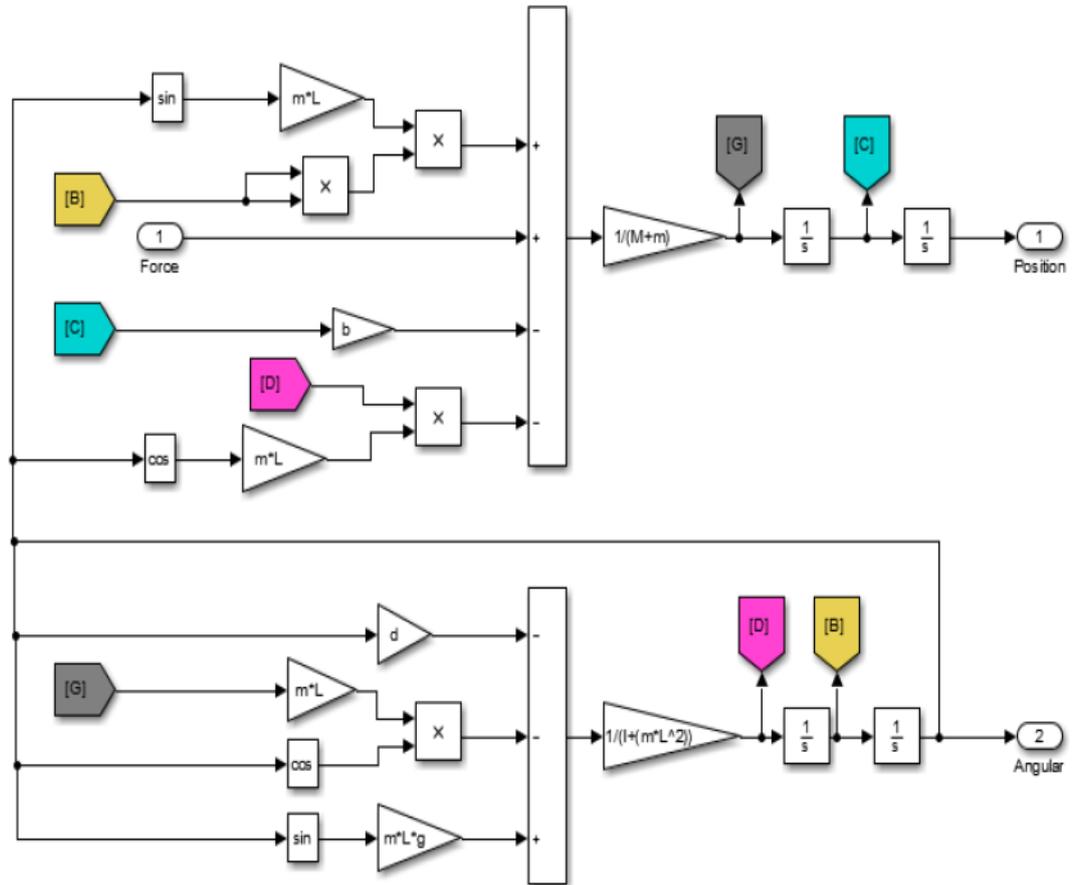


Figure I.5: Bloc Simulink non linéaire.

I.6. Résultat de simulation

Nous remarquons (Fig.1.6) et (Fig.1.7) que le système linéaire et non linéaire se comportent comme de la même manière et la linéarité simultanément dans le temps, le résultat confirme l'instabilité :

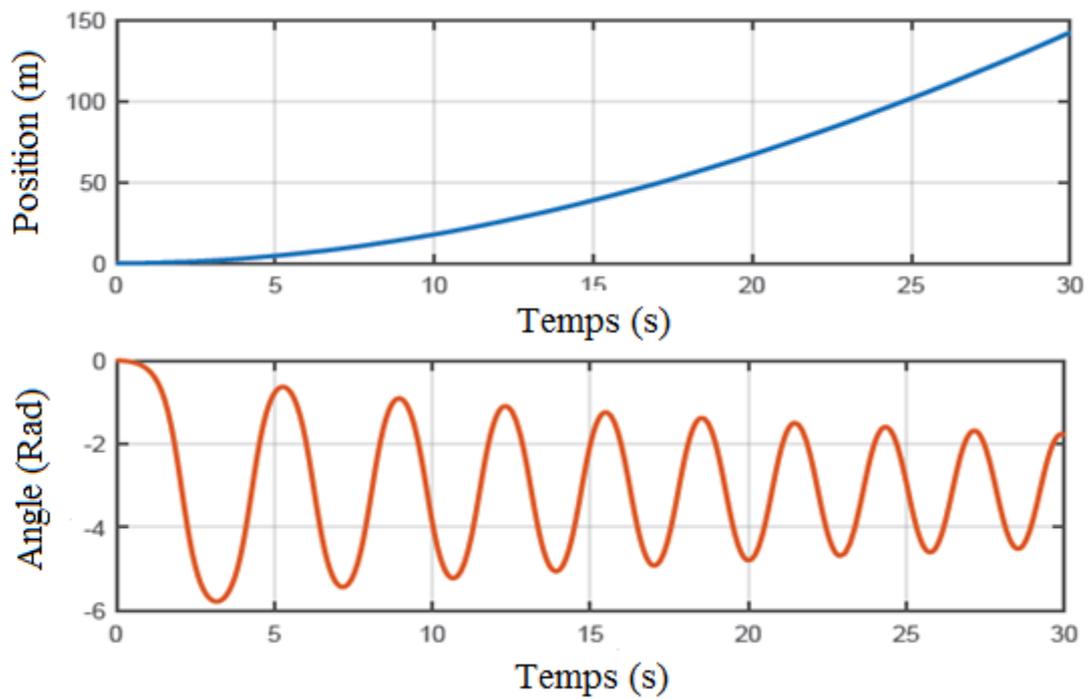


Figure I.6: Réponse de système non linéaire.

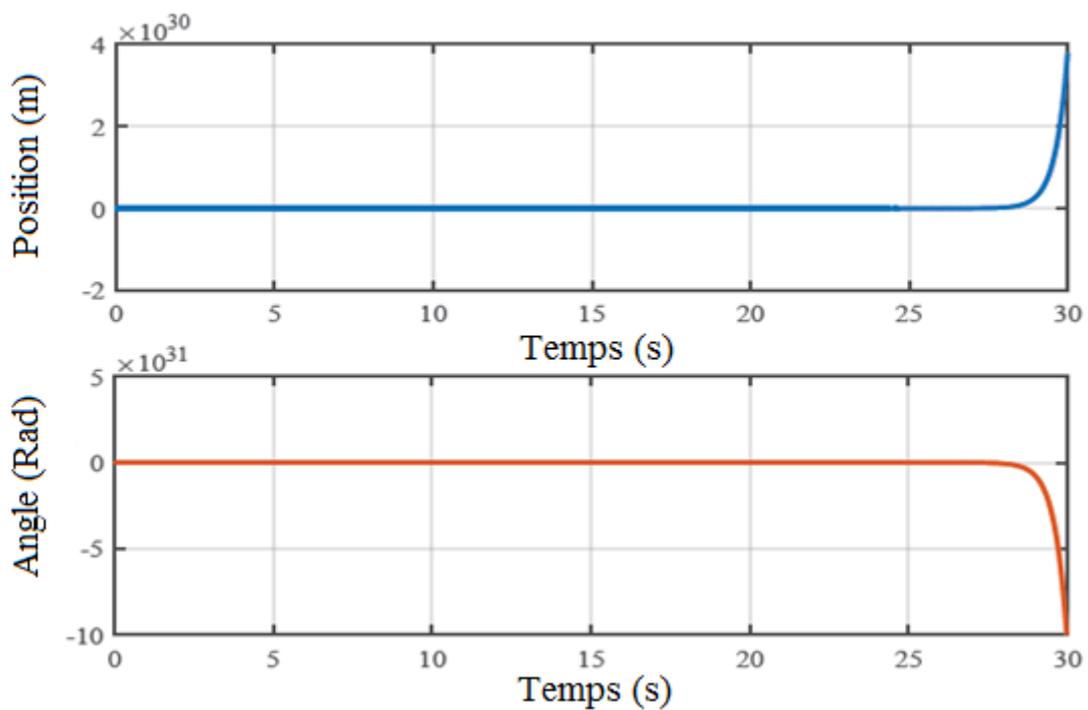


Figure I.7: Réponse de système linéaire.

Nature du pendule inversé, pour que le système soit stable, il a besoin d'exigences de conception. Nous tenterons de contrôler à la fois l'angle du pendule et la position du chariot. Pour rendre la conception plus difficile dans cette section, nous proposons les exigences de conception suivantes :

- Temps de réponse pour x et θ de moins de 7 secondes.
- Temps de montée pendant x de moins de 5 secondes.
- Dépassement x inférieur à 7 %.
- Erreur à l'état d'équilibre inférieure à 2 %.

I.7. Conclusion

Ce chapitre est consacré à la description et à la modélisation du pendule inversé, suivi de développement d'un modèle pendule-chariot sur Simulink. Étant donné l'instabilité du système, donc la commande est nécessaire pour le stabiliser autour du point $\theta = 0$, ce qui signifie mettre le pendule dans la position vertical, le développement des commandes de stabilisation sera l'objectif des chapitres suivants.

Chapitre II :
Commandes
linéaire d'un
pendule inversé

II.1 Introduction

Développer un contrôleur pour un pendule inversé est en fait difficile. Cependant, jusqu'à présent, il n'existe pas d'outils mathématiques très généraux pour modéliser ou contrôler des systèmes non linéaires [22].

Dans ce chapitre, nous allons synthétiser des commandes linéaires les plus utilisées PID, Retour d'état et LQR pour stabiliser le système de pendule inversé que nous avons étudié dans le chapitre précédent (Chapitre 1), ensuite nous montrerons les différents résultats de simulation obtenus avec une comparaison entre elles.

II.2 Contrôleur PID

Le régulateur PID est la forme de rétroaction la plus courante. C'était un élément essentiel des premiers régulateurs et il est devenu l'outil standard lorsque le contrôle de processus est apparu dans les années 1940. Dans le contrôle de processus aujourd'hui, plus de 95 % des boucles de contrôle sont de type PID, la plupart des boucles sont en fait un contrôle PI. Les contrôleurs PID se trouvent aujourd'hui dans tous les domaines où le contrôle est utilisé.[23]

L'équation PID est donnée par :

$$u(t) = k_p e(t) + k_i \int_0^t e(\tau) d\tau + k_d \frac{de}{dt} \quad (\text{II.1})$$

Où u est le signal de commande et e est l'erreur entre le point de consigne ou la référence et la valeur d'entrée de commande. Après application du transformateur de Laplace, la fonction de transfert est donnée par :

$$c(s) = k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s \quad (\text{II.2})$$

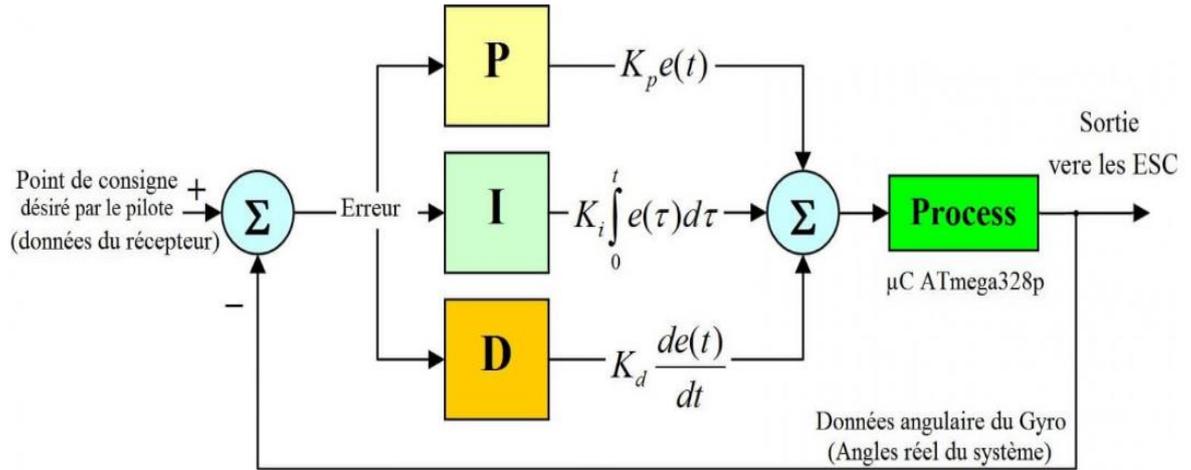


Figure II. 1: Structure du contrôleur PID.

où k_p , k_i et k_d sont les gains du régulateur. Il est basé sur trois contrôles qui sont le contrôle proportionnel, intégral et dérivé. Chacun d'eux a un rôle et un effet.

Proportionnel (K_p) : L'action u est dosée proportionnellement au résultat à atteindre et donc à l'erreur e . Le signal de commande est :

$$u(t) = k_p e(t) \quad (\text{II.3})$$

Si k_p est grand, la correction est forte et rapide mais le risque de dépassement et d'oscillations dans la boucle augmente. Cependant, si k_p est petit, la correction est douce et lente mais il y a moins de risque d'oscillations [24].

La fonction de transfert de l'action proportionnelle est :

$$G(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = k_p \quad (\text{II.4})$$

Intégrale (K_i) : La fonction principale de l'action intégrale est de s'assurer que la sortie du processus correspond au point de départ en régime permanent. Avec le contrôle proportionnel, il y a normalement une erreur de contrôle en régime permanent. Avec une action intégrale, une petite erreur positive conduira toujours à un signal de contrôle croissant, et une erreur négative donnera un signal de contrôle décroissant, quelle que soit la taille de l'erreur [24].

Le signal de commande est :

$$u(t) = k_i \int_0^t e(\tau) d\tau \quad (\text{II.5})$$

Et fonction de transfert de l'action de contrôle intégral est :

$$G(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{k_i}{s} \quad (\text{II.6})$$

L'action dérivée (K_d) : Le but de l'action dérivée est d'améliorer la stabilité en boucle fermée. Le mécanisme d'instabilité peut être décrit intuitivement comme suit. En raison de la dynamique du processus, il faudra un certain temps avant qu'un changement de la variable de contrôle ne soit perceptible dans la sortie du processus. Ainsi, le système de contrôle sera en retard pour corriger une erreur [24].

Le signal de commande est :

$$u(t) = k_d \frac{de}{dt} \quad (\text{II.7})$$

et le fonction de transfert de l'action dérivée est :

$$G(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = k_d s \quad (\text{II.8})$$

II.3. Méthodes de réglage PID

Pour déterminer le gain PID, les méthodes les plus utilisées sont : essai et erreur et Ziegler-Nichols, ce dernier est utilisé dans notre cas. La méthode de réglage Zeigler-Nichols propose deux méthodes différentes :

II.3.1. Méthode de la réponse indicielle

La première méthode de conception présentée par Zeigler et Nichols est basée sur un enregistrement de la réponse indicielle en boucle ouverte du système, qui est caractérisée par deux paramètres.

Les paramètres sont déterminés à partir d'une réponse échelonnée unitaire du processus. Le point où la pente de la réponse indicielle atteint son maximum est d'abord déterminé, et les axes de tangente et de coordonnées donnent les paramètres α et L [24].

Tableau II. 1: Méthode de réponse indicielle.

Contrôleur	k	T_i	T_d
P	$1/a$		
PI	$0,9/a$	$3L$	
PID	$1,2/a$	$2L$	$L/2$

II.3.2. Méthode de réponse en fréquence

Cette méthode est également basée sur une caractérisation simple de la dynamique du processus. La conception est basée sur la connaissance du point sur la courbe de Nyquist de la fonction de transfert de processus $G(s)$ où la courbe de Nyquist coupe l'axe réel négatif. Pour des raisons historiques, ce point est caractérisé par les paramètres K_u et T_u , appelés gain ultime et période ultime. Ces paramètres peuvent être déterminés de la manière suivante. Connectez un contrôleur au processus, définissez les paramètres de sorte que l'action de contrôle soit proportionnelle, c'est-à-dire que $T_i = \infty$ et $T_d = 0$. Augmentez lentement le gain jusqu'à ce que le processus commence à osciller. Le gain lorsque cela se produit est K_u et la période d'oscillation est T_u [24].

Tableau II. 2 : Méthode de réponse en fréquence.

Contrôleur	k	T_i	T_d
P	$0.5k_u$		
PI	$0.4k_u$	$0.8T_u$	
PID	$0.6k_u$	$0.5T_u$	$0.125T_u$

La méthode que nous avons utilisée pour calculer les gains de PID est Ziegler-Nichols, la deuxième.

La fonction de transfert du chariot :

$$G_1(s) = \frac{0.3895s^2 + 0.01467s - 2.588}{s^4 + 0.05719s^3 + 6.807s^2 - 0.1294s} \quad (\text{II.9})$$

La fonction de transfert du pendule :

$$G_2(s) = \frac{-0.2638s}{s^3 + 0.05719s^2 - 6.807s - 0.1294} \quad (\text{II.10})$$

La boucle fermée :

$$G_{BF} = \frac{G_{BO}}{1+G_{BO}} = \frac{k_u G(s)}{1+k_u G(s)} \quad (\text{II.11})$$

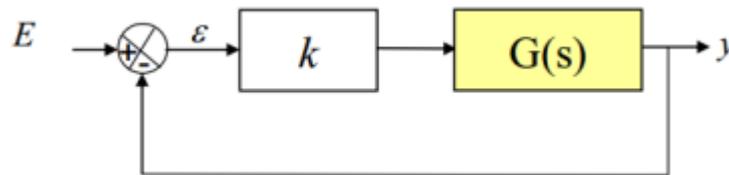


Figure II. 2 : Régulateur proportionnel.

Nous avons appliqué Routh pour connaître la stabilisation du système, puis remplacé $s^2 = jw$ pour trouver w

Nous avons obtenu comme suit :

1. Pour le chariot : $0 < k_u < 32.75$, pour $k_u = 0.5, w = 0.4$ et $T_u = \frac{2\pi}{w} = 4.58$

$$\begin{cases} k_p = 0.3 \\ k_i = 0.13 \\ k_d = 0.17 \end{cases} \quad (\text{II.12})$$

2. Pour le pendule : $k_u > -17.22$, pour $k_u = 17, w = 3.33$ et $T_u = \frac{2\pi}{w} = 0.59$

$$\begin{cases} k_p = 10.19 \\ k_i = 34.04 \\ k_d = 0.76 \end{cases} \quad (\text{II.13})$$

II.4. Conception et simulation de contrôleur

MATLAB Simulink a été utilisé pour la simulation des réponses de sortie du pendule inversé sur la base de l'équation et du schéma fonctionnel susmentionnés. le schéma fonctionnel du simulink est représenté ci-dessous :

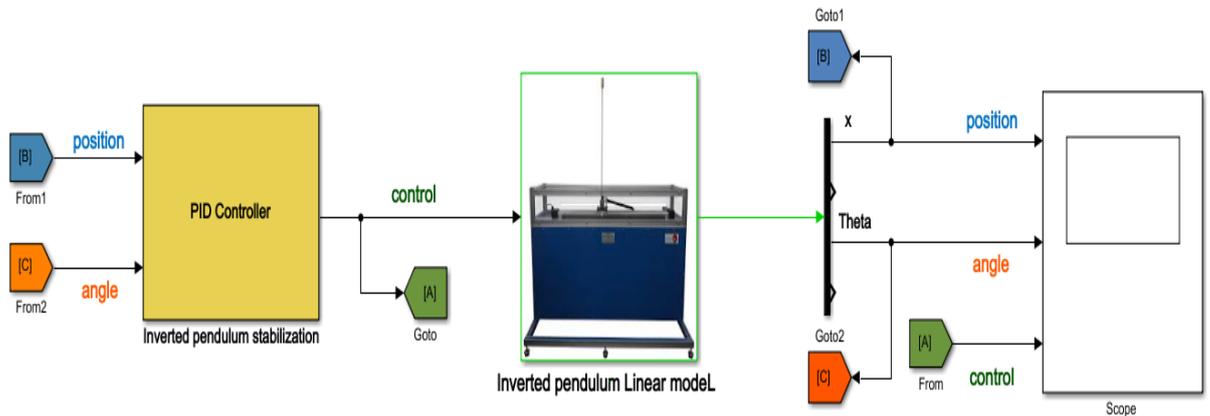


Figure II. 3: Bloc Simulink d'un pendule inversé sous le contrôleur PID.

Après avoir calculé le gain PID du chariot et du pendule, nous avons appliqué une référence de 0,1 à la position du chariot et de 0 au pendule, PID de la position du chariot :

$$k_p = 0.33k_i = 0.009k_d = 0.75 \text{ et PID du Pendule : } k_p = 40k_i = 5k_d = 9.$$

II.4.1. Résultats et discussion

Les résultats de simulations obtenues, en utilisant le contrôleur PID pour contrôler grandeurs du système pendule inversé sont donnés par la figure III.4

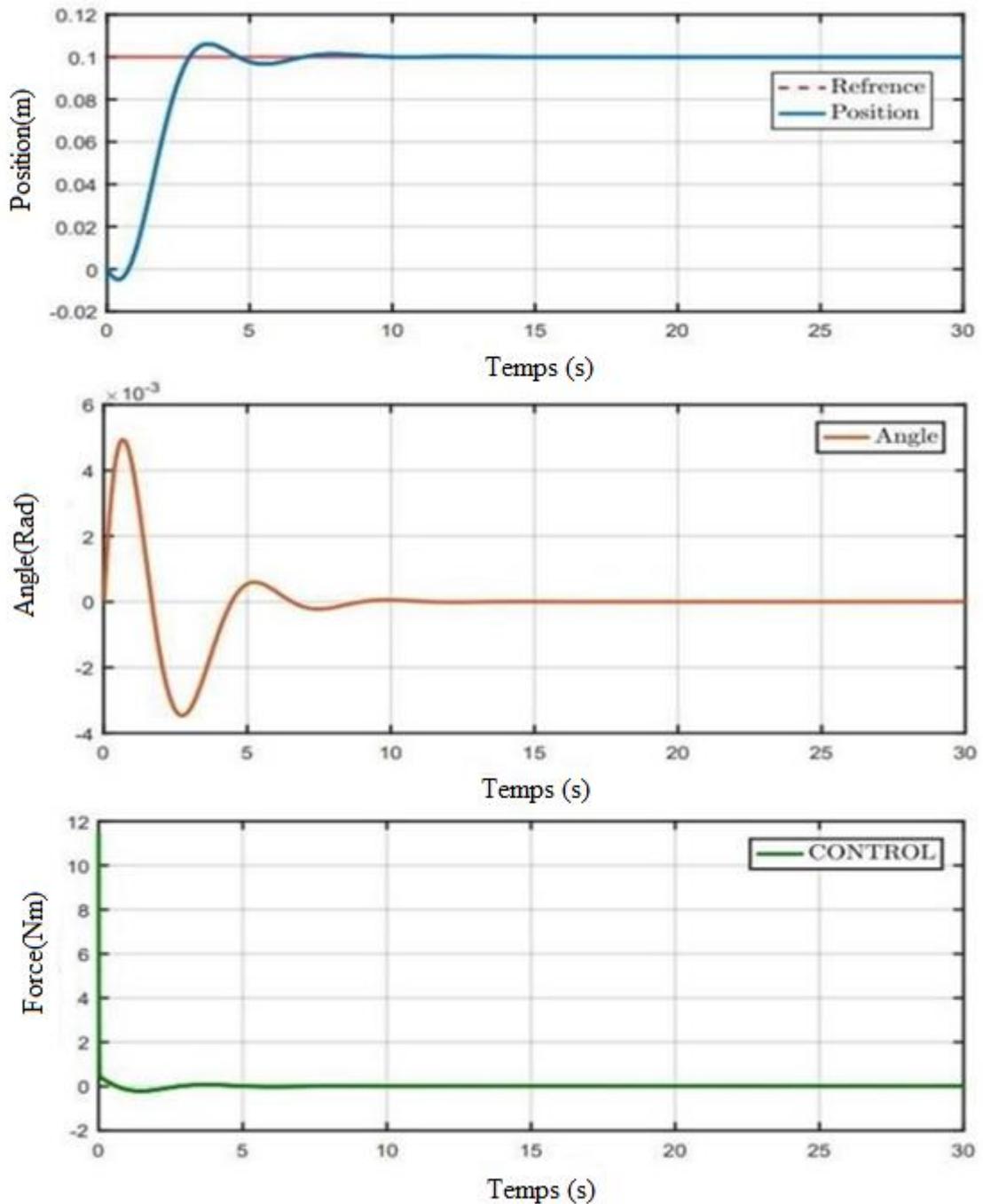


Figure II.4 : Réponse du pendule inversé sous le contrôleur PID.

Nous voyons que le chariot prend 9,04 s pour se stabiliser à la référence souhaitée avec une erreur très petit. On constate alors que la réponse est très acceptable. Le pendule prend 9 s pour se stabiliser sur la référence donnée (Angle 0).

On peut dire que le contrôleur répond aux objectifs de conception.

Pour tester notre système s'il est robuste et suit la référence comme nous le souhaitons. Nous appliquons une perturbation de 20% à partir de notre référence (0,1) environ 5 secondes (15-20 sec) après la simulation, nous obtenons ce résultat :

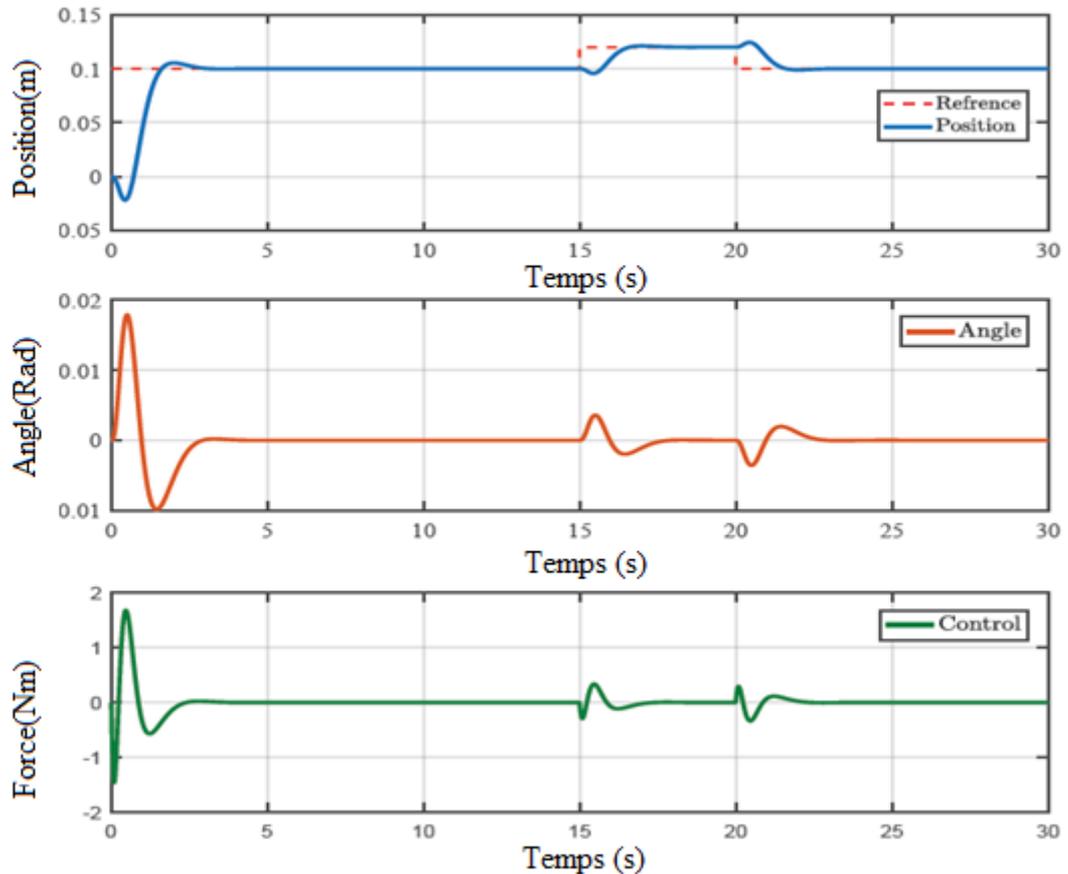


Figure II.5: Réponse du pendule inversé avec perturbation sous contrôleur PID.

D'après La figure ci-dessus On voit que la position du chariot suit la nouvelle référence (0.12) pour 5s, puis revenez à la référence initiale comme nous l'avons donné au début avec un petit retard.

II.5. Commande par retour d'état

Par rapport au contrôle en boucle ouverte, si notre connaissance du processus n'est pas précise, par exemple en raison du vieillissement, de la friction, etc., le contrôle en boucle ouverte ne sera pas très bon, le cas échéant, ou pourrait ne pas fonctionner du tout. Ainsi, nous utilisons le contrôle par retour d'état. Bien sûr, ce manque de connaissances précises n'est pas la seule raison pour laquelle nous utilisons la commande par retour d'état Parfois

pour rendre le système stable (c'est-à-dire, en gros, pour le faire fonctionner du tout) en premier lieu, ou pour le faire fonctionner comme souhaité [21].

La méthode de commande par retour d'état complet ou de placement de pôle est une méthode de conception de contrôleur dans laquelle vous déterminez le locus des pôles du système en boucle fermée sur le plan complexe en définissant un gain de contrôleur [25].

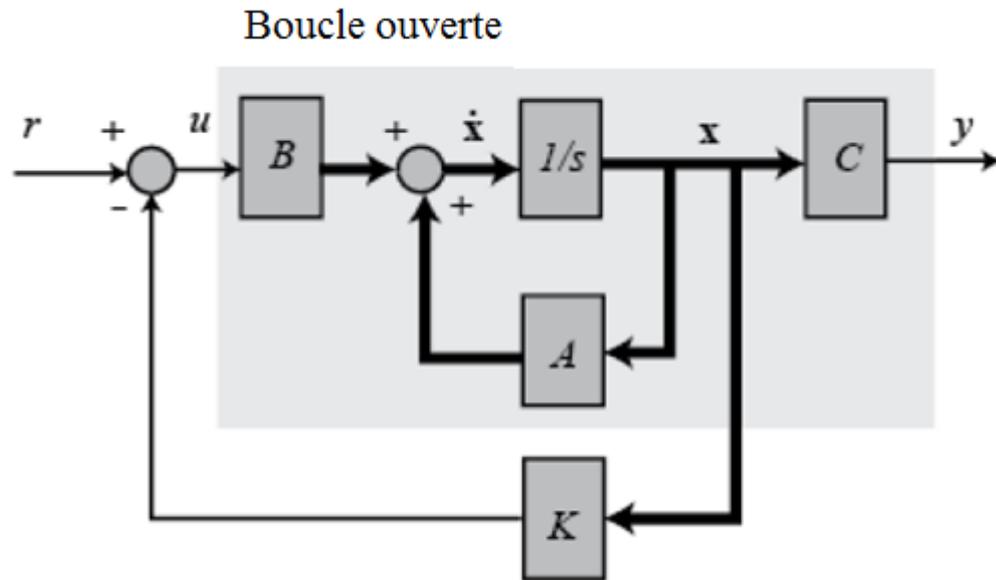


Figure II.6: Contrôleur de retour d'état.

Considérons un système dynamique linéaire sous la forme d'espace d'état

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx\end{aligned}\quad (\text{II.14})$$

Dans certains cas, on est capable d'atteindre l'objectif (par exemple, stabiliser le système ou améliorer sa réponse transitoire) en utilisant la commande par retour d'état complète, qui représente une combinaison linéaire des variables d'état, c'est-à-dire:

$$u = -Kx \quad (\text{II.15})$$

De sorte que le système en boucle fermée, donné par :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (A - BK)x \\ y &= Cx\end{aligned}\quad (\text{II.16})$$

Les spécifications souhaitées.

Le rôle principal de la commande par retour d'état est de stabiliser un système donné afin que toutes les valeurs propres en boucle fermée soient placées dans la moitié gauche du plan complexe. Le théorème suivant donne une condition dans laquelle il est possible de placer des pôles du système aux emplacements souhaités. En supposant que la paire est contrôlable, il existe une matrice de rétroaction telle que les valeurs propres du système en boucle fermée peuvent être placées dans des emplacements arbitraires [25].

II.5.1. Retour d'état complet avec bouclage intégrale

La commande par retour d'état augmente l'état intégral pour contrôler le système en modifier l'état de commande par retour d'état

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_e \\ \dot{E}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x} - \dot{x}_r \\ x - x_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_e \\ E_e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u = \tilde{A}x + \tilde{B}u \quad (\text{II.17})$$

lorsque $-x_e$ est l'état d'erreur

E_e est $\int e dt$

x_r est l'entrée de référence et le signal de commande de l'état de commande par retour d'état avec Intégrale est :

$$u_e = -k_e x = -[k \quad k_i] \begin{bmatrix} x_e \\ E_e \end{bmatrix} \quad (\text{II.18})$$

Les pôles que nous avons choisis :

$$poles = [-3 \quad -5 + 5i \quad -5 - 5i \quad -2 + 2i \quad -2 - 2i]$$

En utilisant la fonction **Place** en Matlab, k_e est calculé

Les valeurs du gain sont : $k_e = [-427.2 \quad -263.4 \quad -1175.1 \quad -451,2 \quad 386,4]$

II.5.2. Résultats et discussion

Après avoir calculé le gain K du chariot et du pendule avec pôle de placement, nous avons appliqué une référence de 0,1 à la position du chariot et de 0 au pendule.

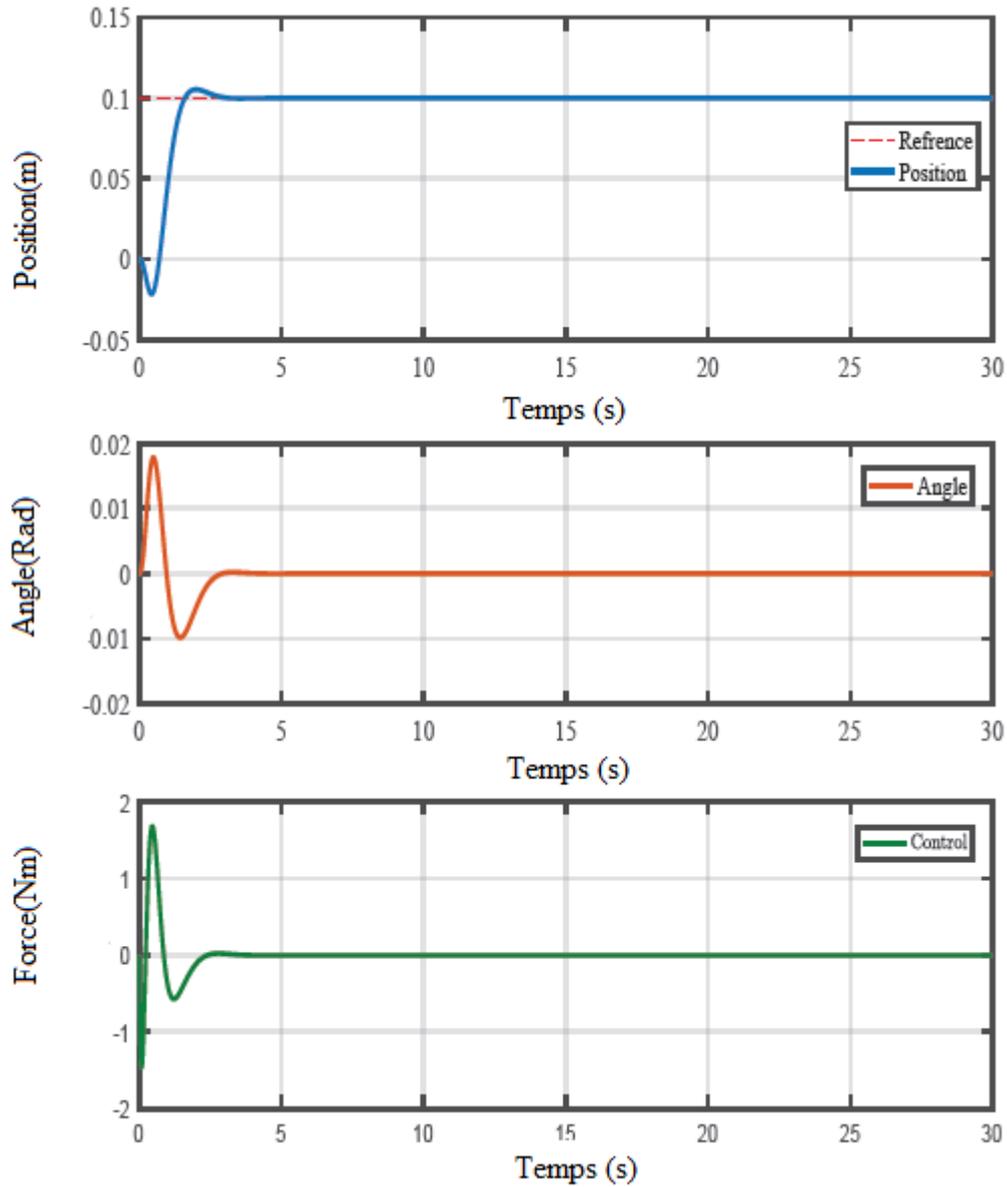


Figure II.7: Réponse du pendule inversé sous la commande par retour d'état.

Nous voyons que le chariot prend 2.53 s pour se stabiliser à la référence souhaitée avec une erreur très petite. On constate alors que la réponse est très acceptable. Le pendule prend 3 s pour se stabiliser sur la référence donnée (Angle 0).

On peut dire que le contrôleur retour d'état répond aux objectifs de conception.

Pour tester notre système s'il est robuste et suit la référence comme nous le souhaitons. Nous appliquons une perturbation de 20% à partir de notre référence (0,1) environ 5 secondes (15-20 sec) après la simulation, nous obtenons ce résultat:

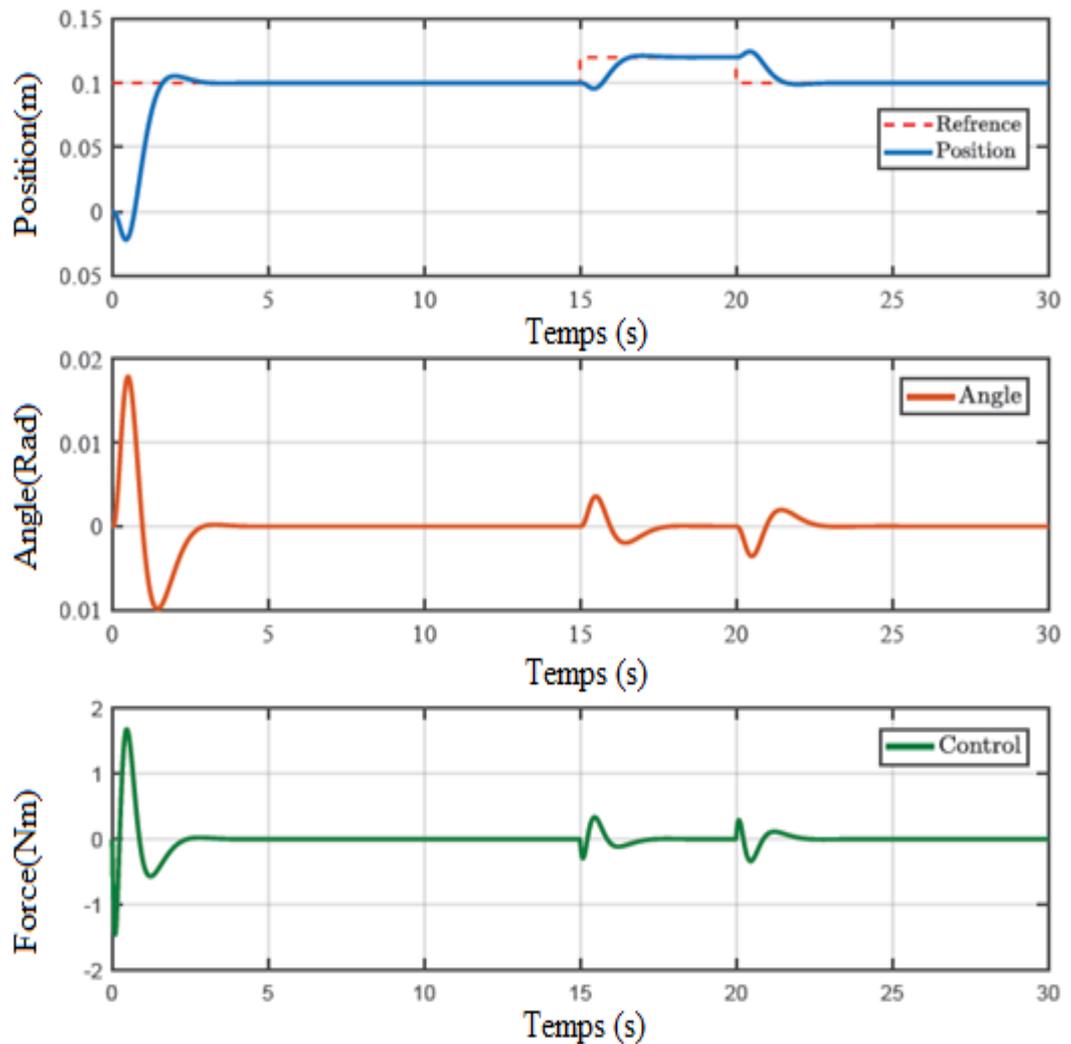


Figure II.8: Réponse du pendule inversé avec perturbation sous la commande par retour d'état.

Nous voyons que la position du chariot suit la nouvelle référence (0,12) pendant 5 s, puis revient à la référence initiale comme nous le donnons au début avec un petit retard.

II.6 Contrôleur LQR (Régulateur Linéaire Quadratique)

Méthode du régulateur quadratique linéaire (LQR) généralement utilisée pour le contrôle des systèmes dynamiques linéaires. C'est l'une des techniques de contrôle optimales. L'algorithme LQR est essentiellement un moyen automatisé de trouver un contrôleur de retour d'état approprié et sa synthèse consiste à trouver un gain matriciel K tel que la commande par retour d'état

$$u = -Kx \quad (\text{II.19})$$

Pour placer arbitrairement les valeurs propres du système en boucle fermée

$$\dot{x} = Ax + Bu = \dot{x} = (A - BK)x \quad (\text{II.20})$$

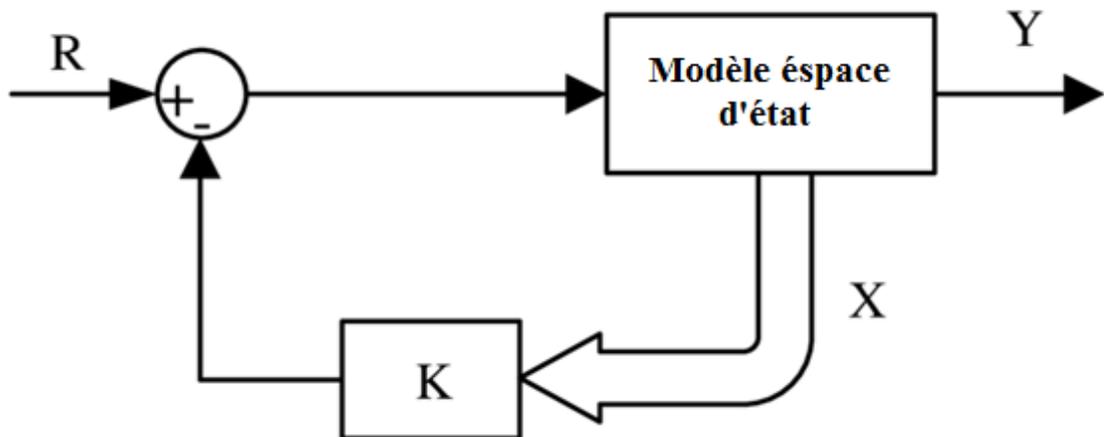


Figure II.9: Schéma du régulateur quadratique linéaire (LQR).

Choisir la meilleure matrice de gain K pour stabiliser le système sans dépenser trop d'effort de contrôle est un objectif important dans le contrôle optimal. Un équilibre doit être trouvé entre la stabilité du système en boucle fermée et l'agressivité du contrôle. Il est important de prendre en compte les dépenses de contrôle pour éviter que le contrôleur ne réagisse de manière excessive aux bruits et perturbations haute fréquence, afin que l'actionnement ne dépasse pas les amplitudes maximales autorisées et que le contrôle ne soit pas trop coûteux. En particulier, la fonction de coût :

$$J(t) = \int_0^t (X^T(t)QX(t) + U^T(t)RU(t))dt \quad (\text{II.21})$$

Équilibre le coût d'une réglementation efficace de l'État avec le coût du contrôle. Les matrices Q et R pondèrent respectivement le coût des écarts de l'état à zéro et le coût d'actionnement. La matrice Q est semi-définie positive et R est définie positive ; ces matrices sont souvent diagonales et les éléments diagonaux peuvent être réglés pour modifier l'importance relative des objectifs de contrôle.

Car la fonction de coût est quadratique, il existe une solution analytique pour les gains optimaux du contrôleur K , donnée par :

$$K = R^{-1}B^T P \quad (\text{II.22})$$

Où P est la solution de l'équation algébrique de Riccati (ARE) :

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \quad (\text{II.23})$$

La résolution de ARE pour P , et donc pour K , est numériquement robuste et déjà implémentée dans de nombreux langages de programmation [26].

II.6.1. LQR avec contrôleur d'action intégrale

Le LQR avec intégrale (LQR+I) est une amélioration du contrôleur du LQR conventionnel. Le LQR + I augmente l'état intégral pour contrôler le système en modifiant l'état du LQR.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_e \\ \dot{E}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x} - \dot{x}_r \\ x - x_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_e \\ E_e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u = \tilde{A}x + \tilde{B}u \quad (\text{II.24})$$

Lorsque $-x_e$ est l'état d'erreur

E_e est $\int e dt$

x_r , est l'entrée de référence et le signal de commande de LQR+I est :

$$u_e = -k_e x = -[k_e \quad k_{i_e}] \begin{bmatrix} x_e \\ E_e \end{bmatrix} = -k_e(x - x_r) - k_{i_e} C \int (x - x_r) dt \quad (\text{II.25})$$

L'augmentation de l'état du terme intégral améliore l'erreur constante du système. Ce terme peut éliminer les erreurs et les dépassements du système causés par un modèle dynamique incomplet, la friction dans le système [27]. Cette technique peut produire de bonnes performances dynamiques et statiques.

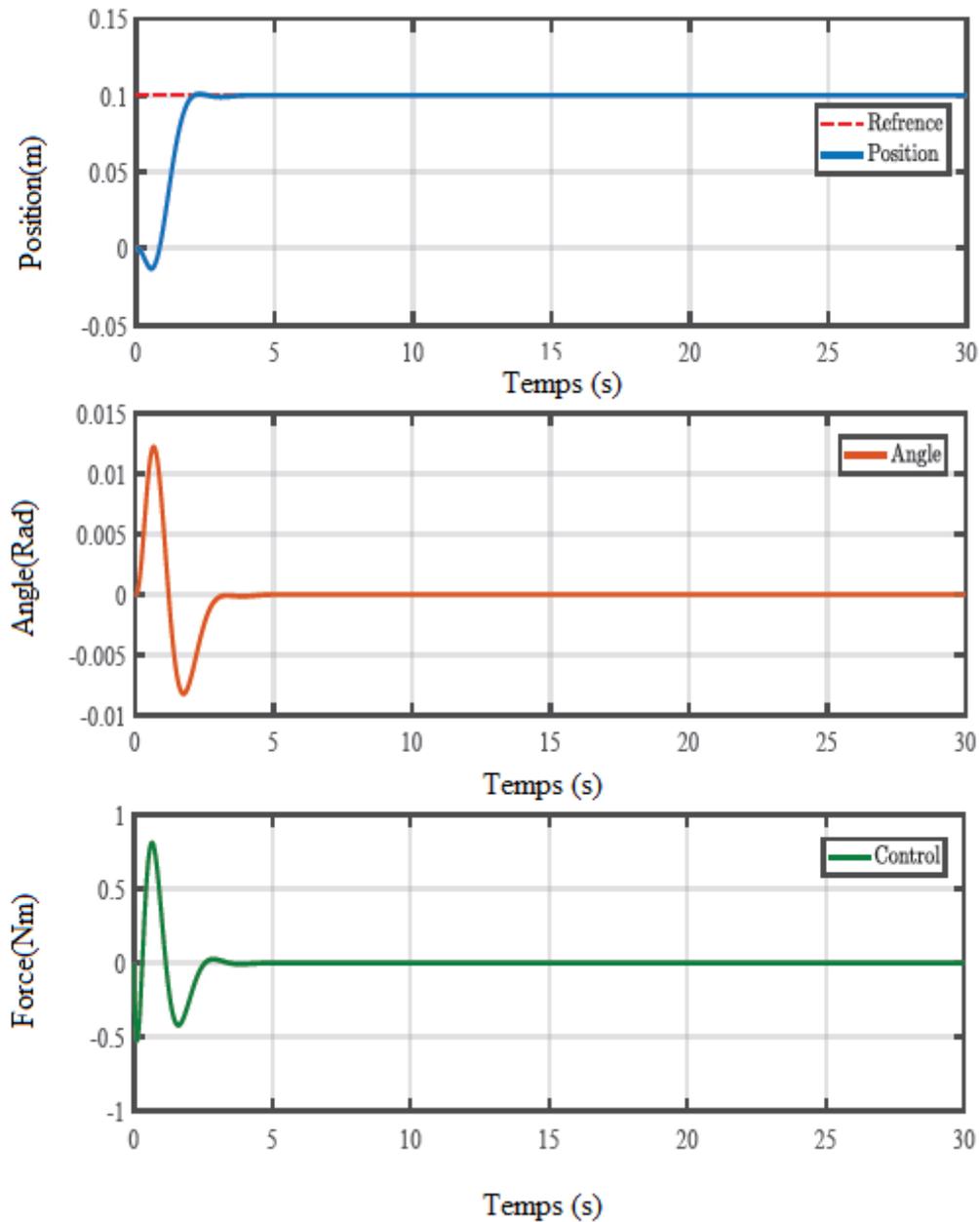


Figure II.11: la réponse d'un pendule inversé sous contrôleur LQR.

Nous voyons que le chariot prend 1,96 s pour se stabiliser à la référence souhaitée avec une erreur très petite. On constate alors que la réponse est très acceptable. Le pendule prend 3 s pour se stabiliser sur la référence donnée (Angle 0).

On peut dire que le contrôleur LQR répond aux objectifs de conception.

Pour tester notre système s'il est robuste et suit la référence comme nous le souhaitons. Nous appliquons une perturbation de 20% à partir de notre référence (0,1) environ 5 secondes (15-20 sec) après la simulation, nous obtenons ce résultat illustré à la figure (II.12).

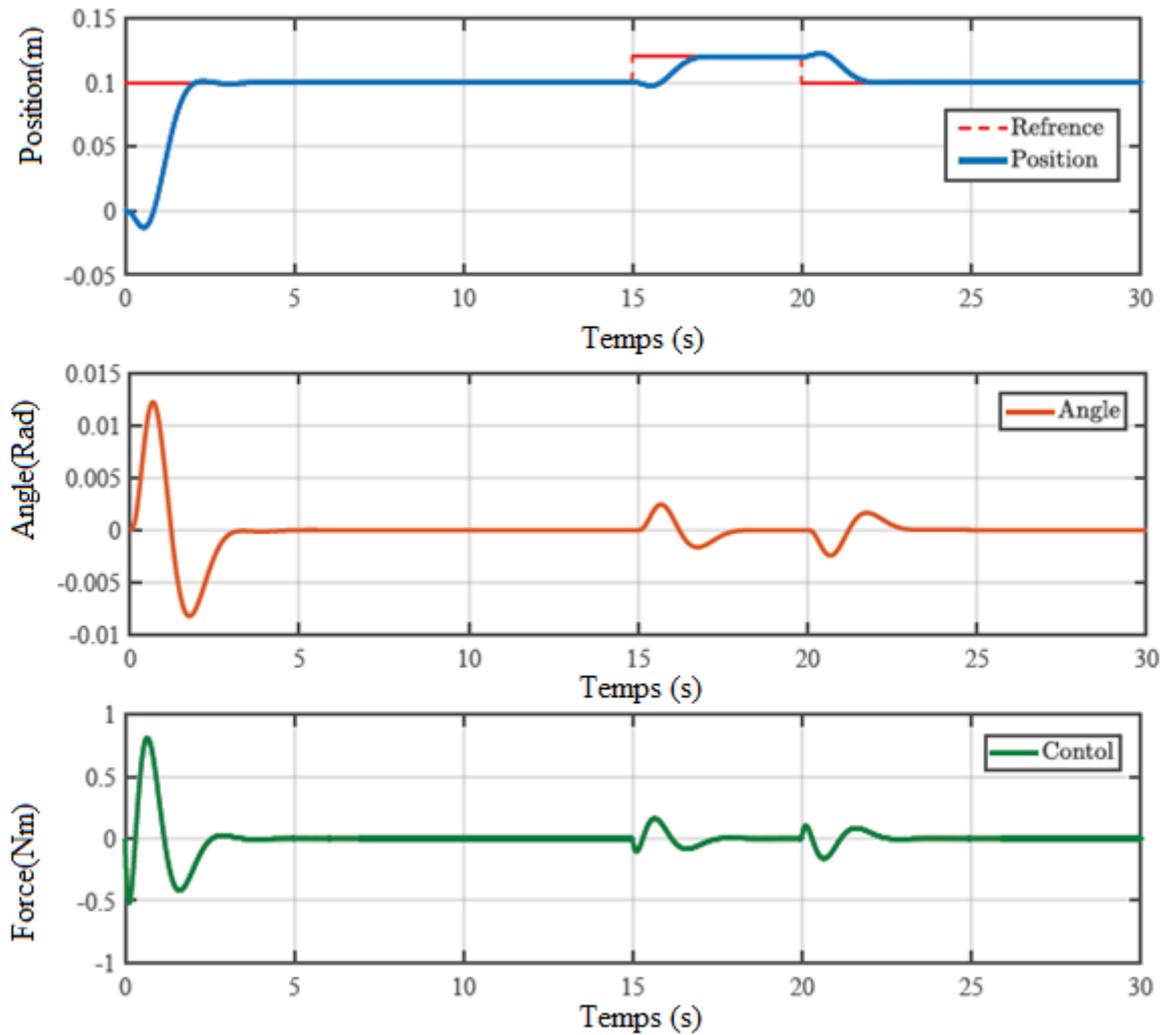


Figure II.12: la réponse d'un pendule inversé avec perturbation sous contrôleur LQR.

On voit que la position du chariot suit la nouvelle référence (0.12) pendant 5s, puis revient à la référence initiale comme nous l'avons donné au début avec un petit retard.

II.7. Comparaison

La figure (II.13) montre les résultats des trois contrôleurs linéaires. Nous voyons clairement que toutes les réponses suivent la nouvelle référence avec des performances divers présenté dans le tableau suivant.

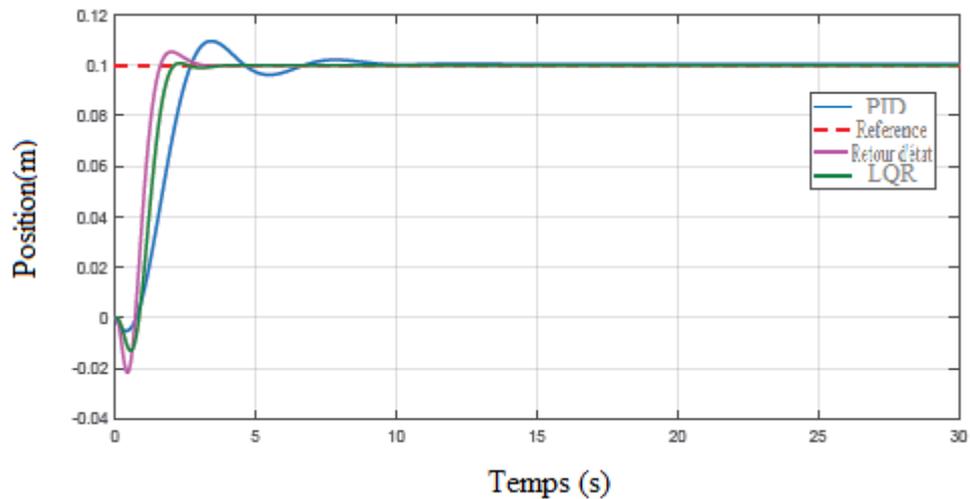


Figure II.13: Réponse du pendule inversé sous les commandes linéaires.

Tableau II. 3: Tableau de comparaison.

Contrôleur	Temps de montée (s)	Temps d'établissement (s)	Dépassement (%)	Erreur (%)
PID	1.51	6.07	6.16	1.06
Retour d'état	0.62	2.53	5.33	1.09
LQR	0.79	1.96	0.84	0.9

D'après le tableau on peut bien conclure que la commande LQR est le plus performant (rapidité et précision).

Afin de tester la robustesse des différents contrôleurs on applique une perturbation externe sur le chariot. La figure suivante présente les réactions des différents contrôleurs.

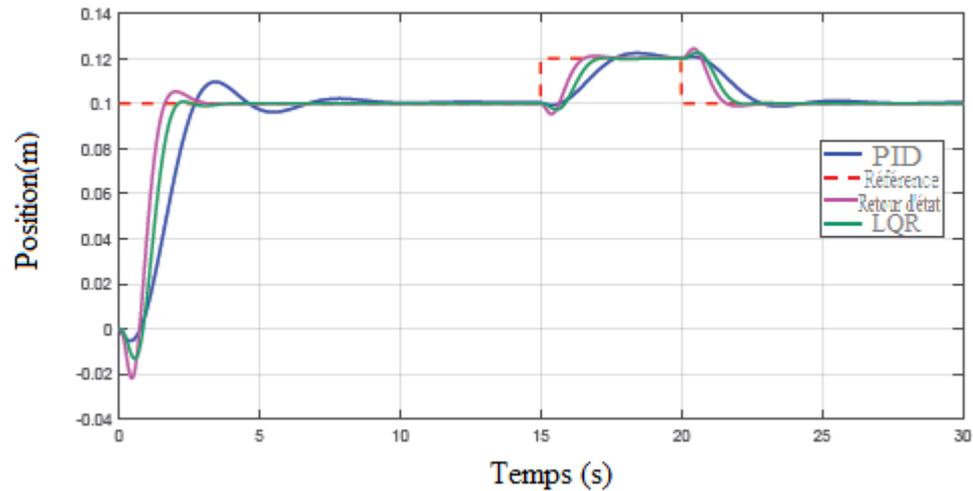


Figure II.14: Réponse du pendule inversé avec perturbation sous les commandes linéaires.

À partir de la figure (II.14), nous constatons que le contrôleur retour d'état est le plus robuste.

II.8. Conclusion

Dans ce chapitre, on a présenté des méthodes et des techniques de commande linéaire d'un pendule inversé utilisant d'un contrôleur PID et retour d'état et contrôleur LQR et nous avons conclu que le contrôleur LQR est le plus performant et commande par retour d'état est le plus robuste.

Chapitre III :
Commande non
linéaire d'un
pendule inversé

III.1. Introduction

C'est un fait bien connu que les systèmes réels sont tous de nature non linéaire, et bien que la plupart d'entre eux puissent être traités par la théorie de la commande linéaire. Les progrès technologiques ont produit une grande variété de problèmes et d'applications qui sont essentiellement non linéaires.

Le pendule inversé est l'un des systèmes fortement non linéaires et la meilleure façon de le contrôler tout en préservant sa nature est l'utilisation d'un contrôle non linéaire ce qui sera l'objectif de ce chapitre.

III.2. Logique floue

Logique floue est la plus utilisée dans la commande de systèmes non linéaires complexes dans le but de traiter des problèmes de commande qui sont soit difficiles à automatiser avec une approche conventionnelle, soit dont les sources d'information sont considérées comme imprécises ou incertaines.

La théorie de la logique floue « FL » a été développée par Lotfi Zadeh en 1960. C'est une méthodologie de calcul basée non pas sur des valeurs numériques mais sur des variables linguistiques prenant des valeurs linguistiques appartenant au langage humain. Le premier contrôleur à logique floue a été proposé par Mamdani en 1974, mais la véritable montée en puissance du contrôle à logique floue a commencé au Japon au début des années 1980.

Par TakagiSugeno et Tongin Cet algorithme de commande est basé sur un ensemble de règles floues appelée base de règles. Toutes les règles de l'ordre sont liées par les notions d'implication, de composition FLOUE et de règles d'inférence floues [28].

III.2.1. Concepts de base de la logique floue

III.2.1.1. Ensemble flou

En logique floue, un sous-ensemble A de B est défini par une fonction d'appartenance $u_A(x)$ pouvant prendre différentes valeurs entre 0 et 1 selon le degré d'appartenance de l'élément x au sous-ensemble A

$$u_A(x) \in [0 \ 1]$$

III.2.1.2. Univers du discours

C'est l'ensemble des valeurs réelles (l'intervalle numérique) qui peut prendre la variable floue, en général l'univers du discours est noté par des majuscules (U, W, ...).

III.2.1.3. Variables et valeurs linguistiques

Une variable linguistique représente un état dans le système à régler ou une variable de réglage dans un contrôleur flou. Chaque valeur constitue un ensemble flou de l'univers du discours. Figure (III.1).

Fonction d'appartenance

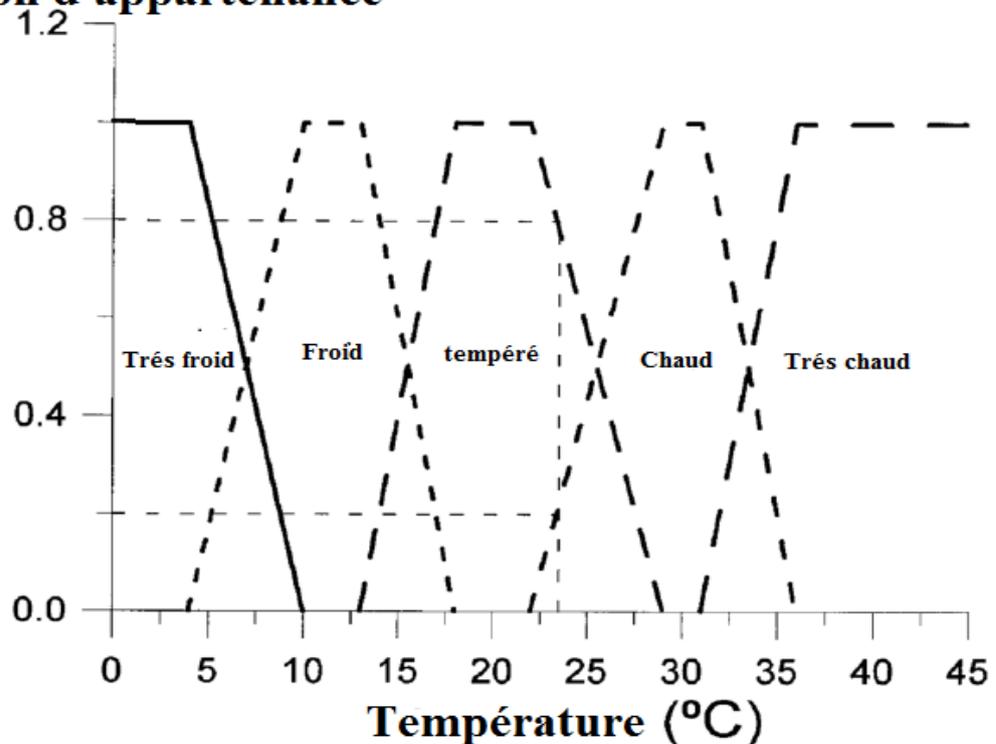


Figure III.1: Variables et valeurs linguistiques.

1. Univers du discours : température de -10 à 14 c
2. Variables linguistiques : température
3. Valeurs linguistiques : « froid » « chaud »
4. Fonction d'appartenance : Nous savons déjà que la logique floue n'est pas une logique qui est floue mais une logique qui sert à décrire le flou. Ce flou est mieux caractérisé

par sa fonction d'appartenance. En d'autres termes, nous pouvons dire que la fonction d'appartenance représente le degré de vérité en logique floue. Les fonctions d'appartenance sont représentées par des formes graphiques (fig. III.2.).

Des études comparatives ont montré qu'avec les différentes formes des fonctions d'appartenance, les résultats sont pratiquement similaires en boucle fermée. La forme la plus fréquemment utilisée dans l'ordre flou est la fonction triangulaire et le nombre de fonction dépend de la précision souhaitée.

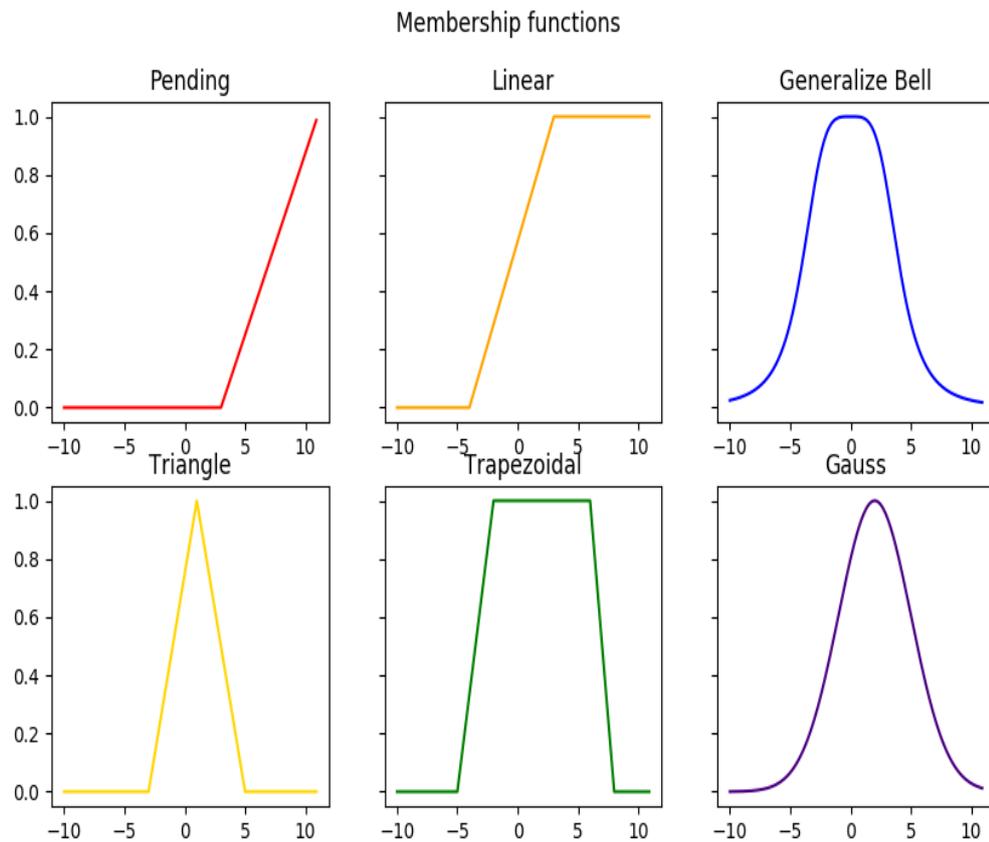


Figure III.2: Différents types de fonction d'appartenance.

III.2.2. Structure d'un contrôleur flou

La commande floue est l'application la plus utilisée de la logique floue. La structure générale d'un contrôleur flou est montrée sur la figure suivante:

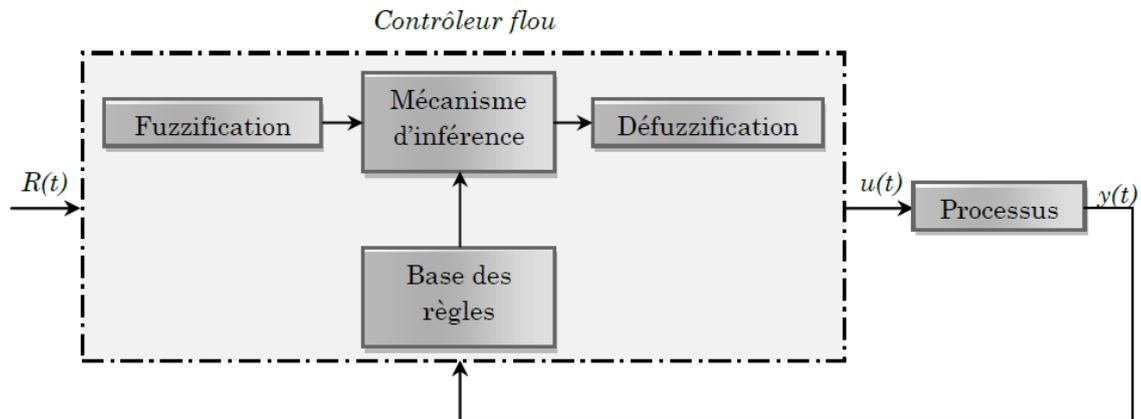


Figure III.3: Structure générale d'un contrôleur flou.

Le contrôleur flou comporte essentiellement quatre parties; un bloc de fuzzification, une base des règles, un mécanisme d'inférence et un bloc de défuzzification.

III.2.2.1. Bloc de fuzzification

Il sert à transformer les variables numériques non floues provenant des entrées en variables linguistiques floues. La fuzzification consiste à définir les fonctions d'appartenance pour les différentes variables d'entrées et de sortie. Dans le cas de réglage par la logique floue, on utilise en général des formes trapézoïdales et triangulaires pour les fonctions d'appartenances.

III.2.2.2. Base de règles

Ce bloc permet de déterminer le signal de sortie du contrôleur flou il est constitué d'un ensemble de règles données sous la forme « Si. . . Alors. . . » consistant en toutes les informations et connaissances dans le domaine d'application et le résultat de contrôle visé On peut écrire les règles d'inférence sous la forme d'une matrice appelée Matrice d'inférence, qui est généralement antisymétrique.

III.2.2.3. Système d'inférence floue

L'inférence floue est le cœur du contrôleur flou qui a la capacité de simuler des décisions humaines l'utilisation floue de variables transformées par fuzzification et de règles d'inférence pour créer et déterminer des variables floues de sortie [29]

1. L'inférence de type Mamdani s'attend à ce que les fonctions d'appartenance de sortie soient des ensembles flous. Après le processus d'agrégation, il existe un ensemble flou pour chaque variable de sortie, qui nécessite une défuzzification.

2. La méthode Sugeno d'inférence floue est similaire à la méthode Mamdani à bien des égards. Les deux premières parties du processus d'inférence floue, fuzzifier les entrées et appliquer l'opérateur flou, sont exactement les mêmes.

La principale différence entre les inférences floues de type Mamdani et de type Sugeno est que les fonctions d'appartenance de sortie ne sont linéaires ou constantes que pour l'inférence floue de type Sugeno.

III.2.2.4. Défuzzification

La dernière étape pour avoir un système flou Il existe plusieurs méthodes de défuzzification, la plus utilisée est la méthode du centre de gravité.

Nous avons utilisé la méthode Sugeno-Takagi pour concevoir le contrôleur de logique floue. Les valeurs d'entrée du contrôleur sont des variables linguistiques : l'angle, la vitesse angulaire, la position et la vitesse.

Les fonctions d'appartenance pour les valeurs d'entrée sont illustrées dans les Fig.III.4, Fig.III.5, Fig.III.6 et Fig.III.7

Les valeurs de toutes les variables linguistiques ont été définies comme les ensembles suivants : négatif (N), positif (P).

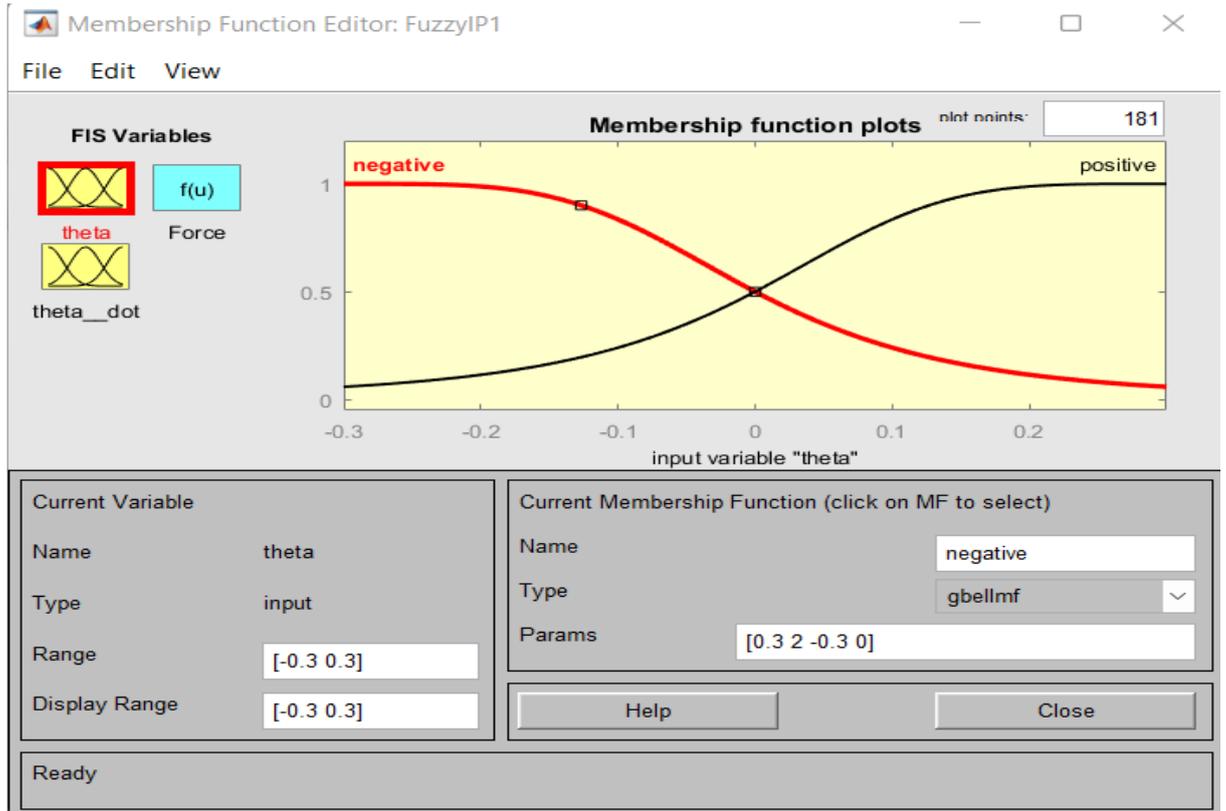


Figure III.4: Fonction d'appartenance de l'angle .

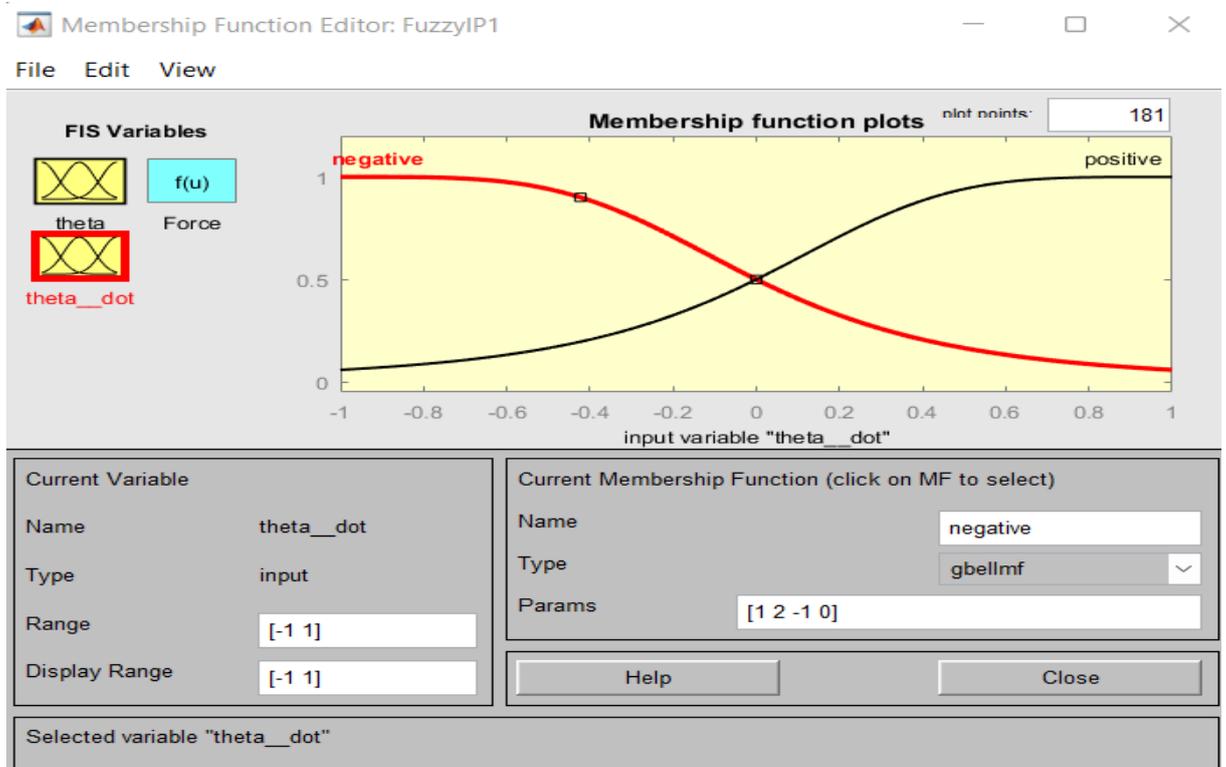


Figure III.5: Fonction d'appartenance de la vitesse angulaire.

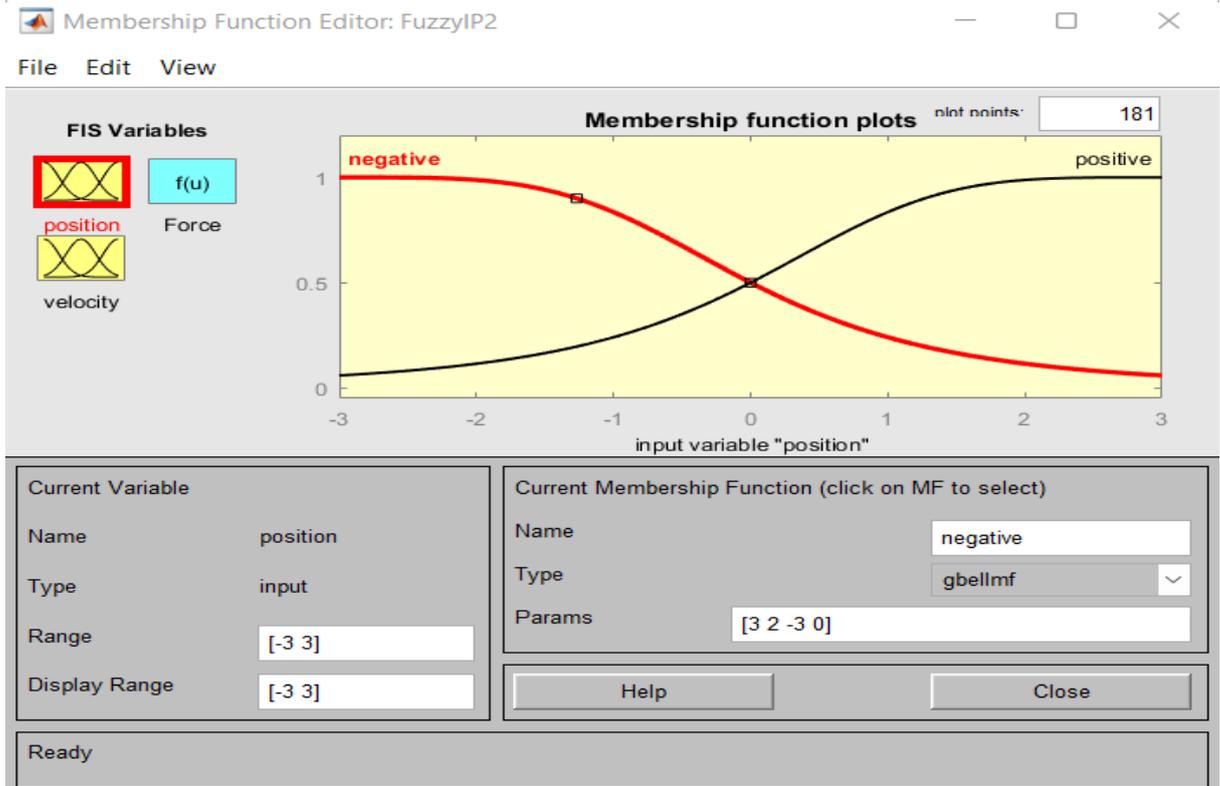


Figure III.6: Fonction d'appartenance de la position.

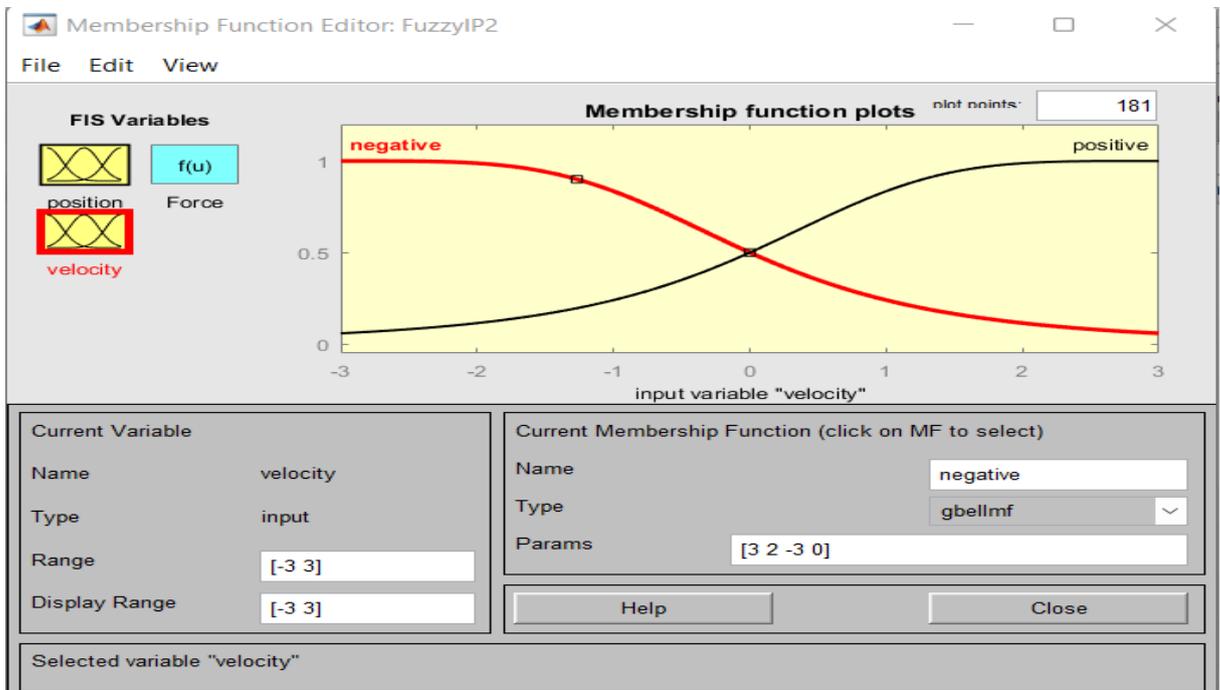


Figure III.7: Fonction d'appartenance de la vitesse.

La sortie du contrôleur est la force F appliquée au chariot, les fonctions d'appartenance de sortie du pendule inversé illustrées à la Fig.III.8, Fig.III.9

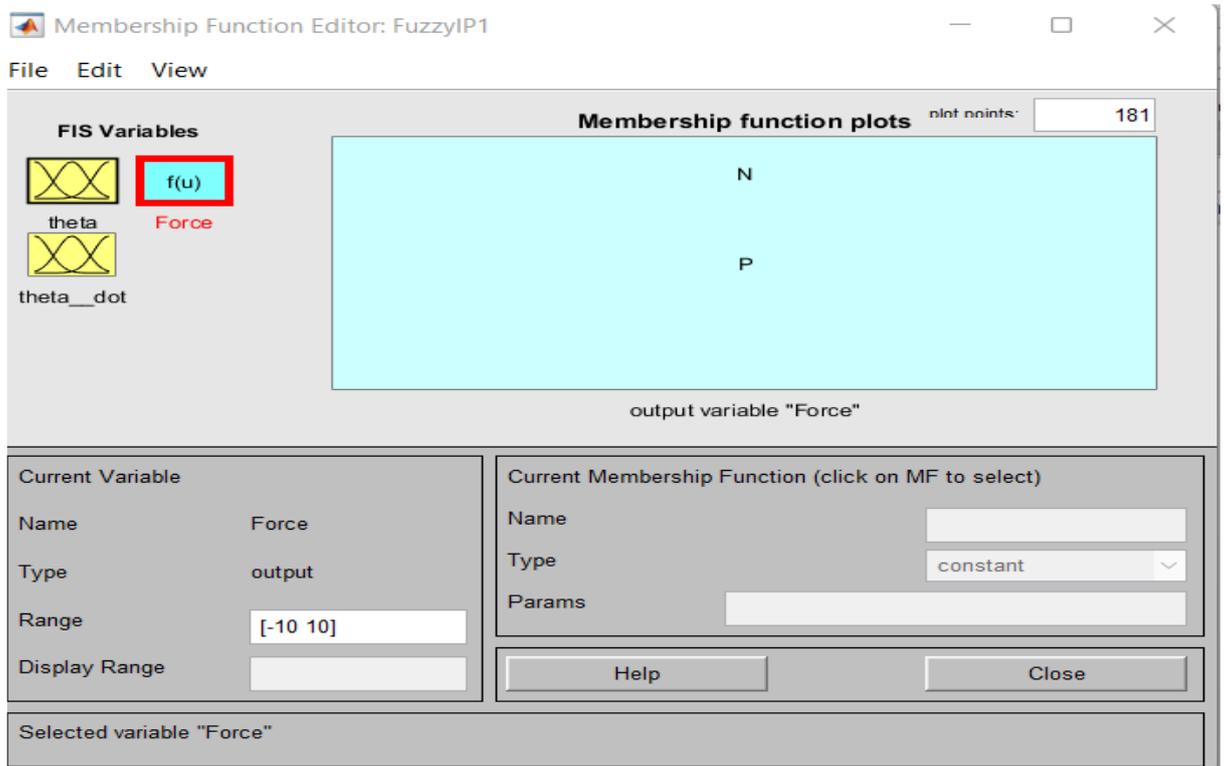


Figure III.8: Force du pendule.

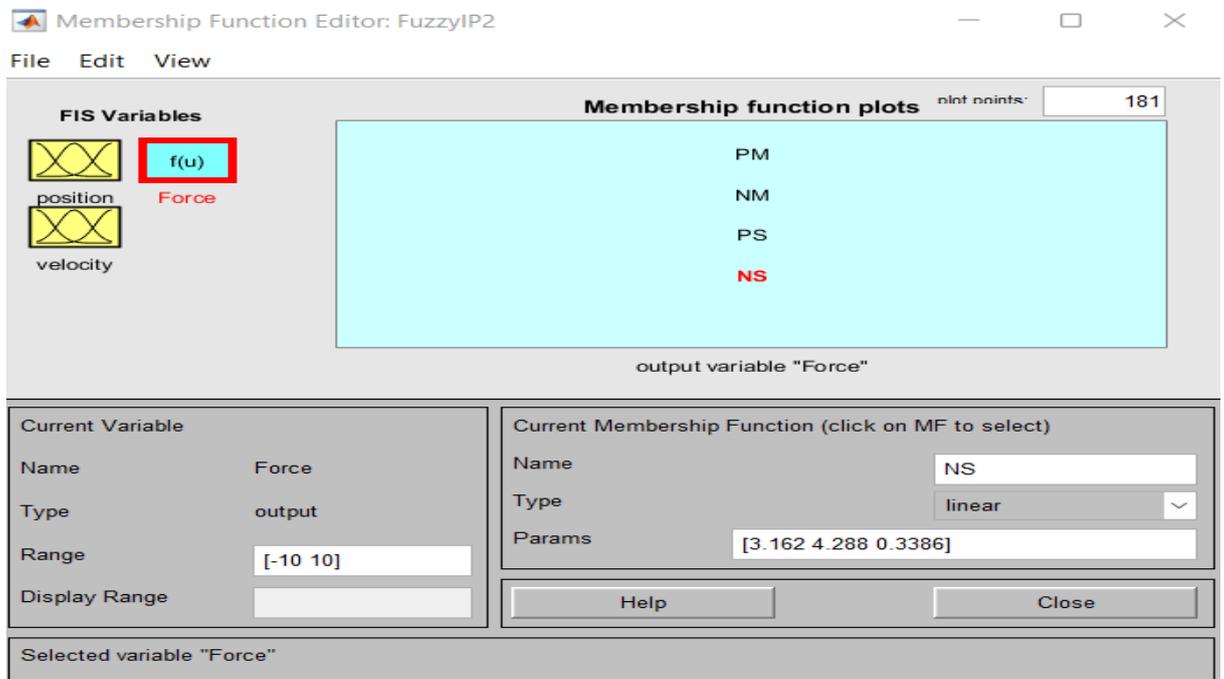


Figure III.9: Force de position du chariot.

Le dernier élément de conception du contrôleur flou est la connexion des ensembles flous d'entrée avec les ensembles de sortie au moyen de règles sous la forme d'instructions conditionnelles si-alors. La base de règles est représentée dans la Fig.III.10 et la surface dans III.11

U		E	
		N	P
DE	N	NM	NM
	P	PM	PM

(a)

U		E	
		N	P
DE	N	N	P
	P	N	P

(b)

Figure III.10 : (a) : règles de chariot, (b) : règles de pendule.

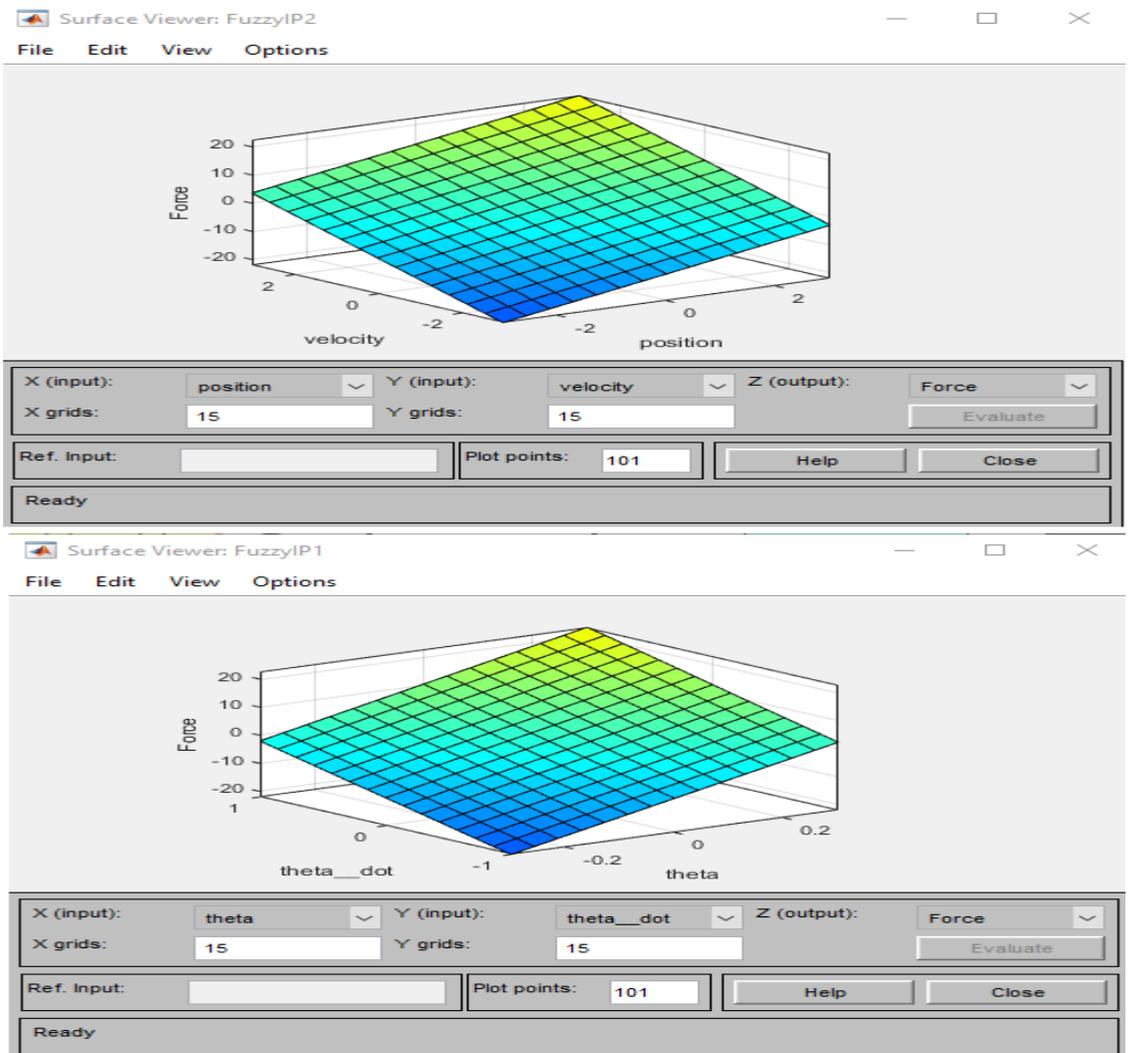


Figure III.11 : (1) : surface du chariot, (2) : surface du pendule.

Par tâtonnements nous avons choisi le gain de flou comme (FigIII.12) :

1. La position du chariot $k_1 = 150, k_2 = 255$
2. Pendule angulaire $k_1 = 200, k_2 = 255$

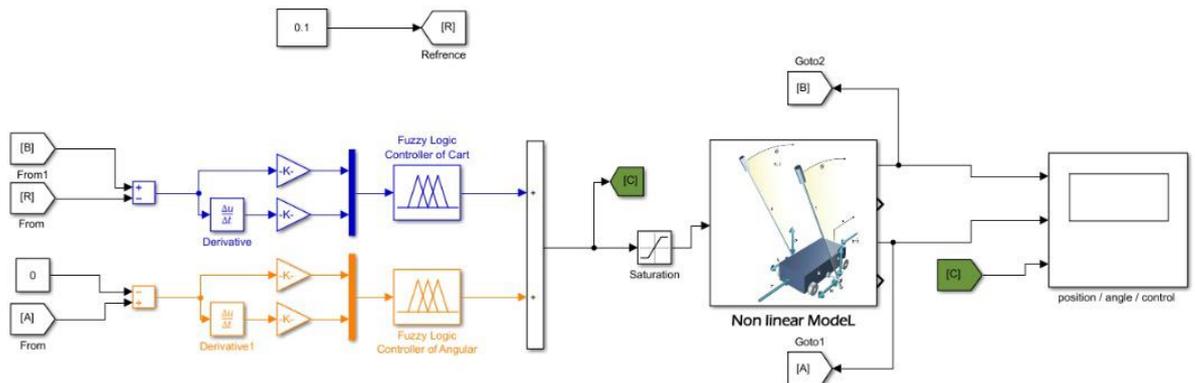


Figure III.12 : Bloc Simulink sous le contrôleur Flou.

III.2.3. Flou avec PI

Afin de minimiser l'erreur en régime permanent, nous ajoutons PI (Fig.III.13) Avec des essais et des erreurs,

Nous avons choisi le gain de PI comme :

1. La position du chariot $k_p = 1, k_i = 1$
2. Pendule angulaire $k_p = 1, k_i = 0,05$

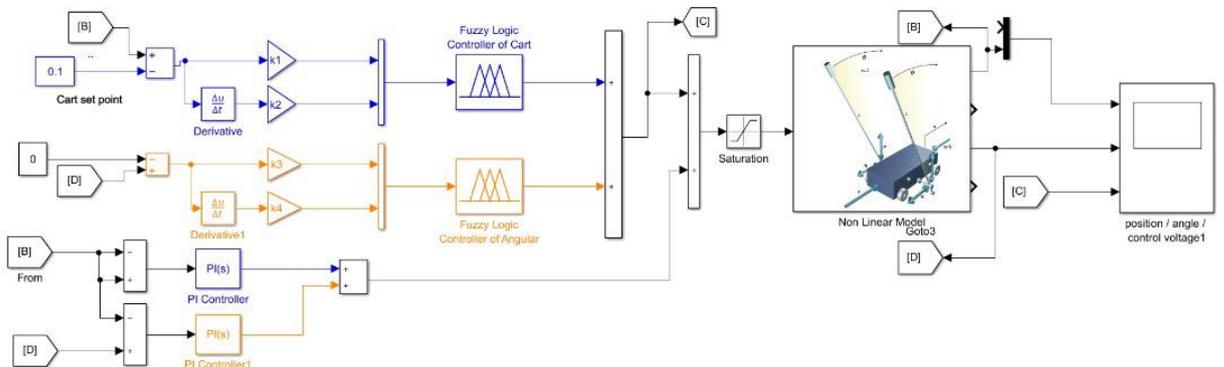


Figure III.13 : Bloc Simulink sous le contrôleur Flou avec PI.

II.2.4. Résultats et discussion

- Logique floue

Sur la base des règles du chariot et du pendule, nous avons appliqué une référence de 0,1 à la position du chariot et de 0 au pendule, les résultats sont présentés sur la figure (III.14)

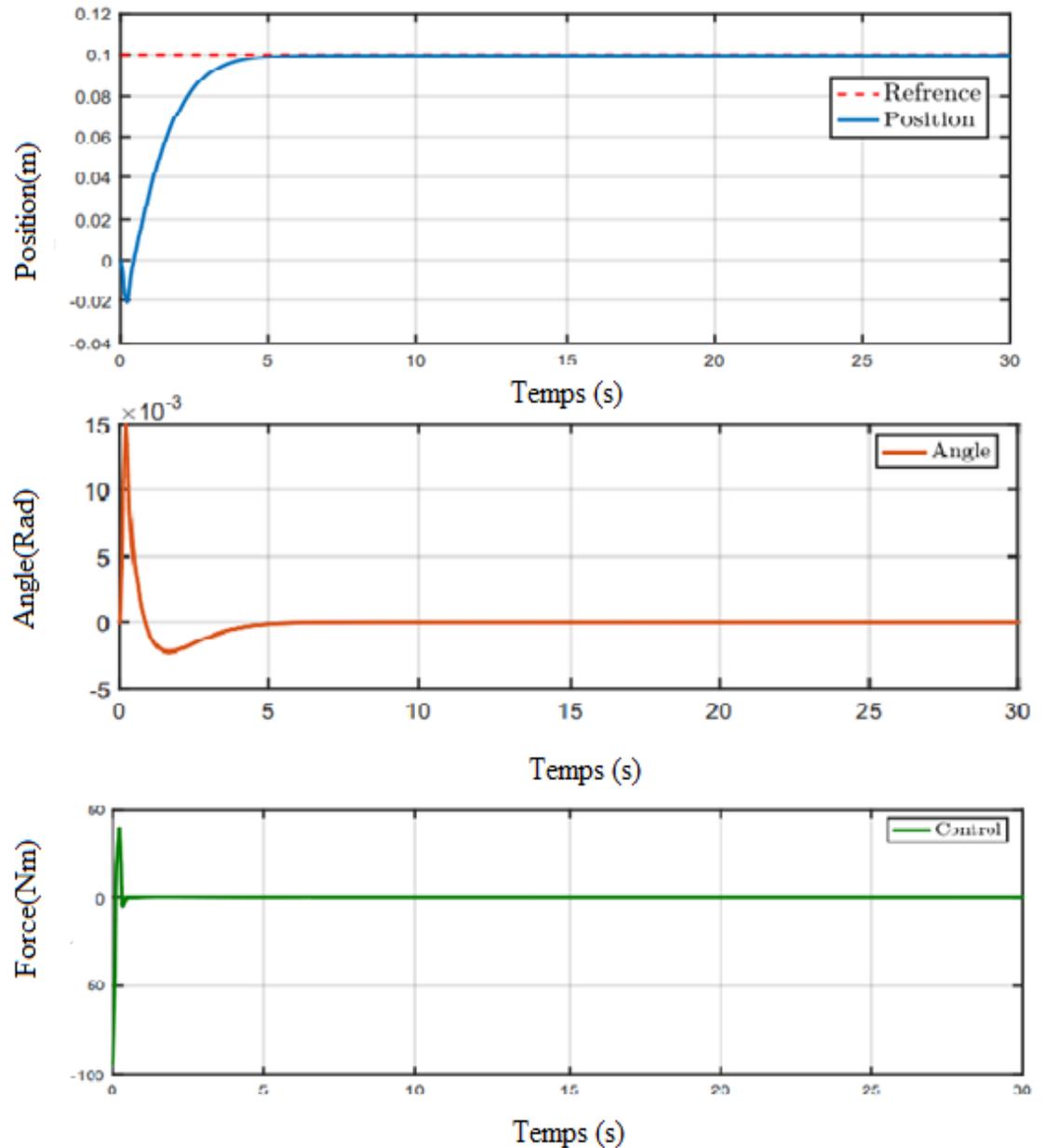


Figure III.14 : Réponse d'un pendule inversé sous le contrôleur Flou.

Nous voyons que le chariot prend 5,887 s pour se stabiliser à la référence souhaitée avec une erreur très petite. On constate alors que la réponse est très acceptable. Le pendule prend 5s pour se stabiliser sur la référence donnée (Angle 0).

On peut dire que le contrôleur Floue répond aux objectifs de conception

Pour tester notre système s'il est robuste et suit la référence comme nous le souhaitons. En appliquant une perturbation de 20 % à partir de notre référence (0,1) environ 5 secondes (15-20 sec) après la simulation, nous obtenons ce résultat illustré à la Fig (III.15).

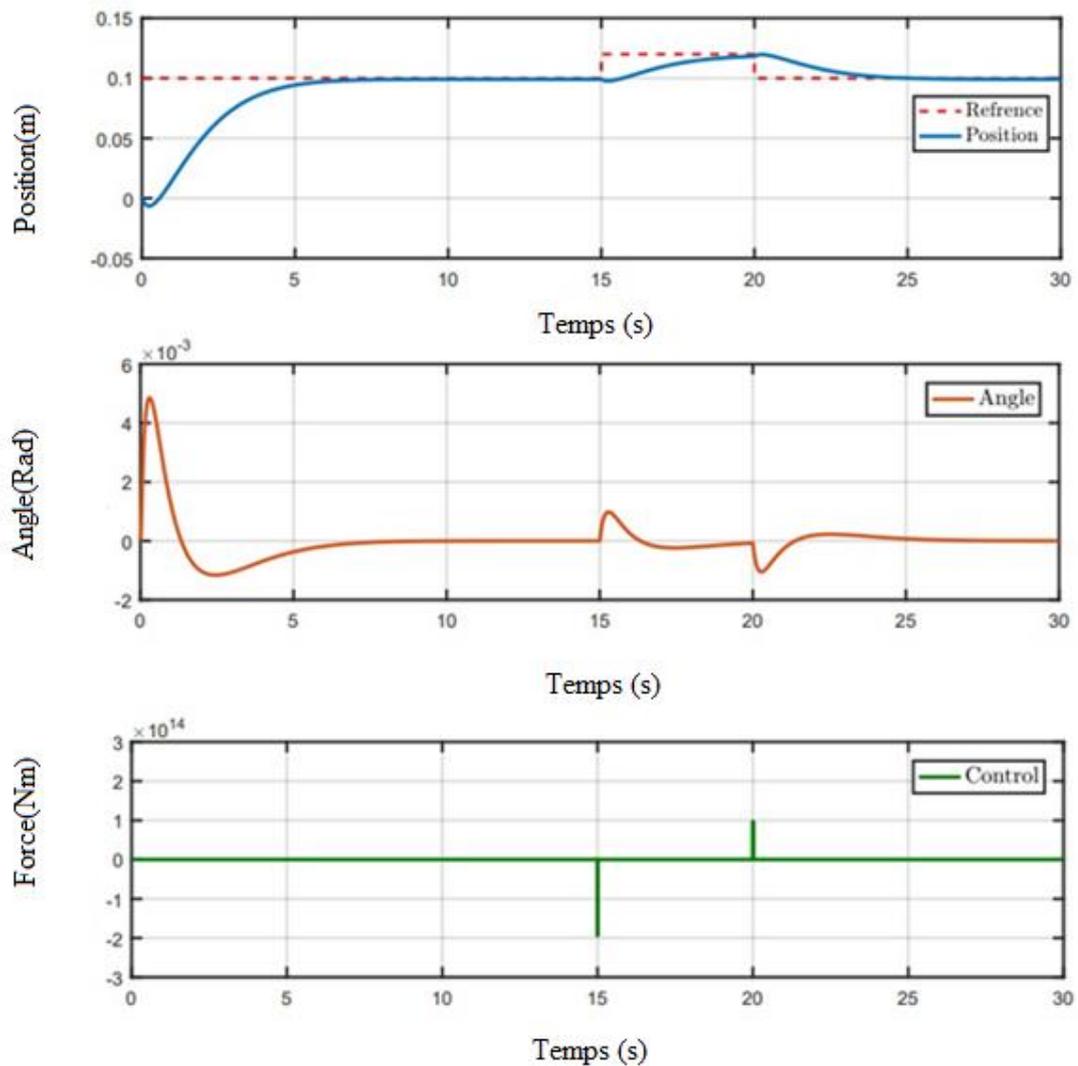


Figure III.15 : Réponse d'un pendule inversé avec perturbation sous le contrôleur Flou.

On voit que la position du chariot suit la nouvelle référence (0.12) pendant 5s, puis revient à la référence initiale comme nous l'avons donné au début avec un petit retard.

- **Logique floue avec PI**

Après avoir mis les règles du chariot et du pendule, nous avons appliqué une référence de 0,1 à la position du chariot et de 0 au pendule, les résultats sont présentés sur la figure (III.16).

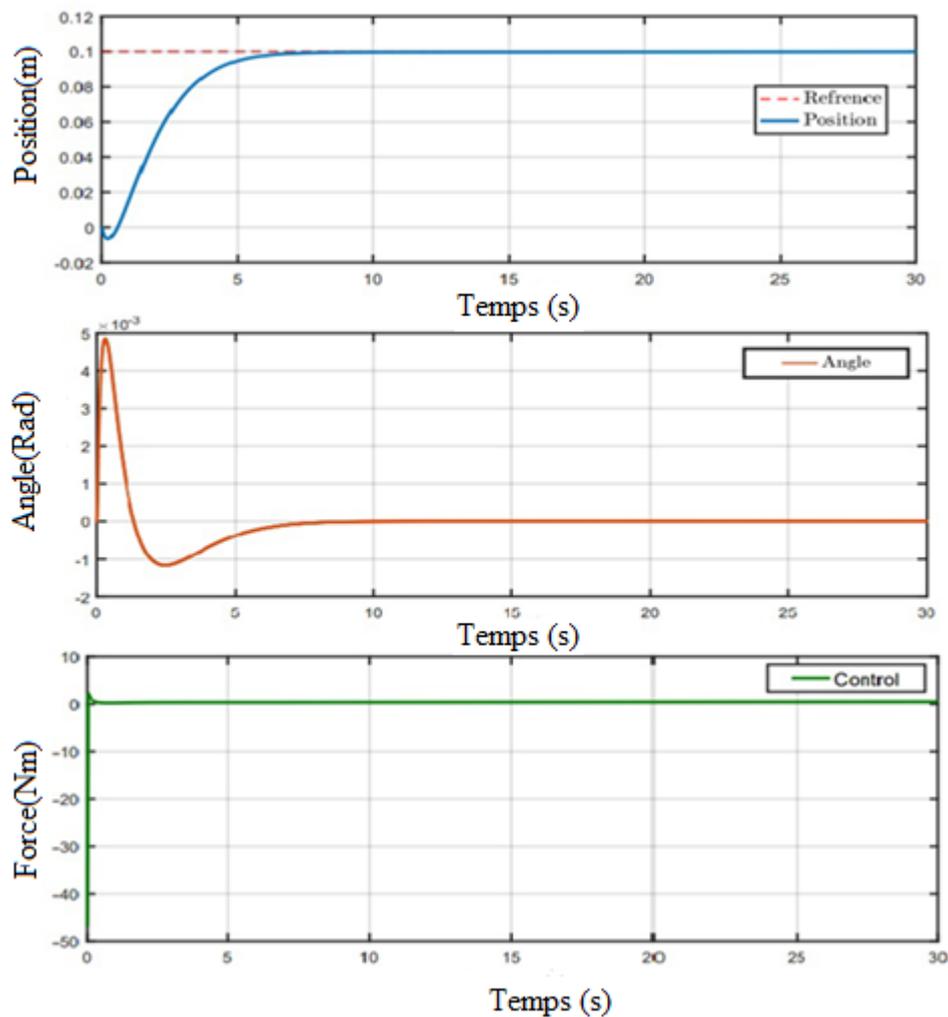


Figure III.16 : Réponse d'un pendule inversé sous le contrôleur Flou avec PI.

Nous voyons que le chariot prend 6,25 s pour se stabiliser à la référence souhaitée avec une erreur très petite. On constate alors que la réponse est très acceptable. Le pendule prend 8 s pour se stabiliser sur la référence donnée (Angle 0).

On peut dire que le contrôleur Floue avec PI répond aux objectifs de conception

Pour tester notre système s'il est robuste et suit la référence comme nous le souhaitons. En appliquant une perturbation de 20 % à partir de notre référence (0,1) environ 5 secondes (15-20 sec) après la simulation, nous obtenons ce résultat illustré à la Fig (III.17)

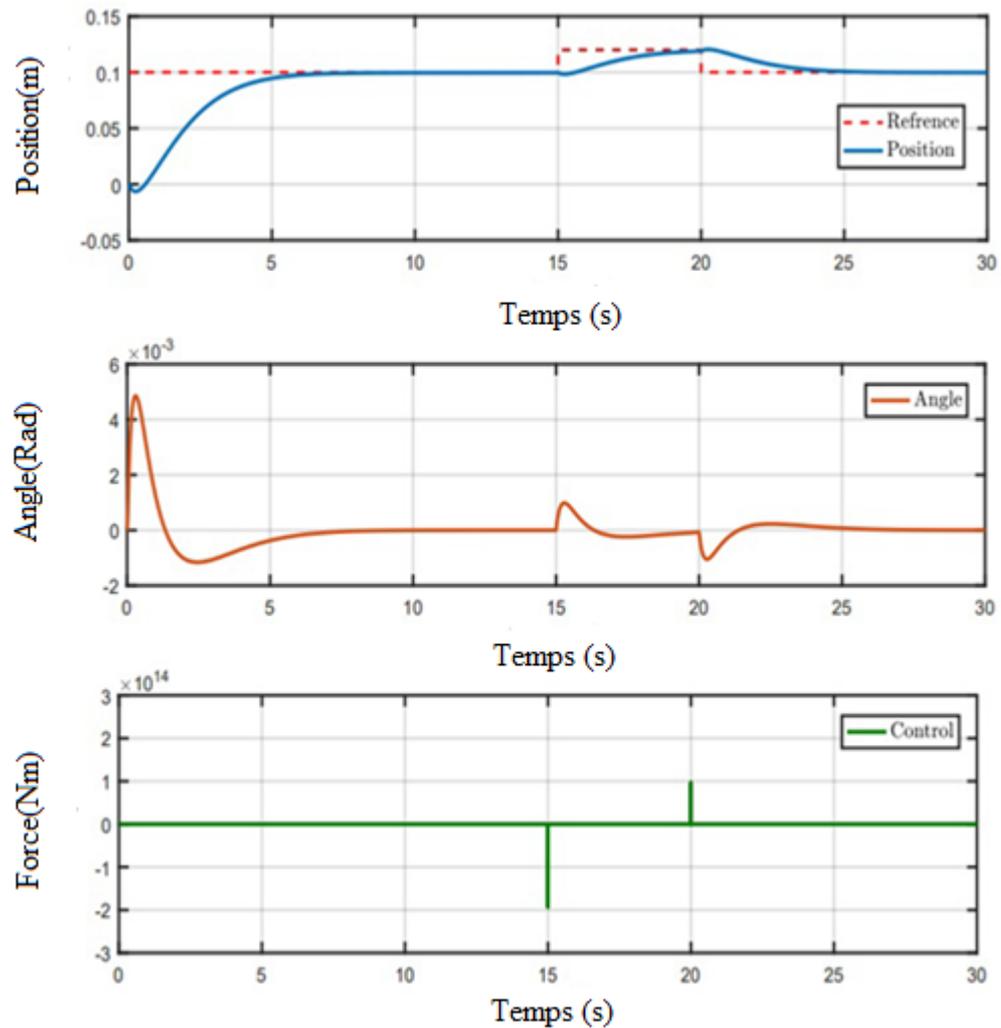


Figure III.17 : Réponse d'un pendule inversé avec perturbation sous le contrôleur Flou avec PI.

On voit que la position du chariot suit la nouvelle référence (0.12) pendant 5s, puis revient à la référence initiale comme nous l'avons donné au début avec un petit retard.

III.3. Commande par mode glissant

La commande par mode glissant (SMC) est une technique de contrôle non linéaire présentant des propriétés remarquables de précision, de robustesse et de facilité de réglage et de mise en œuvre. Les systèmes SMC sont conçus pour conduire les états du système sur une surface particulière dans l'espace d'état, appelée surface de glissement (Fig.III.18). Il est basé sur deux étapes.

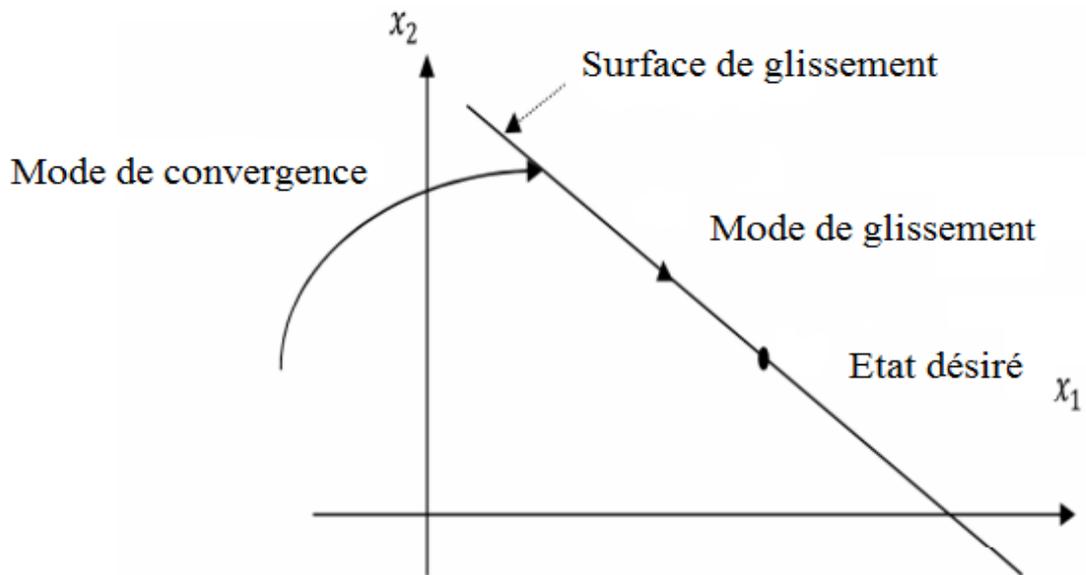


Figure III.18 : Convergence du système glissant.

III.3.1 Surface de glissement

La surface de glissement est conçue pour avoir un ordre réduit du système et une dynamique souhaitée.

La surface de commutation est linéaire invariante dans le temps et exponentiellement stable.

La surface de commutation est définie en fonction de l'erreur entre les états du système et la valeur de référence des états si un contrôle de suivi est souhaité [30].

Le contrôle du suivi est souhaité. Soit $e = x_i - x_{id}$ où $x_i = i^{\text{ème}}$ variable d'état et $x_{id} =$ référence du $i^{\text{ème}}$ état et $i = 1, 2, \dots, n$, où n est l'ordre du système d'origine. Ensuite, la surface de commutation peut être définie comme suit :

$$S(e) = \left(\frac{d}{dt} + \lambda \right)^{n-1} e \quad (\text{III.1})$$

où λ est un paramètre de réglage qui définit certaines propriétés souhaitées dans la dynamique de la surface comme la constante de temps de la surface et il est constant positif.

e(t) : La différence entre la variable contrôlée et sa référence.

n: Le degré relatif, il représente le nombre de fois où la surface doit être dérivée pour faire apparaître le contrôle.

III.3.2. Conception de la commande par mode de glissement

La deuxième étape concerne la sélection d'une loi de commande qui rendra la surface de commutation attractive pour l'état du système.

$$u = u_{equ} + u_d$$

u_{equ} : est proposé par Phillipov et Ut-kin, il sert à maintenir la variable à contrôler sur la surface de glissement $S(x) = 0$. Il est introduit en considérant que $S(x) = 0 \Rightarrow \dot{S}(x) = 0$

u_d : est introduit pour vérifier la condition de convergence $S(x). \dot{S}(x) = 0$

$$\dot{V}(S(x)) = S(x). \dot{S}(x) \quad (\text{III.2})$$

Pour assurer $\dot{V} < 0$, la loi de retour d'état ou doit être choisie telle que

$$\begin{cases} \dot{S} < 0 & \text{si } S > 0 \\ \dot{S} > 0 & \text{si } S < 0 \end{cases} \quad (\text{III.3})$$

La loi de commande u est choisie telle que

$$u = \begin{cases} u^+ & \text{si } S(x) > 0 \\ u^- & \text{si } S(x) < 0 \end{cases} \quad (\text{III.4})$$

III.3.2.1. Fonction de signe pour la commande du mode glissant

$$\begin{cases} \text{sign}(S(x)) = +1 & \text{si } S(x) > 0 \\ \text{sign}(S(x)) = -1 & \text{si } S(x) < 0 \end{cases} \quad (\text{III.5})$$

$$u_d = k \text{sign}(S(x)) \quad (\text{III.6})$$

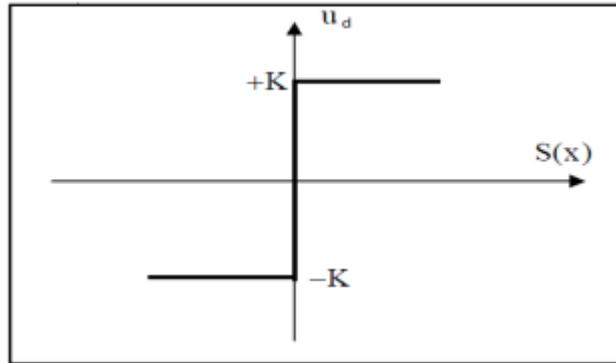


Figure III.19 : Fonction de signe.

III.3.2.2. Fonction Sat pour la commande du mode glissant.

$$\text{sat}(s) = \begin{cases} \frac{s}{\phi} & \text{si } \left| \frac{s}{\phi} \right| \leq 1 \\ \text{sign}\left(\frac{s}{\phi}\right) & \text{si } \left| \frac{s}{\phi} \right| > 1 \end{cases} \quad (\text{III.7})$$

$$u_d = k \text{sat}(S(x))$$

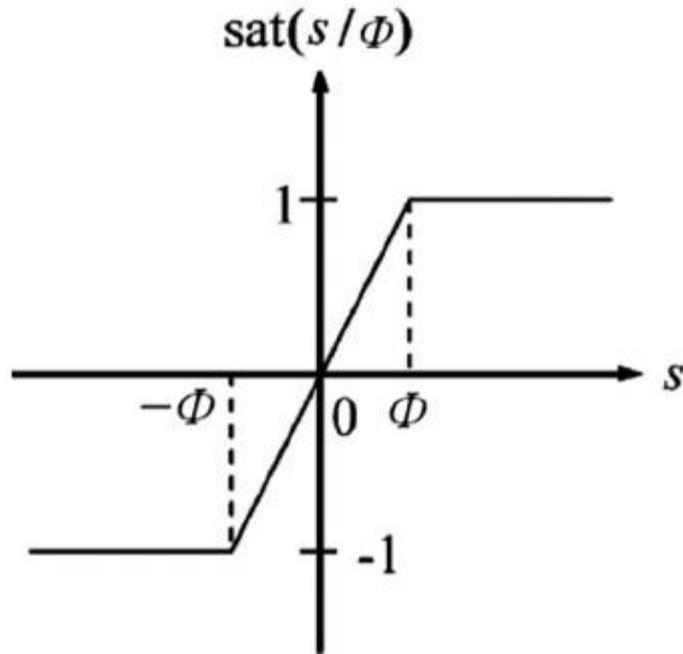


Figure III.20 : Fonction de Sat.

III.3.2.3. Fonction intégrale pour la commande en mode glissant

$$u_d = k \frac{s(x)}{|s(x)|+l} \quad (\text{III.8})$$

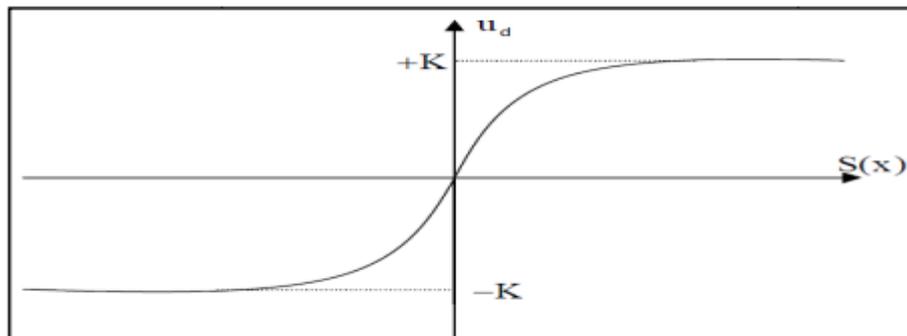


Figure III.21 : Fonction d'intégrale.

Pour le système non linéaire, on suppose que l'erreur entre la position souhaitée et la position courante de $e_1 = x_1 - x_{ref}$, $e_2 = x_3$ et la surface de glissement choisie est :

$$s = \dot{e} + \lambda e \quad (\text{III.9})$$

$$s = \underbrace{\lambda_1 x_1 + x_2}_{\text{Chariot}} + \underbrace{\lambda_3 x_3 + x_4}_{\text{pendule}} \quad (\text{III.10})$$

$$\dot{s} = \lambda_1 x_2 + \dot{x}_2 + \lambda_3 x_4 + \dot{x}_4 \quad (\text{III.11})$$

où

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = f_1(x) + g_1(x).u_{eq} \\ \dot{x}_4 = f_2(x) + g_2(x).u_{eq} \end{cases} \quad (\text{III.12})$$

Afin de minimiser le broutage nous avons choisi la fonction sat, la loi de commande en mode glissant suivante est supposée :

$$u = \frac{1}{g_1(x)+g_2(x)} \left(\underbrace{\lambda_1 x_2 - f_1(x) + \lambda_3 x_4 - f_2(x)}_{u_{equ}} + \underbrace{k \text{sat}(s)}_{u_d} \right)$$

Nous avons choisi :

$$\lambda_1 = 1,2$$

$$\lambda_3 = 9$$

$$k = 10$$

III.3.3. Résultats et discussion

Après avoir calculé la loi de commande du chariot et du pendule, nous avons appliqué une référence de 0,1 à la position du chariot et de 0 au pendule, les résultats sont présentés sur la figure (III.22)

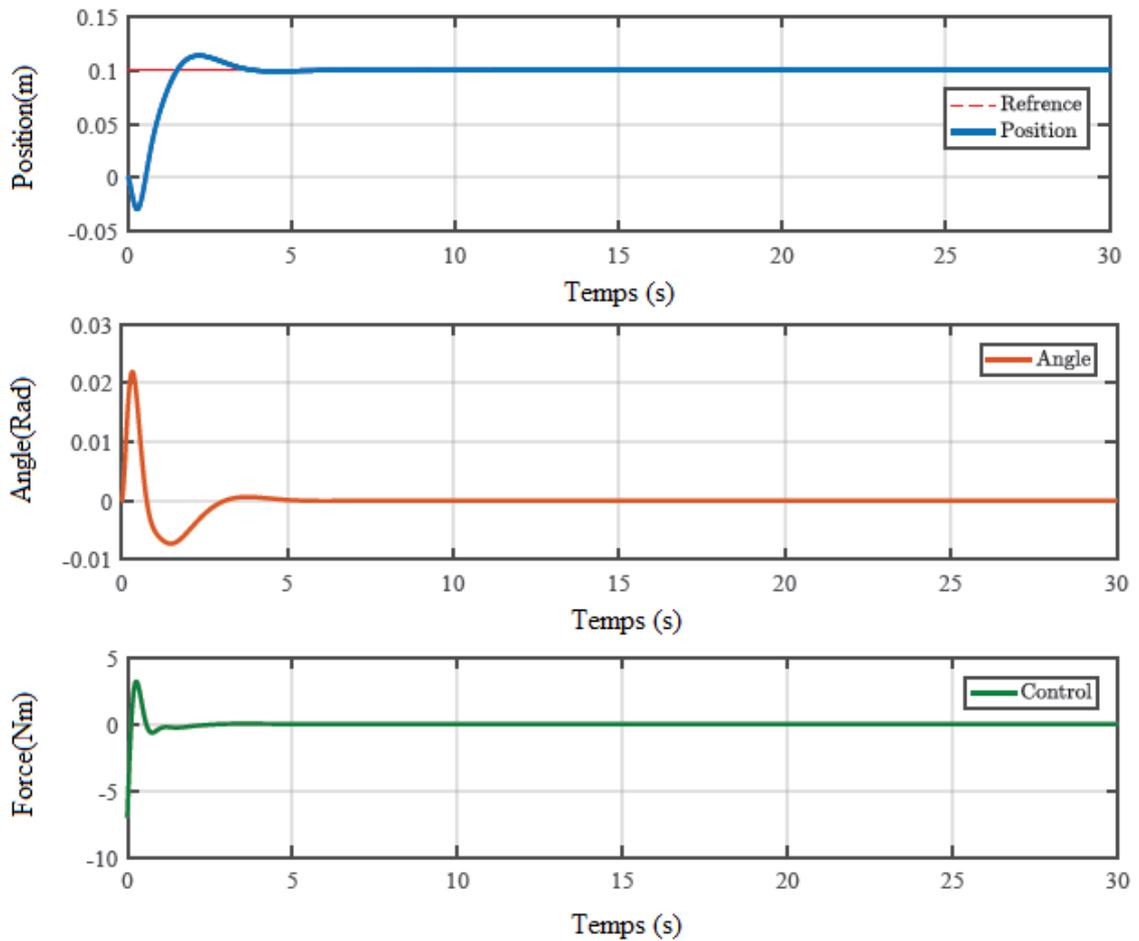


Figure III.22 : Réponse d'un pendule inversé sous le contrôleur par mode glissant.

Nous voyons que le chariot prend 3,42 s pour se stabiliser à la référence souhaitée avec une erreur très petite. On constate alors que la réponse est très acceptable. Le pendule prend 4,8 s pour se stabiliser sur la référence donnée (Angle 0).

On peut dire que le contrôleur mode glissant répond aux objectifs de conception.

Pour tester notre système s'il est robuste et suit la référence comme nous le souhaitons. En appliquant une perturbation de 20 % à partir de notre référence (0,1) environ 5 secondes (15-20 sec) après la simulation, nous obtenons ce résultat illustré à la Fig (III.23)

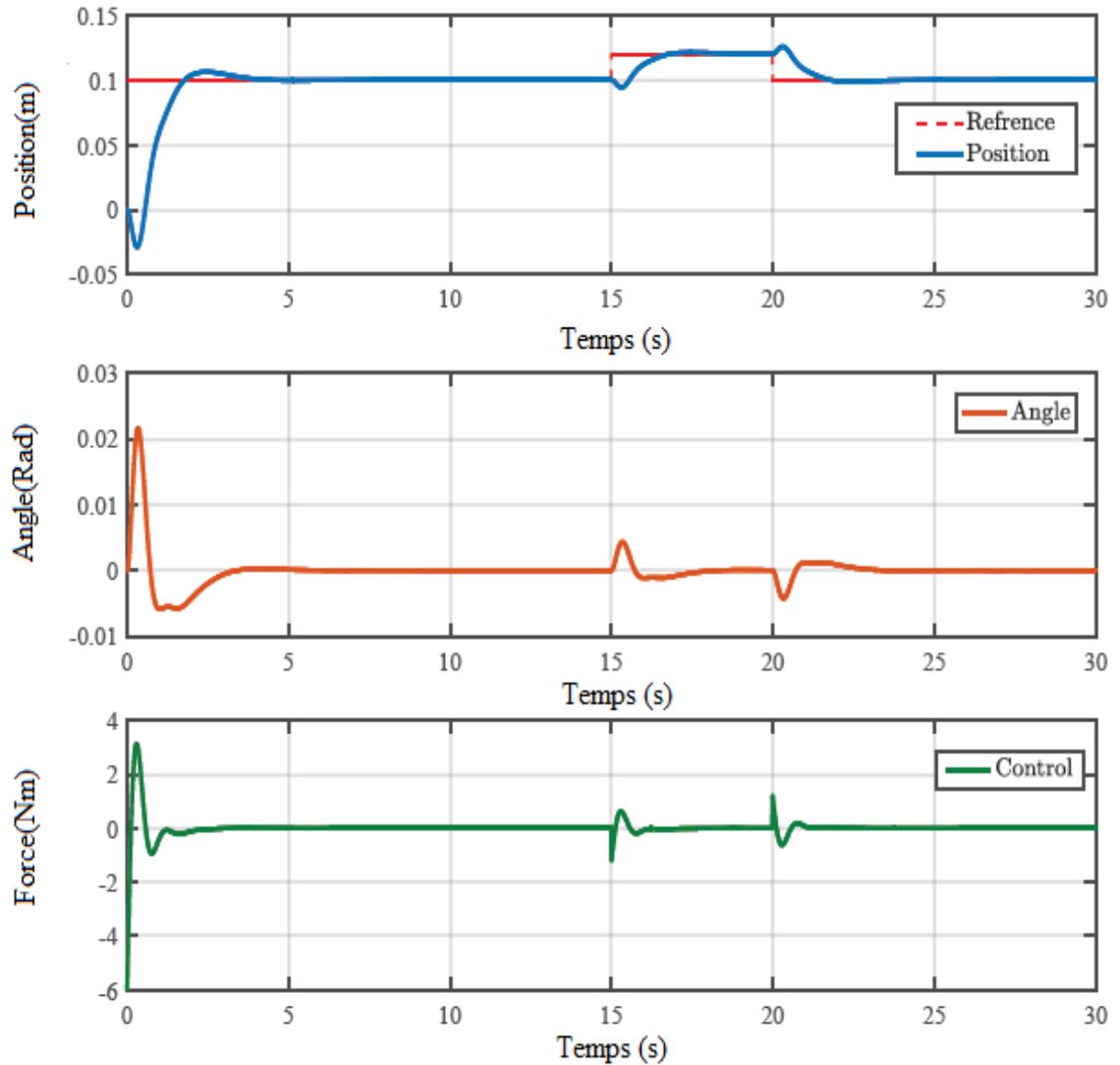


Figure III.23 : Réponse d'un pendule inversé avec perturbation sous le contrôleur par mode glissant.

On voit que la position du chariot suit la nouvelle référence (0.12) pendant 5s, puis revient à la référence initiale comme nous l'avons donnée au début avec un petit retard.

III.4. Linéarisation à rétroaction

La linéarisation par rétroaction est une technique puissante pour l'analyse et la conception de systèmes non linéaires. L'idée centrale de cette approche est de transformer algébriquement la dynamique du système non linéaire en un système entièrement ou partiellement linéarisé afin que les techniques de contrôle par rétroaction puissent être appliquées [31].

Pour tout système non linéaire qui est linéaire en entrée et non linéaire dans les états de la forme

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x)\end{aligned}$$

III.4.1. Dérivée de Lie

Considérons une fonction scalaire $h : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et définissons un champ vectoriel $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

La dérivée de Lie de h par rapport à f , notée $L_f h$, est donnée par

$$L_f h(x) = \frac{\partial h}{\partial x} f(x) \quad (\text{III.13})$$

$$\dot{h} = \frac{\partial h}{\partial x} \dot{x} = L_f h + L_g h u \quad (\text{III.14})$$

La loi de commande linéarisant est :

$$u = \frac{1}{L_f L_g h} (-L_f^2 h + v) \quad (\text{III.15})$$

v est la nouvelle variable d'entrée de contrôle et peut être choisi si le degré relatif est 2 comme :

$$v = [K_1 \quad K_2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (\text{III.16})$$

La sortie est la position

$$h(x) = x_1 = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

Ensuite, nous pouvons maintenant prendre la dérivée de Lie de la fonction de sortie jusqu'à ce que l'entrée de contrôle apparaisse

$$\dot{h} = \frac{\partial h}{\partial x} \dot{x} = L_f h + L_g h u = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] [f_1(x)] + [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] [g_1(x)] u = x_2$$

Prendre la 2ème dérivée

$$\ddot{h} = \frac{\partial \dot{h}}{\partial x} \dot{x} = L_f^2 h + L_f L_g h u = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0] [f_1(x)] + [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0] [g_1(x)] u$$

$$\ddot{h} = \ddot{x}$$

La loi de commande linéarisant est choisie comme

$$u = \frac{1}{L_f L_g h} (-L_f^2 h + v)$$

$$u = \frac{\Delta}{m L^2 + I} \left[\frac{(mL \cos \theta)(mgL \sin \theta - d\dot{\theta}) - (mL\theta^2 \sin \theta - b\dot{x}_2)(mL^2 + I)}{\Delta} + v \right]$$

est la nouvelle variable d'entrée de commande et peut être choisie comme

$$v = [K_1 \quad K_2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$K_1 = K_2 = 20$$

La sortie est angle

$$h(x) = x_3 = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

Ensuite, nous pouvons maintenant prendre la dérivée de Lie de la fonction de sortie jusqu'à ce que l'entrée de contrôle apparaisse

$$\dot{h} = \frac{\partial h}{\partial x} \dot{x} = L_f h + L_g h u = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0] [f_2(x)] + [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0] [g_2(x)] u = x_4$$

Prendre la 2ème dérivée

$$\ddot{h} = \frac{\partial \dot{h}}{\partial x} \dot{x} = L_f^2 h + L_f L_g h u = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1] [f_2(x)] + [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1] [g_2(x)] u$$

$$\ddot{h} = \ddot{\theta}$$

La loi de commande linéarisant est choisie comme

$$u = \frac{1}{L_f L_g h} (-L_f^2 h + v)$$

$$u = \frac{-\Delta}{mL \cos \theta} \left[\frac{-(m+M)(mlg \sin \theta - d\dot{\theta}) + (mL \cos \theta)(mL\dot{\theta}^2 \sin \theta - b\dot{x})}{\Delta} + v \right]$$

est la nouvelle variable d'entrée de commande et peut être choisie comme

$$v = [K_3 \quad K_4] \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

$$K_3 = K_4 = 20$$

III.4.2. Résultats et discussion

Après avoir calculé le gain de contrôle K du chariot et du pendule, nous avons appliqué une référence de 0,1 à la position du chariot et de 0 au pendule, les résultats sont présentés sur la figure (III.24)

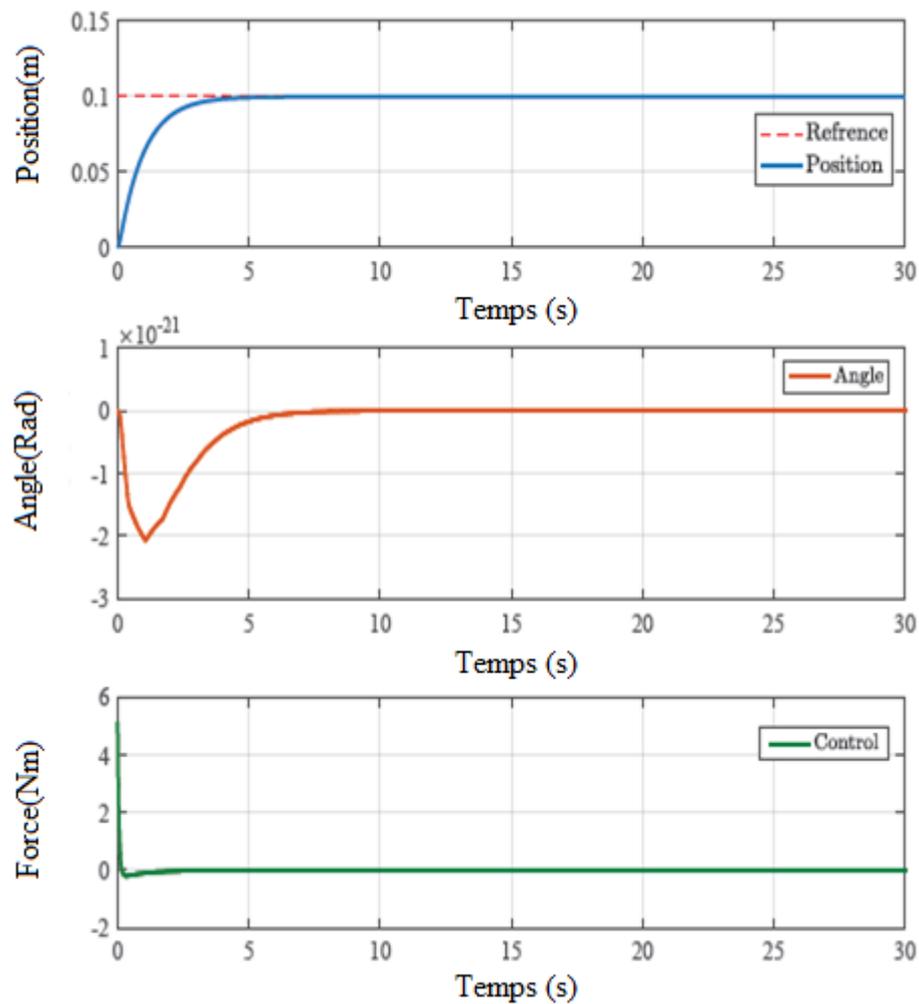


Figure III.24 : Réponse d'un pendule inversé sous contrôleur de linéarisation de rétroaction.

Nous voyons que le chariot prend 3,75 s pour se stabiliser à la référence souhaitée avec une erreur très petite. On constate alors que la réponse est très acceptable. Le pendule prend 6s pour se stabiliser sur la référence donnée (Angle 0).

On peut dire que le contrôleur LQR répond aux objectifs de conception.

Pour tester notre système s'il est robuste et suit la référence comme nous le souhaitons. En appliquant une perturbation de 20 % à partir de notre référence (0,1) environ 5 secondes (15-20 sec) après la simulation, nous obtenons ce résultat illustré à la Fig (III.25)

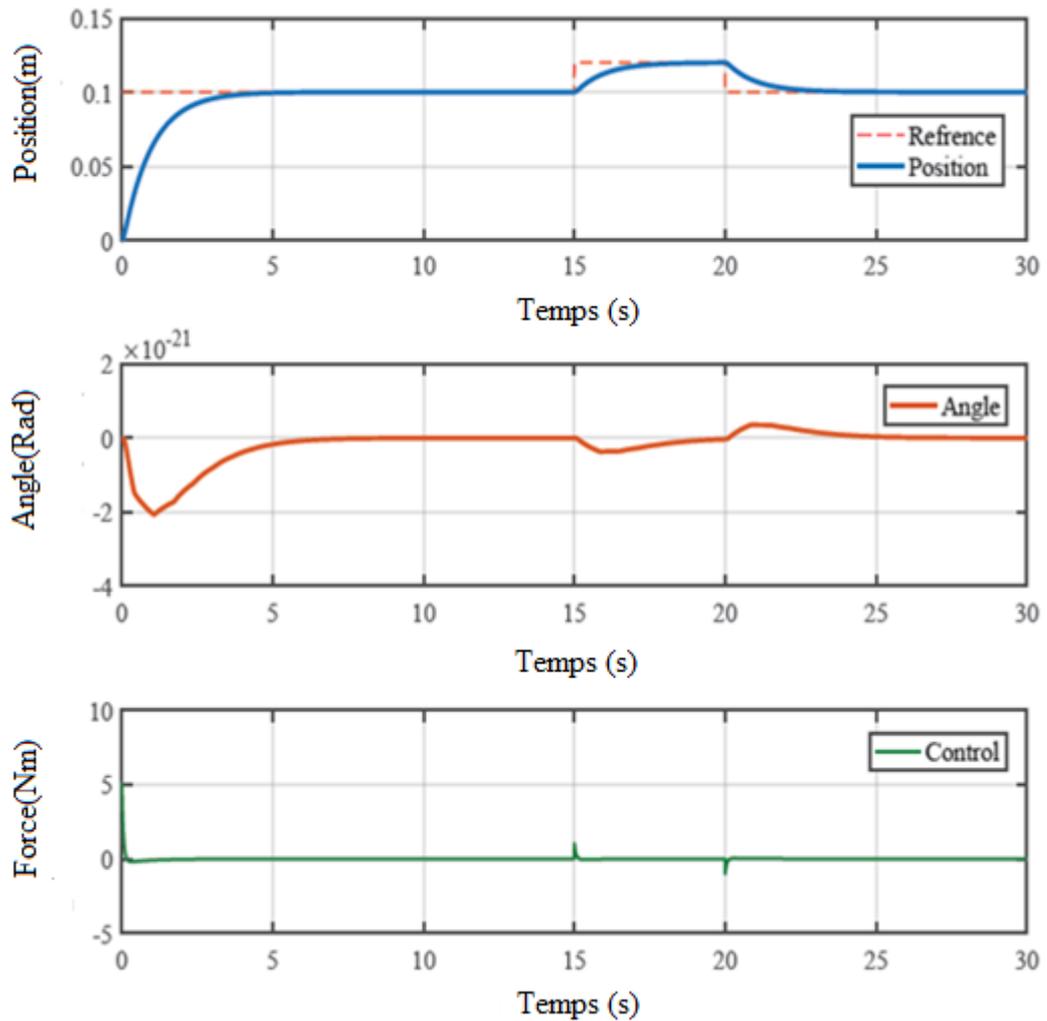


Figure III.25 : Réponse d'un pendule inversé avec perturbation sous contrôleur de linéarisation de rétroaction.

On voit que la position du chariot suit la nouvelle référence (0.12) pendant 5s, puis revient à la référence initiale comme nous l'avons donné au début avec un petit retard.

III.5 Comparaison

La figure (III.26) montre les trois contrôleurs non linéaires, nous voyons que tous suivent la nouvelle référence et le plus rapide est la commande par mode glissant.

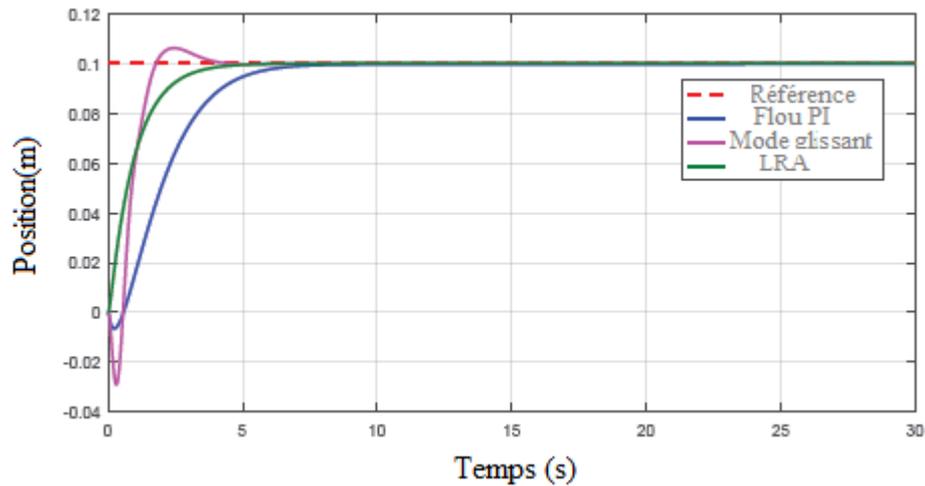


Figure III.26 : Réponse du pendule inversé sous les commandes non linéaires.

Tableau III. 1: Tableau de comparaison.

Contrôleur	Temps de montée (s)	Temps d'établissement (s)	Dépassement (%)	Erreur (%)
Flou PI	3.38	6.25	0	0
Mode glissant	0.88	3.42	6.21	1.04
Linéarisation rétro	2.08	3.75	3.75	1.2

Nous effectuons des perturbations pour les trois contrôleurs linéaires en même temps pour voir quel contrôleur est robuste.

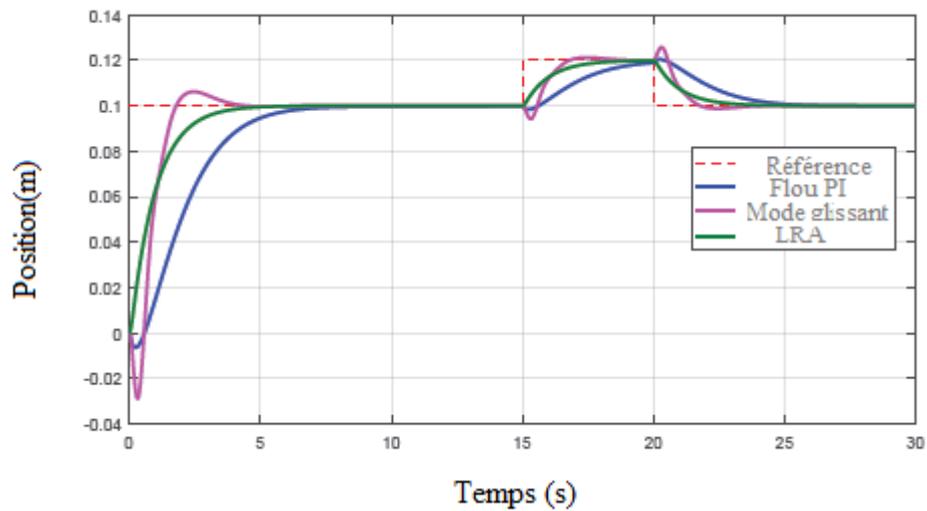


Figure III.27 : Réponse du pendule inversé avec perturbation sous les commandes non linéaires.

Nous voyons que le contrôleur par mode glissant est le plus robuste.

III.6. Conclusion

Dans ce chapitre, on a présenté des méthodes et des techniques de commande non linéaire d'un pendule inversé, qui sont le contrôleur flou et par mode glissant et commande de linéarisation par rétroaction et nous avons conclu que le contrôleur par mode glissant est le plus rapide et le plus robuste.

Conclusion générale

Conclusion générale

Dans ce travail, différentes techniques de commande non linéaires et linéaires ont été conçues et mises en œuvre avec succès sur le pendule inversé.

Premièrement, nous avons donné des généralités sur le pendule inversé, ses caractéristiques et son principe de fonctionnement. Afin d'analyser le système en boucle ouverte, nous avons simulé notre système sous MATLAB SIMULINK et la réponse trouvée nous a montré que le pendule inversé est un système dynamique instable. Nous avons ensuite développé le modèle non linéaire du système avec sa linéarisation autour du point d'équilibre. La représentation de l'espace d'état a été représentée et les fonctions de transfert ont été calculées.

Pour le commander, nous avons tout d'abord conçu les trois contrôleurs linéaires, PID, commande par retour d'état et LQR, en plus des trois contrôleurs non linéaires, Logique floue, commande par mode glissant et Linéarisation à rétroaction.

Ensuite un test de robustesse vis-à-vis la perturbation externe a été élaborée. Pour voir les performances et la robustesse des différents contrôleurs, une étude comparative a été réalisée entre la technique de contrôle conçue et, comme le montrent les résultats, LQR avait un temps de stabilisation court avec un petit dépassement par rapport au PID et à commander par retour d'état, pour la robustesse, la commande par retour d'état l'assure.

La commande par mode glissant a également eu un temps de stabilisation court en comparaison avec contrôleur Flou et linéarisation de rétroaction, et c'est toujours la commande par mode glissant le plus robuste entre eux.

*Références
bibliographique*

Références bibliographiques

- [1] OlfaBoubaker and R. Iriarte, The inverted pendulum in control theory and robotics : from theory to new innovations. London, United Kingdom: The Institution Of Engineering And Technology, 2017.
- [2] Stephenson.A, “On a new type of dynamic stability,” Memories and Proceeding of the Manchester Literary and Philosophical Society, vol. 52, pp. 1–10, 1908.
- [3] Stephenson A. ‘On induced stability’. Philosophical Magazine, 1909.
- [4] Lowenstern E.R. ‘Stabilizing effect of imposed oscillations on a dynamical system’. Philosophical Magazine, 1932.
- [5] Lundberg K.H., Barton T.W. ‘History of inverted pendulum systems’. IFAC Proceedings Volumes, 2010.
- [6] Roberge J.K. The mechanical seal. Bachelor’s thesis, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, 1960.
- [7] Donald T.H., Robert H.C. ‘On the control of unstable multiple-output mechanical systems’. ASME Publication 63-WA-148; American Society of Mechanical Engineers, New York, 1963.
- [8] Schaefer J.F., Cannon R.H. (eds.) ‘On the control of unstable mechanical systems’. Proceedings of the third Automatic and Remote Control; London, June 1966.
- [9] Young L.R. ‘Bang-bang aspects of manual control in high-order systems’. IEEE Transactions on Automatic Control, 1965.
- [10] Bogdanov A. ‘Optimal control of a double inverted pendulum on a cart’. Tech. Rep. CSE-04-006; Oregon Health and Science University, OGI School of Science and Engineering, Beaverton, OR, 2004.

- Furuta K., Yamakita M., Kobayashi S. (eds.) 'Swing up control of inverted pendulum'.
[11] International Conference Industrial Electronics, control and Instrumentation (IECON '91); Kobe, Japan, October 1991.
- Astrom K.J., Furuta K. 'Swinging up a pendulum by energy control'. Automatica, 2000.
[12]
- Mori S., Nishihara H., Furuta K. 'Control of unstable mechanical system control of pendulum'. International Journal of Control, 1976.
[13]
- Srinivasan B., Huguenin P., Bonvin D. 'Global stabilization of an inverted pendulum- Control strategy and experimental verification'. Automatica, 2009.
[14]
- Berkemeier M.D., Fearing R.S. 'Tracking fast inverted trajectories of the underactuated Acrobot'. IEEE Transactions on Robotics and Automation, 1999.
[15]
- Wai R.J., Chang L.J. 'Adaptive stabilizing and tracking control for a nonlinear inverted-pendulum system via sliding-mode technique'. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2006.
[16]
- Ma X.J., Sun Z.Q., HeY.Y. 'Analysis and design of fuzzy controller and fuzzy observer'. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 1998.
[17]
- Tong S., Li H.X., Wang W. 'Observer-based adaptive fuzzy control for SISO nonlinear systems'. Fuzzy Sets and Systems, 2004.
[18]
- BillalTOUATI , Mahdi MOUSSAOUI : "Commande d'un pendule inversé par mode glissant". Mémoire de master. Université Abderrahmane Mira. Bejaia. 2017.
[19]
- Nedjwa KERMAD : "Etude et implémentation sur microcontrôleur de contrôleur flou ". Mémoire de magister. Université Mohamed Boudiaf, Oran. 2015.
[20]
- Astrom K.J., Furuta K. 'Swinging up a pendulum by energy control'. Automatica, 2000.
[21]
- Bradford.E.M, "Nonlinear feedback control of the rotary inverted pendulum," calhoun.nps.edu, Jun. 01, 2017. <https://calhoun.nps.edu/handle/10945/55574> (accessed
[22]

Jun. 19, 2022).

[23] Åström.K, “Control System Design ”,chapter 6, 2002.

Astorn.K.J, “pid controllers theory design and tuning 2ed,” 1934. [Online]. Available:
[24] https://aiecp.files.wordpress.com/2012/07/1-0_1-k-j-astrom-pid-controllerstheory- design-and-tuning-2ed.pdf

[25] “Pole Placement Design Technique 8.2 State Feedback and Pole Placement.” [Online]. Available: <https://www.ece.rutgers.edu/gajic/psfiles/poleplacement.pdf>

Brunton.S.L and Jose Nathan Kutz, Data-driven science and engineering : machine
[26] learning, dynamical systems, and control. Cambridge: Cambridge University Press, 2019.

[27] Chantarachit.S, “Development and Control of Rotary Inverse Pendulum by LQR with Integral Action,” IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, vol. 639, p. 012022, Oct. 2019, doi: 10.1088/1757-899x/639/1/012022.

[28] Morechta, ABDELGHAFAR; Bakhi, LAMINE, “Stabilisation d’un pendule inversé par la logique floue,” Univ-msila.dz, 2020, doi: ELC/AUT012/20.

[29] “Fuzzy Inference - an overview | ScienceDirect Topics,” www.sciencedirect.com. <https://www.sciencedirect.com/topics/engineering/fuzzy-inference>

[30] “Nonlinear Control of the Inverted Pendulum on a Cart,” studylib.net. <https://studylib.net/doc/25222884/nonlinear-control-of-the-inverted-pendulumon-a-cart>

[31] “Control of Power Electronic Converters and Systems | ScienceDirect,” www.sciencedirect.com.

<https://www.sciencedirect.com/book/9780128194324/control-of-power-electronicconverters-and-systems> (accessed Jun. 19, 2022).